НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (2. Колоквијум) - 17. Април 2005.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : У пројективној равни дате су конкурентне праве a, b, c, d и тачке P, Q, R које им не припадају. Доказати да постоји тачка X таква да за сваке четири тачке $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$ за које је $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$, важи и $X \in DA$.

Решење : Како P, Q, R не припадају $a \cup b \cup c \cup d$ то су добро дефинисана перспективна пресликавања

$$f_1 := a \overset{P}{\barwedge} b,\ f_2 := b \overset{Q}{\barwedge} c,\ f_3 := c \overset{R}{\barwedge} d$$

. Њихова композиција $f := f_3 \circ f_2 \circ f_1$ је очигледно пројективно пресликавање $f : a \barwedge d$. Конкурентност датих правих даје $a \cap b \cap c \cap d = \{S\}$. Наравно мора бити $f_1(S) = f_2(S) = f_3(S) = S$, те и $f(S) = S$. Пројективно пресликавање f фиксира заједнички елемент за a и d, те је f перспективно пресликавање. Нека је X центар тог перспективног пресликавања, односно $f = a \overset{X}{\barwedge} d$. Нека је $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$, $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$. Тада је $f_1(A) = B$, $f_2(B) = C$, $f_3(C) = D$, те и $f(A) = D$. Како је f перспективно пресликавање са центром X ово последње значи да су тачке A, D, X колинеарне, односно $X \in DA$. Ово доказује егзистенцију тражене тачке X. $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : Дат је четвороугао $ABCD$, тачка X и права s. Одредити перспективно афино пресликавање са осом s које дати четвороугао пресликава у једнакокраки трапез на чијој основици лежи тачка X. (Решавати само општи случај)

Решење: Нека је $'$ тражено афино пресликавање. Не умањујући општост претпоставимо да је $A'B'C'D'$ трапез са основицама $C'D'$ и $A'B' \ni X$. Како афино пресликавање чува паралелност $ABCD$ мора бити трапез са $AB \parallel CD$. Нека је M средиште дужи AB и $\{N\} := AD \cap BC$. Афино пресликавање чува средиште дужи те је M' средиште дужи $A'B'$. Како је $A'B'C'D'$ једнакокраки трапез то је $|A'D'| = |B'C'|$, те по Талесовој теореми имамо једнакокраки троугао $A'B'N'$ и одатле је $A'M'B' \perp M'N'$. Нека је $\{U\} := AB \cap s$ и $\{V\} := MN \cap s$. Како $X \in A'B'$ то је $A'B'XUM' \perp N'VM'$, те M' добијамо у подножју висине из V на XU. Сада је афино пресликавање једнозначно одређено осом s и паром одговарајућих тачака M и M'. $\square$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Дате су праве a и o, као и тачка A. Конструисати теме параболе којој је a тангента у A, а o оса.

Решење: Нека је U_∞ додирна тачка параболе и u_∞, а тачка T тражено теме параболе. Како је A на параболи, o њена оса, то је тачка B, симетрична A у односу на o, такође тачка са параболе. Како су A, B, U_∞, T тачке са параболе можемо применити Паскалову теорему на дегенерисани шестотеменик $AABU\infty U\infty T$. Овде још ваља приметити да је оса параболе заправо права TU_∞. За $\{P\} := a \cap u_\infty$, $\{Q\} := AB \cap U_\infty T = AB \cap o$, $\{R\} = BU_\infty \cap TA$ имамо колинеарност P, Q, R, те и $BU_\infty \cap TA \cap PQ = \{R\}$, што се реализује са $\{R\} := BU_\infty \cap PQ$ и наравно $\{T\} := o \cap AR$ јер $T \in AR$.
Конструкција: Нека је O подножје висине из A на праву o. $B \neq A$ је тачка са пресека праве AO и круга са центром O и полупречником OA. Q је пресек AOB и o. R је пресек праве кроз B паралелне o и праве кроз Q паралелне a. На крају тражену тачку T добијамо у пресеку правих o и AR. $\square$