НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (Октобарски рок) - 22. Септембар 2004.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : У пројективној равни дато је пресликавање f формулама: $\lambda x_1' = x_2+x_3$, $\lambda x_2' = x_1+x_3$, $\lambda x_3' = x_1+x_2$. Одредити све фиксне праве пресликавања f. Нека је p фиксна права која садржи тачку $P(0:3:2)$. Тачке A и B су дефинисане са $\{A\} = p \cap \{x_3 = 0\}$ и $\{B\} = p \cap \{x_2 = 0\}$. Одредити тачку X тако да важи хармонијска конјугованост парова A, B и P, X.

Решење :
Ако је F матрица пресликавања f имамо $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Карактеристични полином је $\det(F-\lambda I) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$, што даје сопствене вредности $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$. Сопствени вектори матрице $F^T = F$ одређују фиксне праве, а то су $[1:1:1]$, односно $[a:b:-(a+b)]$, где a и b нису истовремено нуле! Лако је видети да једино права $p[1:2:-3]$ од горњенаведених решења садржи тачку $P(0:3:2)$. Сада је $p \cap \{x_3 = 0\} = \{A(2:-1:0)\}$ и $p \cap \{x_2 = 0\} = \{B(3:0:1)\}$. За $\mathcal{H}(AB;PX)$ потребно је да важи $(ABPX) = -1$. Како је $(0,3,2) = -3(2,-1,0) + 2(3,0,1)$, то ће X бити $(12:-3:2)$ јер је $(12,-3,2) = 3(2,-1,0) + 2(3,0,1)$. $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : Дате су тачке A и B и праве a, b и p. Конструисати центар хиперболе ако је a тангента у A, b тангента у B и p асимптота хиперболе.

Решење : Нека је $\{P_\infty\} := p \cap u_\infty$ и $\{Q_\infty\} = q \cap u_\infty$, где је q друга асимптота. Применимо Паскалову теорему на дегенерисани шестотеменик $AABBP_\infty Q_\infty$. За $a \cap BP_\infty =: \{M\}$, $AB \cap u_\infty =: \{N\}$, $b \cap Q_\infty A = \{L\}$ теорема даје колинеарност M, N, L. Дакле $b \cap Q_\infty A \cap MN = \{L\}$, те $\{L\} := b \cap MN$ и $\{Q_\infty\} := AL \cap u_\infty$ што даје правац асимптоте q. Применимо Паскалову теорему на дегенерисани шестостраник $AAQ_\infty Q_\infty P_\infty B$. За $a \cap u_\infty =: \{U\}$, $AQ_\infty \cap P_\infty B =: \{V\}$, $q \cap BA = \{W\}$ теорема даје колинеарност U, V, W. Биће $q \cap BA \cap UV = \{W\}$, те $\{W\} := BA \cap UV$ и $q := WQ_\infty$, што одређује асимптоту q. На крају центар O добијамо у пресеку асимптота $\{O\} := p \cap q$. **Конструкција:** M је пресек праве a и праве кроз B паралелне p. L је пресек праве b и праве кроз M паралелне AB. V је пресек праве кроз A паралелне AL и праве кроз B паралелне p. W је пресек праве AB и праве кроз V паралелне a. Центар O добијамо у пресеку праве p и праве кроз W паралелне AL. $\square$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Методом две нормалне пројекције дата је раван $\tau(t_1, t_2)$ која је нормална на π_2 и са π_1 гради угао од 60^o. Представити пројекцију праве купе чија је основа у равни τ, док је раван π_1 њена тангентна раван. Представити затим пресек купе и равни која садржи средиште висине купе и праву t_1.

ЗАДАТАК 4.

Задатак : Методом трагова и недогледа дата је тачка $A_1(A_1^c \in q^c(Q, Q_\infty^c))$ и раван $\tau(t, t_\infty^c)$. Конструисати централну пројекцију коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ако страна $ABCD$ припада равни τ и права AB гради угао од 30^o с равни π.