НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (Септембарски рок) - 31. Август 2005.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : Тачке $A(1)$, $B(2)$, $C(3)$ пројективне праве, задате својом афином координатом, узете су редом за базне тачке и јединицу новог хомогеног система координата. Нека је $D(\infty)$ тачка са бесконачном афином координатом. Одредити дворазмеру $(ABCD)$. Написати формуле пројективног пресликавања f које пресликава тачке A, B, C, редом у тачке B, C, D. Која је афина координата слике тачке D при пресликавању f?

Решење : У стандардном афином систему координата $(a_1 : a_2)$ тачке имају координате $A(1:1)$, $B(2:1)$, $C(3:1)$, $D(1:0)$, док у новом хомогеном систему $(x_1 : x_2)$ имамо $A(1:0)$, $B(0:1)$, $C(1:1)$. Веза између ова два система координата је матрица M, таква да је

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Пажљивим решавањем система једначина добија се $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а како је $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, то тачка D има нове координате $(2:1)$. Дворазмеру $(ABCD)$ можемо рачунати у новом систему по дефиницији, те из $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{D} = 2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ следи $(ABCD) = \frac{1}{1} : \frac{1}{2} = 2$. Нека је F матрица пресликавања f, тј

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Решавањем система добија се $F = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Уосталом, очигледном провером важи $f(A) = B$, $f(B) = C$ и $f(C) = D$, а знамо да је матрица једнозначно одређена са три пара тачака. Тражене формуле су дакле $x_1' = 2x_2$, $x_2' = -x_1 + 2x_2$. Даље имамо $F \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, што заправо значи $f(D) = A$, те је тражена афина координата од $f(D)$ једнака (1). $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : Дате су тачке A, B, C и права s. Одредити перспективно афино пресликавање са осом s које троугао ABC пресликава у једнакокрако правоугли троугао. Решавати само општи случај.

Решење: Нека је $'$ тражено афино пресликавање. Не умањујући општост претпоставимо да је $\angle A'C'B' = \pi/2$. Нека су M, N, P редом средишта дужи AB, AC, BC. Афино пресликавање чува средишта па су M', N', P' редом средишта дужи $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$. Како је $A'B'C'$ једнакокрако правоугли то је $P'M' \perp N'M'$ и $C'M' \perp A'B'$. У општем случају постојаће пресеци са осом: $PM \cap s = \{X\}$, $NM \cap s = \{Y\}$, $AB \cap s = \{Z\}$, $CM \cap s = \{T\}$. Колинеарност се чува, а X,Y,Z,T су на оси те имамо $P'M'X \perp N'M'Y$ и $C'M'T \perp A'B'Z$. Ово нам говори да тачка M' "види" дужи XY и ZT под правим углом. Овим је одређена тачка M' као тачка пресека кругова над пречницима XY и ZT, а самим тим и пресликавање $'$ својом осом s и паром (M, M'). $\square$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Методом одстојања дате су тачке $A(A', OA_0)$, $B(B', OB_0)$ и $C(C', OC_0)$. Представити пројекцију правог ваљка чија контура једне основе садржи тачке A, B, C и чија је висина једнака пречнику основе.

ЗАДАТАК 4.

Задатак : Методом трагова и недогледа дата је раван $\tau(t, t_\infty^c)$ и тачка $S \in \tau$. Конструисати пројекцију правилне пирамиде $ABCDEFV$ ако основа $ABCDEF$ са средиштем S припада равни τ, дијагонала AD припада линији пада равни τ, а висина SV једнака је дијагонали AD. Представити продорне тачке праве p кроз површ пирамиде, ако права p садржи средиште висине SV, паралелна је равни τ и са равни слике π гради угао од $\pi/6$.