НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (Септембарски рок) - 3. Септембар 2004.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : У пројективној равни дата је крива $\Gamma : 3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$. Одредити тангенте из тачке $A(1:1:1)$ на криву Γ. Да ли је права $x_3 = 0$ тангента на криву Γ?

Решење : Из једначине криве Γ имамо њену матрицу G

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Прво налазимо полару за тачку A у односу на криву Γ по једначини $\lambda U = GA$, одакле добијамо $[1 : -1 : -1]$, тј полару $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Додирне тачке тангенти добијамо у пресеку криве и поларе. Решавањем система једначина добијамо два решења, тачке $M(1:0:1)$ и $N(1:1:0)$. Сада су тражене тангенте праве $AM[1:0:-1]$ и $AN[1:-1:0]$, односно праве $x_1 = x_3$ и $x_1 = x_2$. Да ли је крива $[0:0:1]$ тангента на криву одговорићемо кад јој нађемо пол, тачку $P(x_1 : x_2 : x_3)$. Однос пол-полара даје нам једначину

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

те решавамо систем једначина $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Одавде добијамо тачку $P(1:1:2)$. Провером у једначину криве видимо да $P \notin \Gamma$, те $x_3 = 0$ није тангента на криву! То се лакше може видети ако пресечемо Γ са $x_3 = 0$. Добијамо $3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = (3x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$, што значи да права сече криву у две тачке па не може бити тангента! $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : Дат је четвороугао $ABCD$ и права s у равни. Одредити перспективно афино пресликавање са осом s које дати четвороугао пресликава на правоугаоник са односом страница $2:1$.

Решење : Како афино пресликавање чува паралелност то четвороугао $ABCD$ мора бити паралелограм! Нека је у слици $A'B' : A'D' = 2 : 1$. Нека је E средиште странице AB, F средиште странице DC, а $\{M\} = AF \cap DE$. Слика тачке M биће $\{M'\} = A'F' \cap D'E'$, а како се односи на правој чувају то је $A'E'F'D'$ квадрат са центром M'. Дефинишемо ли $\{X\} = AF \cap s$, $\{Y\} = DE \cap s$, то због $A'F'XM' \perp D'E'YM'$ мора бити M' на кругу над пречником XY. Нека су p и q праве кроз M које су паралелне редом са AEB и AD. Дефинишемо ли $\{U\} = p \cap s$, $\{V\} = q \cap s$ то $U \in p'$, $V \in q'$. Како се паралелност чува афиним пресликавањем $p' \parallel A'E'B' \perp A'D' \parallel q'$ одакле $p' \perp q'$, односно $UM' \perp VM'$, те је M' на кругу над пречником UV. Дакле M' добијамо у пресеку кругова над пречницима XY и UV. Сада је пресликавање одређено осом s и паром одговарајућих тачака M и M'. $\square$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Методом две нормалне пројекције дата је раван $\tau(t_1, t_2)$ која је нормална на π_2 и са π_1 гради угао од 60^o. Представити пројекцију праве купе чија је основа у равни τ, док је раван π_1 њена тангентна раван. Представити затим пресек купе и равни која садржи средиште висине купе и праву t_1.

ЗАДАТАК 4.

Задатак : Методом трагова и недогледа дата је раван $\tau(t, t_\infty^c)$ и тачка $S(S^c)$ на правој $q(Q, Q_\infty^c)$ ван равни τ. Конструисати централну пројекцију правилног октаедра $ABCDEF$ чије је средиште тачка S, страна ABE припада равни τ и ивица AB гради угао од 30^o са равни π.