НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (Фебруарски рок) - 2. Фебруар 2005.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : Дато је пројективно пресликавање равни које преводи тачке $A_1(1:0:1)$, $A_2(1:0:0)$, $A_3(0:1:0)$ и $B(2:1:1)$ редом у базне тачке и тачку јединице. Нека је Γ парабола из фамилије кривих другог реда $\{x_1^2+4x_2^2+ax_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3=0 : a\in\mathbb{R}\}$. Одредити једначину слике криве Γ при датом пресликавању.

Решење : Пронађимо најпре све параболе из дате фамилије кривих. Знамо да је парабола недегенерисана крива која за тангенту има бесконачно далеку праву. Услов додира са правом $x_3=0$ даје дуплу нулу квадратне једначине $x_1^2+2ax_1x_2+4x_2^2=0$, односно нула дискриминанту, што је еквивалентно услову $a^2=4$. Ово је потребан услов, док би за довољан услов требало проверити детерминанту матрице $G=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&4&2\\1&2&a\end{pmatrix}$ индуковане кривом Γ, односно $\det G=-a^3+8a-8$. У случају $a=2$ је $\det G=0$ те тада имамо две праве које се секу, а не параболу! Остаје још $a=-2$, за шта је $\det G=-16\neq 0$, те имамо тачно једну параболу из дате фамилије $\Gamma: x_1^2+4x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3=0$. Са друге стране можемо потражити матричну везу коју индукује дато пресликавање у директно примењивом облику $\lambda X=AX'$. Директном провером видимо да матрица $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ задовољава одговарајуће везе међу четири пара тачака (у општем положају), те је тиме пресликавање једнозначно одређено. Заменом оригинала сликама у једначину криве или применом формуле $G'=A^TGA$ добијамо

$$G'=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&2\\1&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}$$

Одавде видимо да тражена слика криве Γ има једначину $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : Дате су тачке A, B, C, D и E у равни такве да никоје три нису колинеарне и никоје две праве њима одређене нису паралелне. Перспективно колинеарно пресликавање са фиксним тачкама A, B и E пресликава четвороугао $ABCD$ у трапез који за основицу има слику дужи BC. Конструисати слику четвороугла $ABCD$ при том пресликавању за све могуће случајеве.

Решење: Знамо да су све фиксне тачке перспективно колинеарног пресликавања $'$ тачке са осе и центар. Имамо $A'=A$, $B'=B$, $E'=E$, те разликујемо два суштински различита случаја:
1) E **је центар!** Посматрајмо тачку P дефинисану са $\{P\}:=BC\cap AD$. Из трапеза $ABC'D'$ имамо $BC'\parallel AD'$, те како је $\{P'\}=BC'\cap AD'$ то је P' бесконачно далека тачка. Дакле P припрада противоси, а како је E центар то је P' бесконачно далека праве PE. Сада је лако конструисати. $C'\in EC$ и $D'\in ED$ јер је E центар. Са друге стране C' лежи на правој кроз B паралелној PE (права $BC'P'$), док D' лежи на правој кроз A паралелној PE (права $AD'P'$). Наравно C' добијамо у пресеку EC и праве паралелне PE кроз B, а D' добијамо у пресеку праве ED и праве паралелне PE кроз A.
2) E **није центар!** Центар мора бити тачка A или тачка B. Не умањујући општост можемо претпоставити да је A центар, те онда права BE мора бити оса. A је центар те $D'\in AD$, а како због трапеза мора бити $AD'\parallel BC'$ то C' припада правој паралелној AD кроз B, а наравно C' лежи и на AC, те је конструишемо у њиховом пресеку. Како је BE оса то је $CD\cap C'D'\cap BE\neq\varnothing$, те за $\{M\}:=BE\cap CD$ важи $M\in C'D'$, одакле $\{D'\}:=AD\cap MC'$. $\square$

Друго решење: Први случај можемо решити и другачије. Претпоставка је да је E центар, а AB оса. **Конструкција:** $\{M\}:=AB\cap CD$. N конструишемо у пресеку DC и праве кроз B паралелне AD. C' конструишемо у пресеку EC и праве кроз N паралелне ED. $\{D'\}:=MC'\cap ED$. **Доказ:** $MA:MB=MD:MN$ по Талесовој теореми, јер је $AD\parallel BN$. $MD:MN=MD':MC'$ по Талесовој теореми, јер је $DD'\parallel NC'$. Сада је и $MA:MB=MD':MC'$, одакле по обрнутој Талесовој теореми имамо $AD'\parallel BC'$, те је $ABC'D'$ трапез. $\square$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Методом одстојања представити раван $\tau(t,S',OS_0)$. Одредити пројекцију правог ваљка чија једна основа припада равни τ, средиште те основе је тачка S и траг t је тангента основе, а висина ваљка је једнака пречнику основе.

ЗАДАТАК 4.

Задатак : Методом трагова и недогледа дата је раван $\tau(t,t_\infty^c)$ и права $p\parallel\tau$ која гради угао од 45^o са пројекцијском равни π. Конструисати централну пројекцију коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија основа $ABCD$ припада равни τ, а ивица A_1B_1 правој p.