NACRTNA GEOMETRIJA (Junski rok) - 9. Jun 2004.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : Neka je f projektivno preslikavanje projektivne prave p na sebe samu i $A_0 \in p$. Ukoliko važi $A_{n+1} := f(A_n)$ za $n \geq 0$, i $A_6 = A_0$ odrediti dvorazmeru $(A_1A_2A_4A_5)$ ukoliko postoji.

Rešenje : Ukoliko dvorazmera $(A_1A_2A_4A_5)$ postoji to zbog invarijantnosti za projektivno preslikavanje postoje i dvorazmere $(A_2A_3A_5A_0)$ i $(A_3A_4A_0A_1)$, odakle sledi da su tačke A_0, A_1, A_2, A_3 različite. Sada možemo da uvedemo homogene koordinate na pravoj p sa $A_0 = (1:0)$, $A_1 = (0:1)$, $A_2 = (1:1)$, $A_3 = (a:1)$ i $a \notin \{0,1\}$. Neka je

$$\lambda A_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot A_n$$

Za $n=0$ imamo $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, odakle je $x_{11} = 0$.
Za $n=1$ imamo $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, odakle je $x_{12} = x_{22}$.
Za $n=2$ imamo $\lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & x_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, odakle je $a(x_{21} + x_{12}) = x_{12}$.
Odavde dobijamo matricu preslikavanja f u obliku $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$, te imamo računom i A_4, A_5, A_6:
$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1+a-a^2 \end{pmatrix}$,
$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1+a-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+a-a^2 \\ (1-a)(2-a)+1+a-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+a-a^2 \\ 3-2a \end{pmatrix}$.
Kako je $A_6 = A_0$ to mora biti $3-2a=0$, odnosno $a = \frac{3}{2}$, što daje matricu preslikavanja $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,
te je i $A_3(3:2)$, $A_4(2:1)$. Sada je $(A_1A_2A_4A_5) = (A_0A_1A_3A_4) = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$. $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : Neka su Γ_1 i Γ_2 nedegenerisane krive drugog reda, a A_1, A_2 i Z različite tačke takve da važi $A_1 \in \Gamma_1$, $A_2 \in \Gamma_2$, $Z \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Neka je $p \ni Z$ proizvoljna prava. Neka su M_1 i M_2 tačke takve da $M_i \in \Gamma_i \cap p$ i ukoliko p nije tangenta na Γ_i onda $M_i \neq Z$ za $i = 1,2$. Ako je $\{X\} = A_1M_1 \cap A_2M_2$, dokazati da je geometrijsko mesto tačaka X kriva drugog reda kad $p \ni Z$. Dati potreban i dovoljan uslov da je ta kriva degenerisana.

Rešenje : Napravimo projektivna preslikavanja indukovana krivim Γ_i. Neka je $f_1 : A_1 \barwedge Z$ indukovano sa Γ_1, a $f_2 : Z \barwedge A_2$ indukovano sa Γ_2. Definišimo $f : A_1 \barwedge A_2$ sa $f := f_2 \circ f_1$. Biće $f(A_1M_1) = f_2(f_1(A_1M_1)) = f_2(ZM_1) = f_2(p) = f_2(ZM_2) = A_2M_2$. Kako je $\{X\} = A_1M_1 \cap f(A_1M_1)$ to je GMT X po definiciji kriva drugog reda. Kako je $A_1 \neq A_2$ dovoljno je ispitati kad je f perspektivno preslikavanje. Ovo je ekvivalentno tome da je $f(A_1A_2) = A_1A_2$, odnosno $f_1(A_1A_2) = f_2^{-1}(A_2A_1)$. Razlikujemo više slučajeva:

1) A_1A_2 nije tangenta ni na Γ_1, ni na Γ_2: Tada je $f_1(A_1A_2) = ZT_1$, sa $T_1 \in A_1A_2 \cap \Gamma_1$, kao i $f_2^{-1}(A_1A_2) = ZT_2$, sa $T_2 \in A_1A_2 \cap \Gamma_2$. Kada je $ZT_1 = ZT_2$? Ne može biti $T_1 \neq T_2$ jer bi bilo $Z \in T_1T_2 = A_1A_2$, te $T_1 = Z = T_2$. Mora biti $T_1 = T_2 = T$. Tada $T \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ i A_1, A_2, T su kolinearne. Za $T \neq Z$ stvar očigledno važi, dok za $T = Z$ degenerisanost znači da Γ_1 i Γ_2 imaju zajedničku tangentu u Z.

2) A_1A_2 je tangenta na tačno jednu od krivih Γ_1, Γ_2: Pretpostavimo da je u pitanju Γ_1, dakle $f_1(A_1A_2) = ZA_1$ i $f_2^{-1}(A_1A_2) = ZT$, sa $T \in A_1A_2 \cap \Gamma_2$. Ne sme biti $T \neq A_1$ jer bi bilo $Z \in A_1T = A_1A_2$. Mora biti $T = A_1$, odnosno $A_1 \in \Gamma_2$ i to jeste rešenje. Simetrično ako je A_1A_2 tangenta na Γ_2 mora biti $A_2 \in \Gamma_1$.

3) Slučaj kad je A_1A_2 tangenta na obe krive je neizvodljiv jer bi moralo biti $f(A_1A_2) = ZA_1 = ZA_2 = f_2^{-1}(A_1A_2)$, te i $Z \in A_1A_2$, što je nemoguće jer bi A_1A_2 imala dva preseka sa Γ_i.

Zaključak: kriva je degenerisana akko (Z, A_1, A_2 kolinearne i Γ_1 i Γ_2 imaju zajedničku tangentu u Z), ili (A_1 i A_2 kolinearne sa nekom tačkom iz ($\Gamma_1 \cap \Gamma_2$) različitom od Z) ili (A_1A_2 je tangenta na Γ_1 i $A_1 \in \Gamma_2$) ili (A_1A_2 je tangenta na Γ_2 i $A_2 \in \Gamma_1$). $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Metodom dve normalne projekcije date su mimoilazne prave $p(p', p'')$ normalna na π_1 i $q(q', q'')$ paralelna ravni π_1. Konstruisati projekcije pravilnog tetraedra $ABCD$, ako stranice AB i CD pripadaju redom pravim p i q, a njihova središta određuju zajedničku normalu pravih p i q.

ZADATAK 4.

Zadatak : Metodom tragova i nedogleda centralnog projektovanja predstaviti paralelne ravni α i β, predstaviti zatim prav valjak čije osnove pripadaju ravnima α i β čija je visina jednaka prečniku osnove.