НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (Јануарски рок) - 12. Јануар 2005.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : Пресликавање f пројективне равни задато је формулама: $\lambda x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$ и $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$. Одредити фиксне тачке и фиксне праве пресликавања f. Наћи нови пројективни систем координата у којем је тачка $(0:0:1)$ бесконачно далека и у чијим је афиним координатама пресликавање f афино. Написати формуле пресликавања f у новим координатама.

Решење :
Матрица пресликавања f је $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Након краћег рачуна добијамо $\chi_M(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. Дакле имамо две сопствене вредности: -1 (двострука нула) и 2. Посматрајући једначине $(M+I)X = 0$ и $(M-2I)X = 0$, односно $(M^T+I)X = 0$ и $(M^T-2I)X = 0$ добијамо фиксне тачке $\{(a : b : -a-b) | a^2+b^2 \neq 0\} \cup \{(-1:1:3)\}$, као и фиксне праве $\{[a+3b : a : b] | a^2+b^2 \neq 0\} \cup \{[1:1:1]\}$. Афино пресликавање има бесконачно далеку праву за фиксну праву, а како желимо да тачка $(0:0:1)$ буде бесконачно далека то она мора бити на оригиналној фиксној правој. Дакле из скупа решења фиксних правих узимамо ону која садржи нашу тачку и то је права $[1:1:0]$. У прве две колоне матрице преласка уписаћемо две тачке са те праве на пример $(0:0:1)$ и $(-1:1:0)$, а у трећу било шта тако да важи $\det C \neq 0$, на пример $(1:0:0)$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = C^{-1}MC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тражене формуле пресликавања f су $\lambda X' = FX$. $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : У еуклидској равни дате су различите праве a и t, као и тачке T и M са праве t. Ако је T теме параболе и ако су a и t њене тангенте, конструисати другу тангенту из тачке M на ту параболу.

Решење: Нека је друга тангента из M (прва је наравно t) тражена права x. Са A_∞ и X_∞ обележимо бесконачно далеке тачке правих a и x. Са U_∞ обележимо додирну тачке тангенте u_∞ (Наравно u_∞ је по дефиницији тангента параболе). U_∞ се може видети и као бесконачно далека тачка осе, а оса је нормална на тангенту t у темену T. Нека је $\{L\} = a \cap t$. Применимо Брианшонову теорему на дегенерисани шестостраник $ttxu_\infty u_\infty a$. Ако је $p = (tt)(u_\infty u_\infty) = TU_\infty$, $q = (tx)(u_\infty a) = MA_\infty$, $r = (xu_\infty)(at) = X_\infty L$, то по теореми имамо конкурентност правих p, q и r. Ако је $\{V\} = p \cap q$, то онда $V \in r$, односно $X_\infty \in VL$. Сада лако можемо исписати конструкцију. $\{L\} := a \cap t$. Тачку V добијамо у пресеку праве кроз T нормалне на t (оса) и праве кроз M паралелне са a. Тражена тангента x ће бити права кроз M паралелна правој VL. $\square$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Методом одстојања дате су права $p = AC(A', A_0, C', C_0)$ паралелна равни π и права $q(Q, M', M_0)$ мимоилазна са правом p. Конструисати пројекцију праве призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, чија је основа паралелограм с дијагоналама AC и $BD \parallel q$. Висина призме једнака је растојању између правих p и q.

ЗАДАТАК 4.

Задатак : Методом трагова и недогледа централног пројектовања дата је права $t(T, T_\infty^c)$. Представити пројекцију праве купе чија основа припада равни α, која гради угао од 45^o с равни π, и права t је тангента основе. Полупречник основе једнак је полупречнику круга одстојања и висина је једнака пречнику основе.