PROJEKTIVNA GEOMETRIJA (1. Kolokvijum) - 16. Decembar 2003.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : Neka su A_1, A_2, A_3 i A_4 različite tačke projektivne prave. Izračunati
1) $\prod_{\sigma\in S_4}(A_{\sigma1}A_{\sigma2}A_{\sigma3}A_{\sigma4}) = (A_1A_2A_3A_4)\cdot(A_1A_2A_4A_3)\cdot(A_1A_3A_2A_4)\cdot ... \cdot(A_4A_3A_2A_1)$;
2) $\sum_{\sigma\in S_4}(A_{\sigma1}A_{\sigma2}A_{\sigma3}A_{\sigma4}) = (A_1A_2A_3A_4)+(A_1A_2A_4A_3)+(A_1A_3A_2A_4)+ ... +(A_4A_3A_2A_1)$.
(U pitanju su proizvod, odnosno suma dvorazmera po svim permutacijama tačaka A_1, A_2, A_3, A_4)

Rešenje : Neka su A, B, C, D različite tačke projektivne prave.
1) Iz dobro poznate jednakosti $(ABCD)\cdot(ABDC) = 1$ vidimo da svaka permutacija ima svog para, pa će, kako postoji 24 permutacija, biti $\prod_{\sigma\in S_4}(A_{\sigma1}A_{\sigma2}A_{\sigma3}A_{\sigma4}) = 1^{12} = 1$.
2) Za $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ i $\vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$ imaćemo $\beta\vec{B} = \vec{C} - \alpha\vec{A}$ i $\beta\vec{D} = \beta\gamma\vec{A} + \delta(\vec{C} - \alpha\vec{A}) = (\beta\gamma - \alpha\delta)\vec{A} + \delta\vec{C}$. Sada je $(ABCD) + (ACBD) = (\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}) + (\frac{1}{-\alpha} : \frac{\delta}{\beta\gamma-\alpha\delta}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} + \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha\delta} = 1$. Zaključak je da $(ABCD) + (ACBD) = 1$ važi uvek, te kao pod 1) uviđamo par svakoj permutaciji odakle je $\sum_{\sigma\in S_4}(A_{\sigma1}A_{\sigma2}A_{\sigma3}A_{\sigma4}) = 1 + ... + 1 = 12$. $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : Projektivno preslikavanje je zadato formulama $\lambda x_1' = 5x_1 - 3x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = -3x_1 + 5x_2 + x_3$, $\lambda x_3' = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3$. Odrediti sve fiksne prave datog preslikavanja, a zatim naći novi projektivni koordinatni sistem u čijim je afinim koordinatama dato preslikavanje afino i ispisati formule preslikavanja u novim koordinatama.

ZADATAK 3.

Zadatak : U projektivnoj ravni zadata je kriva $\Gamma : x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ i tačka $A(1:2:1)$. Odrediti tangente iz tačke A na krivu Γ. Neka su T_1 i T_2 dodirne tačke tangenti iz A na krivu Γ. Odrediti još neku krivu drugog reda koja sadrži tačke T_1 i T_2 i ima za tangente prave AT_1 i AT_2.

Rešenje :
Matrica krive Γ je $G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Polara je $GA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Vidimo da je jednačina polare $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Sada T_1 i T_2 dobijamo u preseku polare i krive. Na primer možemo zameniti $2x_1 = x_2 + 2x_3$ u jednačinu krive i dobiti $-2x_2x_3 = 0$, što daje $x_2 = 0$ ili $x_3 = 0$. Odavde imamo rešenja $T_1(1:0:1)$ i $T_2(1:2:0)$. Tražene tangente biće $AT_1 = [1:0:-1]$ i $AT_2 = [2:-1:0]$.
Za drugi deo zadatka koristimo odnose pol polara, te će za matricu tražene krive morati da bude:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{13} \\ a_{12}+a_{23} \\ a_{13}+a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+2a_{12} \\ a_{12}+2a_{22} \\ a_{13}+2a_{23} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ovo nam daje četiri jednačine: $a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 0$, $a_{12} + a_{23} = 0$ iz prve veze i $a_{11} + 4a_{12} + 4a_{22} = 0$, $a_{13} + a_{23} = 0$ iz druge veze. Možemo staviti recimo $a_{12} = 0$. Biće $a_{23} = 0$, te $a_{13} = 0$, $a_{33} = -a_{11}$, $4a_{22} = -a_{11}$. Stavimo li $a_{22} = 1$ biće $a_{11} = -4$ i $a_{33} = 4$. Ovo nam daje jednu od krivih koje zadovoljavaju traženi uslov: $-4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 = 0$. $\square$