НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (Новембарски рок) - 20. Новембар 2004.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак :
1) Мора ли композиција две инволуције на пројективној правој бити инволуција?
2) Може ли композиција елиптичке и хиперболичке инволуције бити елиптичка инволуција?
3) Може ли композиција елиптичке и хиперболичке инволуције бити хиперболичка инволуција?
Решење :
A је матрица инволуције ако и само ако важи $A^2 = \lambda I$.
За $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, имамо $\lambda I = A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$.
Мора бити $a^2+bc = bc+d^2$, $ab+bd = 0$ и $ac+cd = 0$. Прва једначине $a^2 = d^2$, даје две могућности. Прва је $a = d \neq 0$ одакле је $b = 0$ и $c = 0$, те је A идентичко. Друга могућност $a+d = 0$ (односно $\mathrm{tr}A = 0$) повлачи све три једнакости. Дакле инволуција на пројективној правој је или идентичко или пресликавање са трагом 0.
1) Очигледно важи $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Прве две матрице представљају инволуцију (траг им је нула), но композиција (производ матрица) то очигледно није. Дакле, композиција две инволуције не мора бити инволуција!
2) Шта може бити композиција елиптичке и хиперболичке инволуције? Како идентичко пресликавање није ни једно ни друго то су трагови матрица тих пресликавања једнаки нули. Погледамо ли карактеристични полином матрице имамо $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}A \cdot \lambda + \det A = \lambda^2 + \det A$, одакле се види да је A елиптичко за $\det A > 0$, односно хиперболичко за $\det A < 0$. Нека је E матрица елиптичке, а H матрица хиперболичке инволуције. Њихова композиција има матрицу $E \cdot H$, а како је $\det(E \cdot H) = \det E \cdot \det H$ и $\det E > 0$, $\det H < 0$, то је $\det(E \cdot H) < 0$, те она не може бити елиптичка инволуција, што даје негативан одговор на наше питање!
3) Очигледно важи $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Јасно се види да смо дали један пример где је композиција елиптичке и хиперболичке инволуције, поново хиперболичка инволуција, па је одговор потврдан! □

ЗАДАТАК 2.

Задатак : У равни, је дат четвороугао $ABCD$ који није трапез. Одредити сва перспективно колинеарна пресликавања равни која имају A и B за фиксне тачке, док четвороугао $ABCD$ преводе у паралелограм.

Решење: A и B су фиксне тачке перспективно колинеарног пресликавања $'$ са центром S. Претпоставимо да је $A \neq S \neq B$, тј да ниједна дата фиксна тачка није центар. Како све фиксне тачке чине скуп $s \cup \{S\}$ то би оса s морала бити $s = AB$. Одатле $CD \cap C'D' \cap AB \neq \varnothing$, те како је $AB \parallel C'D'$ (јер је $ABC'D'$ паралелограм), имамо и $AB \parallel CD$, те би $ABCD$ био трапез, што није! Дакле једна дата фиксна тачка мора бити центар. Не умањујући општост претпоставимо да је $S = B$. Како је B центар то $C' \in BC$ и $D' \in BD$, а из паралелограма $ABC'D'$ имамо $BC'C \parallel AD'$, те тачка D' мора бити у пресеку праве BD и праве кроз A паралелне BC. Наравно тачка C' је у пресеку праве BC и праве кроз D' паралелне AB. Тачке A, B, C, D су у општем положају, те је пресликавање задато њиховим сликама A, B, C', D'. Друго решење се добија еквивалентно претходном када узмемо A за центар. □

Друго Решење: Четвороугао је паралелограм ако и само ако му се дијагонале полове. Ако је $\{E\} = AC \cap BD$, мора бити E' средиште и дужи $A'C'$ и дужи $B'D'$. Ово је мотив за увођење тачака M и N тако да важи $\mathcal{H}(AC; EM)$ и $\mathcal{H}(BD; EN)$. Како се $\mathcal{H}$ чува то ће бити $\mathcal{H}(A'C'; E'M')$ и $\mathcal{H}(B'D'; E'N')$, те M' и N' морају бити бесконачно далеке. Дакле MN мора бити противоса. A и B су фиксне те је $A, B \in \{S\} \cup s$. AB не може бити оса јер би било $AB \parallel MN$, те и $AB \parallel CD$ што није! Дакле противоса је MN, центар је A (или B), а оса је права кроз B (или кроз A) паралелна MN. Пресликавање је једнозначно одређено центром, осом и противосом, те задатак има два решења. □

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Методом одстојања дата је раван $\tau(t, S', OS_0)$. Представити пројекцију праве купе чија основа припада равни τ, средиште основе је дата тачка S, а раван π је једна тангентна раван купе. Представити затим и пројекцију пресека купе и равни ρ која садржи праву t и тачку M висине купе SV која дели SV у односу $2:1$.

ЗАДАТАК 4.

Задатак : Методом трагова и недогледа дате су тачке S_1 и S_2 ($S_1^c, S_2^c \in p^c(P, P_\infty^c)$). Конструисати централну пројекцију косе призме $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, чија су средишта основа $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ редом тачке S_1, S_2, основе су квадрати који припадају равнима τ_1, τ_2. Равни τ_1, τ_2 граде угао од 30^o с пројекцијском равни π.