NACRTNA GEOMETRIJA (Septembarski rok) - 3. Septembar 2004.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : U projektivnoj ravni data je kriva $\Gamma : 3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$. Odrediti tangente iz tačke $A(1:1:1)$ na krivu Γ. Da li je prava $x_3 = 0$ tangenta na krivu Γ?

Rešenje : Iz jednačine krive Γ imamo njenu matricu G

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Prvo nalazimo polaru za tačku A u odnosu na krivu Γ po jednačini $\lambda U = GA$, odakle dobijamo $[1 : -1 : -1]$, tj polaru $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Dodirne tačke tangenti dobijamo u preseku krive i polare. Rešavanjem sistema jednačina dobijamo dva rešenja, tačke $M(1:0:1)$ i $N(1:1:0)$. Sada su tražene tangente prave $AM[1:0:-1]$ i $AN[1:-1:0]$, odnosno prave $x_1 = x_3$ i $x_1 = x_2$. Da li je kriva $[0:0:1]$ tangenta na krivu odgovorićemo kad joj nađemo pol, tačku $P(x_1 : x_2 : x_3)$. Odnos pol-polara daje nam jednačinu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

te rešavamo sistem jednačina $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Odavde dobijamo tačku $P(1:1:2)$. Proverom u jednačinu krive vidimo da $P \notin \Gamma$, te $x_3 = 0$ nije tangenta na krivu! To se lakše može videti ako presečemo Γ sa $x_3 = 0$. Dobijamo $3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = (3x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$, što znači da prava seče krivu u dve tačke pa ne može biti tangenta! $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : Dat je četvorougao $ABCD$ i prava s u ravni. Odrediti perspektivno afino preslikavanje sa osom s koje dati četvorougao preslikava na pravougaonik sa odnosom stranica $2:1$.

Rešenje : Kako afino preslikavanje čuva paralelnost to četvorougao $ABCD$ mora biti paralelogram! Neka je u slici $A'B' : A'D' = 2:1$. Neka je E središte stranice AB, F središte stranice DC, a $\{M\} = AF \cap DE$. Slika tačke M biće $\{M'\} = A'F' \cap D'E'$, a kako se odnosi na pravoj čuvaju to je $A'E'F'D'$ kvadrat sa centrom M'. Definišemo li $\{X\} = AF \cap s$, $\{Y\} = DE \cap s$, to zbog $A'F'XM' \perp D'E'YM'$ mora biti M' na krugu nad prečnikom XY. Neka su p i q prave kroz M koje su paralelne redom sa AEB i AD. Definišemo li $\{U\} = p \cap s$, $\{V\} = q \cap s$ to $U \in p'$, $V \in q'$. Kako se paralelnost čuva afinim preslikavanjem $p' \parallel A'E'B' \perp A'D' \parallel q'$ odakle $p' \perp q'$, odnosno $UM' \perp VM'$, te je M' na krugu nad prečnikom UV. Dakle M' dobijamo u preseku krugova nad prečnicima XY i UV. Sada je preslikavanje određeno osom s i parom odgovarajućih tačaka M i M'. $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Metodom dve normalne projekcije data je ravan $\tau(t_1, t_2)$ koja je normalna na π_2 i sa π_1 gradi ugao od 60^o. Predstaviti projekciju prave kupe čija je osnova u ravni τ, dok je ravan π_1 njena tangentna ravan. Predstaviti zatim presek kupe i ravni koja sadrži središte visine kupe i pravu t_1.

ZADATAK 4.

Zadatak : Metodom tragova i nedogleda data je ravan $\tau(t, t_\infty^c)$ i tačka $S(S^c)$ na pravoj $q(Q, Q_\infty^c)$ van ravni τ. Konstruisati centralnu projekciju pravilnog oktaedra $ABCDEF$ čije je središte tačka S, strana ABE pripada ravni τ i ivica AB gradi ugao od 30^o sa ravni π.