НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА (Јунски рок) - 9. Јун 2004.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : Нека је f пројективно пресликавање пројективне праве p на себе саму и $A_0 \in p$. Уколико важи $A_{n+1} := f(A_n)$ за $n \geq 0$, и $A_6 = A_0$ одредити дворазмеру $(A_1A_2A_4A_5)$ уколико постоји.

Решење : Уколико дворазмера $(A_1A_2A_4A_5)$ постоји то због инваријантности за пројективно пресликавање постоје и дворазмере $(A_2A_3A_5A_0)$ и $(A_3A_4A_0A_1)$, одакле следи да су тачке A_0, A_1, A_2, A_3 различите. Сада можемо да уведемо хомогене координате на правој p са $A_0 = (1:0)$, $A_1 = (0:1)$, $A_2 = (1:1)$, $A_3 = (a:1)$ и $a \notin \{0,1\}$. Нека је

$$\lambda A_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot A_n$$

За $n=0$ имамо $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, одакле је $x_{11} = 0$.
За $n=1$ имамо $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, одакле је $x_{12} = x_{22}$.
За $n=2$ имамо $\lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & x_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, одакле је $a(x_{21} + x_{12}) = x_{12}$.

Одавде добијамо матрицу пресликавања f у облику $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$, те имамо рачуном и A_4, A_5, A_6:

$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1+a-a^2 \end{pmatrix}$,
$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1+a-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+a-a^2 \\ (1-a)(2-a)+1+a-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+a-a^2 \\ 3-2a \end{pmatrix}$.

Како је $A_6 = A_0$ то мора бити $3 - 2a = 0$, односно $a = \frac{3}{2}$, што даје матрицу пресликавања $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, те је и $A_3(3:2)$, $A_4(2:1)$. Сада је $(A_1A_2A_4A_5) = (A_0A_1A_3A_4) = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$. $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : Нека су Γ_1 и Γ_2 недегенерисане криве другог реда, а A_1, A_2 и Z различите тачке такве да важи $A_1 \in \Gamma_1$, $A_2 \in \Gamma_2$, $Z \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Нека је $p \ni Z$ произвољна права. Нека су M_1 и M_2 тачке такве да $M_i \in \Gamma_i \cap p$ и уколико p није тангента на Γ_i онда $M_i \neq Z$ за $i = 1, 2$. Ако је $\{X\} = A_1M_1 \cap A_2M_2$, доказати да је геометријско место тачака X крива другог реда кад $p \ni Z$. Дати потребан и довољан услов да је та крива дегенерисана.

Решење : Направимо пројективна пресликавања индукована кривим Γ_i. Нека је $f_1 : A_1 \barwedge Z$ индуковано са Γ_1, а $f_2 : Z \barwedge A_2$ индуковано са Γ_2. Дефинишимо $f : A_1 \barwedge A_2$ са $f := f_2 \circ f_1$. Биће $f(A_1M_1) = f_2(f_1(A_1M_1)) = f_2(ZM_1) = f_2(p) = f_2(ZM_2) = A_2M_2$. Како је $\{X\} = A_1M_1 \cap f(A_1M_1)$ то је ГМТ X по дефиницији крива другог реда. Како је $A_1 \neq A_2$ довољно је испитати кад је f перспективно пресликавање. Ово је еквивалентно томе да је $f(A_1A_2) = A_1A_2$, односно $f_1(A_1A_2) = f_2^{-1}(A_2A_1)$. Разликујемо више случајева:

1) A_1A_2 није тангента ни на Γ_1, ни на Γ_2: Тада је $f_1(A_1A_2) = ZT_1$, са $T_1 \in A_1A_2 \cap \Gamma_1$, као и $f_2^{-1}(A_1A_2) = ZT_2$, са $T_2 \in A_1A_2 \cap \Gamma_2$. Када је $ZT_1 = ZT_2$? Не може бити $T_1 \neq T_2$ јер би било $Z \in T_1T_2 = A_1A_2$, те $T_1 = Z = T_2$. Мора бити $T_1 = T_2 = T$. Тада $T \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и A_1, A_2, T су колинеарне. За $T \neq Z$ ствар очигледно важи, док за $T = Z$ дегенерисаност значи да Γ_1 и Γ_2 имају заједничку тангенту у Z.

2) A_1A_2 је тангента на тачно једну од кривих Γ_1, Γ_2: Претпоставимо да је у питању Γ_1, дакле $f_1(A_1A_2) = ZA_1$ и $f_2^{-1}(A_1A_2) = ZT$, са $T \in A_1A_2 \cap \Gamma_2$. Не сме бити $T \neq A_1$ јер би било $Z \in A_1T = A_1A_2$. Мора бити $T = A_1$, односно $A_1 \in \Gamma_2$ и то јесте решење. Симетрично ако је A_1A_2 тангента на Γ_2 мора бити $A_2 \in \Gamma_1$.

3) Случај кад је A_1A_2 тангента на обе криве је неизводљив јер би морало бити $f(A_1A_2) = ZA_1 = ZA_2 = f_2^{-1}(A_1A_2)$, те и $Z \in A_1A_2$, што је немогуће јер би A_1A_2 имала два пресека са Γ_i.

Закључак: крива је дегенерисана акко (Z, A_1, A_2 колинеарне и Γ_1 и Γ_2 имају заједничку тангенту у Z), или (A_1 и A_2 колинеарне са неком тачком из ($\Gamma_1 \cap \Gamma_2$) различитом од Z) или (A_1A_2 је тангента на Γ_1 и $A_1 \in \Gamma_2$) или (A_1A_2 је тангента на Γ_2 и $A_2 \in \Gamma_1$). $\square$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : Методом две нормалне пројекције дате су мимоилазне праве $p(p', p'')$ нормална на π_1 и $q(q', q'')$ паралелна равни π_1. Конструисати пројекције правилног тетраедра $ABCD$, ако странице AB и CD припадају редом правим p и q, а њихова средишта одређују заједничку нормалу правих p и q.

ЗАДАТАК 4.

Задатак : Методом трагова и недогледа централног пројектовања представити паралелне равни α и β, представити затим прав ваљак чије основе припадају равнима α и β чија је висина једнака пречнику основе.