НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (Децембарски рок) - 18. Децембар 2004.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : У афиној равни дате су тачке $A_1(2,0)$, $A_2(0,2)$, $A_3(3,1)$ и $B(-1,1)$ које су узете за базне тачке и јединицу новог хомогеног система координата. Ако крива другог реда Γ садржи тачке A_1, A_2, A_3, B и додирује x-осу (у старом афином систему), одредити једначину криве Γ у новом афином систему координата.

Решење :
Веза између старих и нових координата је дата матрицом M са $\lambda X = MX'$.
Старе хомогене координате тачака су $A_1(2:0:1)$, $A_2(0:2:1)$, $A_3(3:1:1)$, $B(-1:1:1)$
Нове хомогене координата тачака су $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $B(1:1:1)$
Везе између старих и нових координата на овим тачкама ће у потпуности одредити матрицу M

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|} & A_1 & & & A_2 & & & A_3 & & & B & \\ m_{11} & = & 2\lambda_1 & m_{12} & = & 0 & m_{13} & = & 3\lambda_3 & m_{11}+m_{12}+m_{13} & = & -\lambda_4 \\ m_{21} & = & 0 & m_{22} & = & 2\lambda_2 & m_{23} & = & \lambda_3 & m_{21}+m_{22}+m_{23} & = & \lambda_4 \\ m_{31} & = & \lambda_1 & m_{32} & = & \lambda_2 & m_{33} & = & \lambda_3 & m_{31}+m_{32}+m_{33} & = & \lambda_4 \end{array}\right.$$

Одавде важи $2\lambda_1 + 3\lambda_3 = -\lambda_4$, $2\lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4$, одакле се добија $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3$, те је

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\text{приде је и } M^{-1} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

Ако U представља праву у старим, а U' у новим координатама, онда важи $0 = \lambda U^T X = U^T M X'$, одакле је $\mu U'^T = U^T M$, односно добро позната веза $\mu U' = M^T U$. Ако за U узмемо x-осу , односно праву $[0:1:0]$ добијамо $U' = M^T U = [0:2:-1]$. Како се тангента пројективним пресликавањем мора сликати на тангенту, то је $[0:2:-1]$ тангента на Γ у новом систему. Једначина криве Γ у новом систему има општи облик

$$a_{11}{x'_1}^2 + a_{22}{x'_2}^2 + a_{33}{x'_3}^2 + 2a_{12}x'_1x'_2 + 2a_{13}x'_1x'_3 + 2a_{23}x'_2x'_3 = 0$$

$A_1(1:0:0) \in \Gamma \Rightarrow a_{11} = 0$, $A_2(0:1:0) \in \Gamma \Rightarrow a_{22} = 0$, $A_3(0:0:1) \in \Gamma \Rightarrow a_{33} = 0$. Како је даље $[0:2:-1]$ тангента у $(1:0:0)$ то је она полара за тачку A_1, што даје

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Дакле имамо $a_{12} = -2a_{13}$. Ако укључимо и $B(1:1:1) \in \Gamma \Rightarrow a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$ имамо и $a_{13} = a_{23}$. Из свега овога имамо тражену једначину криве Γ у новим хомогеним координатама задату са $2x'_1x'_2 - x'_1x'_3 - x'_2x'_3 = 0$, што је у новим афиним координатама једначина $2x'y' - x' - y' = 0$. (Иначе једначина криве у старом систему је $x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3 = 0$) $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : У равни је дата права s и тачке A, B, C и D'. Перспективно афиним пресликавањем са осом s троугао ABC се слика на једнакокраки троугао $A'B'C'$ са основицом $B'C'$, тако да D' лежи на правој $B'C'$. Конструисати троугао $A'B'C'$. Решавати само општи случај!

Решење: Нека је E средиште дужи BC. Афино пресликавање чува односе дељења дужи те се E слика у E', средиште дужи $B'C'$. Како је $|A'B'| = |A'C'|$, то је E' подножје висине троугла $A'B'C'$ из темена A'. У општем случају имаћемо пресеке $\{X\} := BC \cap s$ и $\{Y\} := AE \cap s$, а из особина перспективног пресликавања $X \in B'C'$ и $Y \in A'E'$. Како је $B'C'XE' \perp A'YE'$ и $E' \in B'C'D'X$, то је E' подножје висине из Y на $D'X$. (или $E' \in k(XY) \cap D'X$) мора бити на кругу над пречником XY. Паром (E, E') и осом s афино пресликавање је једнозначно одређено. B', односно C' добијамо на правој $D'X$ у пресеку са правом паралелној зраку афиности EE' кроз B, односно C, док тачку A' можемо добити у пресеку YE' и праве кроз A паралелне са EE'. $\square$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Методом одстојања дата је права $p(P, V', OV_0)$ и раван $\tau(t, M', OM_0)$ која не садржи праву p. Представити пројекцију праве купе чија основа припада равни τ, врх купе је дата тачка V и једна изводница припада правој p. Наћи затим пројекције продорних тачака праве q кроз површ купе, ако права q садржи средиште висине и паралелна је правој p.

ЗАДАТАК 4.

Задатак : Методом трагова и недогледа представити две мимоилазне праве $p(P, P^c_\infty)$ и $q(Q, Q^c_\infty)$. Конструисати пројекцију праве четворостране призме $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ чија је основа паралелограм, ако дијагонале A_1C_1 и B_2D_2 паралелних страна $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ припадају редом правим p и q.