PROJEKTIVNA GEOMETRIJA (2. Kolokvijum) - 24. April 2004.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : Date su tri konkurentne prave p, q, a i tačke A_1, A_2, A_3 na pravoj a. Ako su f_1, f_2, f_3 perspektivna preslikavanja prave p na pravu q sa centrima A_1, A_2, A_3 (tim redom), dokazati da važi $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$.

Prvo Rešenje : Potrebno je i dovoljno pokazati da za proizvoljno $P \in p$ važi $(f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1)(P) = (f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3)(P)$. Neka je $Q_1 := f_1(P)$, $P_1 := f_2^{-1}(Q_1)$, tj $A_1P \cap A_2P_1 = \{Q_1\}$ i neka je $Q_2 := f_3(P)$, $P_2 := f_2^{-1}(Q_2)$, tj $A_3P \cap A_2P_2 = \{Q_2\}$. Primenimo li Papasovu teoremu na kolinearne trojke $A_1, A_2, A_3 \in a$ i $P_1, P, P_2 \in p$ dobićemo tri kolinearne tačke određene sa $A_1P \cap A_2P_1$, $A_3P \cap A_2P_2$ i $A_1P_2 \cap A_3P_1$. Prve dve tačke su Q_1 i Q_2 i one određuju pravu q, odakle za $\{Q\} := A_1P_2 \cap A_3P_1$ važi $Q \in q$, odnosno $A_1P_2 \cap A_3P_1 \cap q = \{Q\}$. Kako je sada $A_1P_2 \cap q = \{f_1(P_2)\}$ i $A_3P_1 \cap q = \{f_3(P_1)\}$ to mora biti $f_1(P_2) = Q = f_3(P_1)$, odnosno $f_1(f_2^{-1}(f_3(P))) = f_3(f_2^{-1}(f_1(P)))$, što dokazuje tvrđenje. □

Drugo Rešenje : Projektivna preslikavanja $f_1 \circ f_2^{-1}$ i $f_3 \circ f_2^{-1}$ prave q na samu sebe su parabolička jer je tačka $\{S\} := a \cap q \cap p$ jedina fiksna tačka. Poznato je da parabolička preslikavanja na pravoj sa istom fiksnom tačkom komutiraju, te je $(f_1 \circ f_2^{-1}) \circ (f_3 \circ f_2^{-1}) = (f_3 \circ f_2^{-1}) \circ (f_1 \circ f_2^{-1})$. Množenjem zdesna sa f_2 dobijamo traženu jednakost. □

ZADATAK 2.

Zadatak : U euklidskoj ravni dat je četvorougao $ABCD$ i prava s. Neka je f perspektivno kolinearno preslikavanje sa osom s koje dati četvorougao prevodi u deltoid. Konstruisati protivosu preslikavanja f, a zatim i geometrijsko mesto tačaka mogućih centara tog preslikavanja.

Rešenje : Neka je $\{E\} := AC \cap BD$. Za $f =\prime$ imaćemo $\{E'\} = A'C' \cap B'D'$. Četvorougao $A'B'C'D'$ je deltoid akko $A'E'C' \perp B'E'D'$ i $|A'E'| = |C'E'|$. Ako je $U \in AEC$ takva da $\mathcal{H}(AC; EU)$ biće $\mathcal{H}(A'C'; E'U')$. Kako je E' središte duži $A'C'$ to je U' beskonačno daleka, te tačka U pripada protivosi u. Znamo da je $u \parallel s$, te u konstruišemo kao pravu kroz U paralelnu sa s. Sada razlikujemo slučajeve:

1) $AC \nparallel s$ i $BD \nparallel s$: Neka je $\{X\} := AC \cap s$ i $\{Y\} := BD \cap s$. Kako je $A'C'XE' \perp B'D'YE'$ to se E' nalazi na krugu nad prečnikom XY, tj $E' \in k(XY)$. Za centar S mora biti $\{S\} = EE' \cap UU'$. U' je beskonačno daleka prave $A'C'XE'$, te je $SUU' \parallel A'C'XE'$. Primena Talesove teoreme daje nam slične trouglove: $\triangle\, SUE \sim \triangle\, E'XE$, odnosno $XE' : US = XE : UE = h$. Neka je O središte duži XY i $\{T\} := OE \cap u$, tada zbog $s \parallel u$ imamo $\triangle\, TUE \sim \triangle\, OXE$, te $XO : UT = XE : UE = h$. Kako je $XE' : US = h = XO : UT$ i $\angle SUT = \angle E'XO$ (kao uglovi sa paralelnim kracima), to važi $\triangle UST \sim \triangle XE'O$, te i $TS : OE' = h$. Odavde se vidi da je rastojanje TS fiksno. Dakle geometrijsko mesto tačaka mogućih centara preslikavanja f je krug sa centrom u T i poluprečnikom TU.

2) $AC \nparallel s$ i $BD \parallel s$: Neka je $\{X\} := AC \cap s$, tada $X \in A'E'C'$. $BD \parallel s$ povlači $B'E'D' \parallel s$, te zbog $A'E' \perp B'E'$ imamo $A'E'X \perp s$. Dakle E' se nalazi na pravoj kroz X normaloj na s. U' je beskonačno daleka prave $A'C'E'X$, te je UU' prava kroz U paralelna $E'X$, odnosno normalna na s. Kako centar $S \in UU'$ to je geometrijsko mesto tačaka mogućih centara prava kroz U normalna na s.

3) $AC \parallel s$: Kako je $U \in AC$ i $AC \parallel s$, to je $AC = u \parallel s$. Ovo dalje znači da su A' i C' beskonačno daleke što je nemoguće jer onda nema deltoida. Dakle $AC \parallel s$ nije moguća opcija. □

ZADATAK 3.

Zadatak : U euklidskoj ravni date su tačke A i O, kao i prave a i p. Ako je A dodirna tačka tangente a na hiperbolu, O centar te hiperbole, a p jedna njena asimptota, odrediti drugu njenu asimptotu.

Prvo Rešenje : Kako je O centar hiperbole, to je hiperbola centralno simetrična u odnosu na O, te kako je A na hiperboli to je na njoj i $B \neq A$, takva da je $B \in AO \cap k(O, OA)$. Neka je $\{P_\infty\} := p \cap u_\infty$ i $\{Q_\infty\} := q \cap u_\infty$, gde je q druga asimptota. Tačke A, B, P_∞, Q_∞ pripadaju hiperboli, te primenjujemo Paskalovu teoremu na degenerisani šestotemenik $P_\infty P_\infty Q_\infty AAB$. Za $\{M\} := p \cap a$, $\{N\} := u_\infty \cap ABO$, $\{L\} = Q_\infty A \cap BP_\infty$ su po teoremi M, N, L kolinearne. Dakle $Q_\infty A \cap BP_\infty \cap MN = \{L\}$, te $\{L\} := BP_\infty \cap MN$. Sada je $Q_\infty \in AL$, te $Q_\infty := AL \cap u_\infty$ i $q := OQ_\infty$. Konstrukcija: $A \neq B \in AO \cap k(O, OA)$. M je presek p i a. L je presek prave kroz B paralelne p i prave kroz M paralelne AO. Tražena asimptota q je prava kroz O paralelna AL. □

Drugo Rešenje : Neka je $\{P_\infty\} := p \cap u_\infty$ i $\{Q_\infty\} := q \cap u_\infty$, gde je q druga asimptota. Neka je još $\{P\} := a \cap p$, $\{Q\} = a \cap q$, i $\{S\} = P_\infty Q \cap Q_\infty P$. Posmatramo li četvorougao $PSQO$, možemo primetiti da važi $PSQ_\infty \parallel OQQ_\infty$ i $QSP_\infty \parallel OPP_\infty$, te je on paralelogram. Primenimo li Brianšonovu teoremu na degenerisani šestostranik *ppqqaa* dobićemo $P_\infty Q \cap Q_\infty P \cap OA \neq \varnothing$, odnosno $S \in OA$. Sada je zbog $\{A\} = PQ \cap OS$ tačka A presek dijagonala paralelograma $PSQO$, te ih kao takva polovi. Dakle $Q \in a$ i $|PA| = |QA|$, što nam omogućava da definišemo $P \neq Q \in a \cap k(A, AP)$. Na kraju je naravno $q := OQ$. □