НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (1. Колоквијум) - 26. Децембар 2004.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : Дате су три тачке пројективне праве својом афином координатом $A(0)$, $B(1)$, $C(2)$. Одредити сва параболичка пресликавања пројективне праве која сликају A и B редом у A' и B', таква да важе дворазмере $(ABCA') = 3$ и $(ABA'B') = 16/15$.

Решење : У хомогеном координатном систему дате тачке су $A(0:1)$, $B(1:1)$ и $C(2:1)$.
Из $\overrightarrow{C} = -\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A'} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$ и $(ABCA') = 3$, добијамо $2\alpha = -3\beta$, те $\overrightarrow{A'} = -3\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}$ и $\mathbf{A'(2:-1)}$.
Из $\overrightarrow{A'} = -3\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{B'} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$ и $(ABA'B') = 16/15$, добијамо $5\gamma = -8\delta$, те $\overrightarrow{B'} = -8\overrightarrow{A} + 5\overrightarrow{B}$ и $\mathbf{B'(5:-3)}$
Ако је $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $\lambda X' = MX$, из $A \to A'$ и $B \to B'$ имамо $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$
Одавде добијамо две једначине: $b = -2d$ и $3(a+b)+5(c+d) = 0$. Ово нам даје $5c = d - 3a$. За параболичко пресликавање је $(\mathrm{tr}M)^2 = 4\det M$ што даје једначину $(a+d)^2 = 4(ad-bc)$. Она се горњим сменама своди на $5a^2 + 10ad + 5d^2 = 20ad - 4(-2d)(d-3a)$, што даје квадратну једначину $5a^2 + 14ad - 3d^2 = 0$, са решењима $a = -3d$ и $5a = d$. Дакле тражена пресликавања су дата матрицама $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 5 & -50 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}$. $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : Пресликавање f пројективне равни задато је формулама: $\lambda x_1' = 10x_1 + 6x_2 - 6x_3$, $\lambda x_2' = -3x_1 + x_2 + 3x_3$ и $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + x_3$. Одредити фиксне тачке и фиксне праве пресликавања f. Наћи нови пројективни систем координата у којем је тачка $(0:0:1)$ бесконачно далека и у чијим је афиним координатама пресликавање f афино. Написати формуле пресликавања f у новим координатама.

Решење:
Матрица пресликавања f је $M = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
Након краћег рачуна добијамо $\chi_M(\lambda) = -(\lambda-4)^3$. Дакле једина сопствена вредност је 4 (трострука нула). Посматрајући једначине $(M-4I)X = 0$ и $(M^T - 4I)X = 0$ добијамо фиксне тачке $\{(a:b:a+b) | a^2+b^2 \neq 0\}$, као и фиксне праве $\{[a:b:b-2a] | a^2+b^2 \neq 0\}$. Афино пресликавање има бесконачно далеку праву за фиксну праву, а како желимо да тачка $(0:0:1)$ буде бесконачно далека то она мора бити на оригиналној фиксној правој. Дакле из скупа решења фиксних правих узимамо ону која садржи нашу тачку и то је права $[1:2:0]$. У прве две колоне матрице преласка уписаћемо две тачке са те праве на пример $(2:-1:0)$ и $(0:0:1)$, а у трећу било шта да важи $\det C \neq 0$, на пример $(1:0:0)$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = C^{-1}MC = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \; \square$$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Одредити све обле криве другог реда у равни које садрже тачке $A(2,0)$ и $B(0,1)$ и додирују y-осу и праву $x = 2$. Написати хомогену једначину параболе која припада фамилији претходно нађених решења. Написати једначину слике те параболе при пресликавању задатом формулама: $\lambda x_1' = x_2 + x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = x_1 + x_2$.

Решење: У хомогеним координатама имамо тачке $A(2:0:1)$ и $B(0:1:1)$, као и тангенте криве $a[1:0:-2]$ и $b[1:0:0]$. Очигледно је $A \in a$ и $B \in b$, тако да имамо два односа пол-полара. Ако је G матрица криве то је онда

$$G\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{13} \\ 2a_{12} + a_{23} \\ 2a_{13} + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -2\lambda \end{pmatrix} \text{ и } G\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{22} + a_{23} \\ a_{23} + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Добијамо систем четири једначине: $2(2a_{11} + a_{13}) + 2a_{13} + a_{33} = 0$, $2a_{12} + a_{23} = 0$, $a_{22} + a_{23} = 0$, $a_{23} + a_{33} = 0$. Изразимо a_{22} и a_{23} преко a_{12}, те видимо да за облу криву мора бити $a_{12} \neq 0$, одакле можемо поставити рецимо $a_{12} = 2$, одакле имамо $a_{22} = 4$, $a_{33} = 4$, $a_{23} = -4$, као и везу $a_{11} + a_{13} = -1$.
Једначина криве биће $ax_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2(a-1)x_1x_3 - 8x_2x_3 = 0$, где је реални параметар $a \neq 1$ јер је тад $\det G = 0$. За параболу имамо услов додира са правом $x_3 = 0$, те дискриминанта једначине $ax_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$ мора бити нула, што се дешава за $a = 1$, но тада крива није обла! Дакле тражена парабола не постоји!