НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (Јунски рок) - 8. Јун 2005.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : Нека је f пројективно пресликавање равни које пресликава праве $x=0$ и $y=0$ редом у праве $y=0$ и $y=1$. Да ли је слика круга $x^2+y^2=1$ елипса, хипербола или парабола? Уколико f слика тачку $(1,1)$ у тачку $(0,-1)$ одредити противосу пресликавања f. Исписати формуле пресликавања f уколико још $f\circ f$ пресликава тачку $(2,1)$ у тачку $(0,5)$.

Решење : Нека је A матрица пресликавања f, тј важи $\lambda X' = AX$. Добро је познато да се онда праве сликају са $\lambda U = A^T U'$. како имамо $[1:0:0]\mapsto[0:1:0]$ и $[0:1:0]\mapsto[0:1:-1]$, то је

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\a_{23}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}-a_{31}\\a_{22}-a_{32}\\a_{23}-a_{33}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

. Ово нам даје $a_{22}=0$, $a_{23}=0$, $a_{33}=0$, $a_{21}=a_{31}, a_{21}\neq 0, a_{32}\neq 0$. За противосу важи $u\mapsto u_\infty=[0:0:1]$, те је u заправо трећа колона транспоната од A, односно $u=[a_{31}:a_{32}:a_{33}]=[a_{21}:a_{32}:0]$. Ова права садржи тачку $(0:0:1)$, која је центар задатог круга. Самим тим противоса мора сећи круг у две тачке, што повлачи да је слика круга хипербола! Додамо ли услов $(1:1:1)\mapsto(0:-1:1)$ биће

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}\\a_{21}+a_{32}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Сада је $a_{13}=-a_{11}-a_{12}$ и $a_{32}=-2a_{12}$, што даје $u=[a_{21}:a_{32}:0]=[a_{21}:-2a_{12}:0]=[1:-2:0]$. Дакле противоса пресликавања f је права $x=2y$. Уведимо још последњи податак да $(2:1:1)\mapsto ?\mapsto(0:5:1)$.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{11}-a_{12}\\ a_{21} & 0 & 0\\ a_{21} & -2a_{21} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\2a_{21}\\0\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}a_{11}\\2a_{21}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}^2+2a_{12}a_{21}\\a_{11}a_{21}\\a_{11}a_{21}-4a_{21}^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}$$

Одавде је $a_{11}a_{21}=5(a_{11}a_{21}-4a_{21}^2)$ и $a_{11}^2+2a_{12}a_{21}=0$, што ће дати $a_{11}=5a_{21}$ и $2a_{12}=-25a_{21}$. Ставимо ли $a_{21}=2$ имамо $a_{11}=10$ и $a_{12}=-25$. Тражене формуле су: $\lambda x_1'=10x_1-25x_2+15x_3$, $\lambda x_2'=2x_1$, $\lambda x_3'=2x_1-4x_2$. $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : Дата је недегенерисана крива другог реда Γ и тачке $A,B,C\in\Gamma$ и $D\notin\Gamma$. За произвољно $M\in\Gamma$ нека је $\{N\}=BM\cap AC$ и $\{X\}=AM\cap DN$. Доказати да је геометријско место тачака X када $M\in\Gamma$ крива другог реда. Дати потребан и довољан услов да је та крива дегенерисана.

Решење: Нека је $f_1 := D\overset{AC}{\wedge}B$, $f_2:=B\overset{\Gamma}{\wedge}A$ и $f:=f_2\circ f_1$. Тада важи $f(DN)=f_2(f_1(DN))=f_2(BM)=AM$, те како је $f: D\,\overline{\wedge}\,A$ пројективно пресликавање и $\{X\}=DN\cap f(DN)$ то је у питању крива другог реда. У случају да је $D\in AC$ јасно је да је тражено ГМТ заправо тачка A, а тада се f_1 и не може дефинисати. Дегенерисаност даје услов перспективности $f(DA)=AD$. $f(DA)=f_2(BA)$ што је тангента у A, те је крива дегенерисана акко је AD тангента на Γ. $\square$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Методом одстојања дата је раван $\tau(t,S(S',OS_0))$. Конструисати пројекцију правилног октаедра $ABCDEF$ чији дијагонални пресек (квадрат) $ABCD$ припада τ, а дијагонала AC гради угао од 30^0 са равни π. Ивица октаедра подударна је датој дужи d.

ЗАДАТАК 4.

Задатак : Методом трагова и недогледа дата је права p трагом P и нагибним углом 60^o према равни слике. Представити пројекцију праве купе чији је врх тачка P, средиште S основе припада правој p, а SP је подударно датој дужи d.