ПРОЈЕКТИВНА ГЕОМЕТРИЈА (2. Колоквијум) - 24. Април 2004.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : Дате су три конкурентне праве p, q, a и тачке A_1, A_2, A_3 на правој a. Ако су f_1, f_2, f_3 перспективна пресликавања праве p на праву q са центрима A_1, A_2, A_3 (тим редом), доказати да важи $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$.

Прво Решење : Потребно је и довољно показати да за произвољно $P \in p$ важи $(f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1)(P) = (f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3)(P)$. Нека је $Q_1 := f_1(P)$, $P_1 := f_2^{-1}(Q_1)$, тј $A_1P \cap A_2P_1 = \{Q_1\}$ и нека је $Q_2 := f_3(P)$, $P_2 := f_2^{-1}(Q_2)$, тј $A_3P \cap A_2P_2 = \{Q_2\}$. Применимо ли Папасову теорему на колинеарне тројке $A_1, A_2, A_3 \in a$ и $P_1, P, P_2 \in p$ добићемо три колинеарне тачке одређене са $A_1P \cap A_2P_1$, $A_3P \cap A_2P_2$ и $A_1P_2 \cap A_3P_1$. Прве две тачке су Q_1 и Q_2 и оне одређују праву q, одакле за $\{Q\} := A_1P_2 \cap A_3P_1$ важи $Q \in q$, односно $A_1P_2 \cap A_3P_1 \cap q = \{Q\}$. Како је сада $A_1P_2 \cap q = \{f_1(P_2)\}$ и $A_3P_1 \cap q = \{f_3(P_1)\}$ то мора бити $f_1(P_2) = Q = f_3(P_1)$, односно $f_1(f_2^{-1}(f_3(P))) = f_3(f_2^{-1}(f_1(P)))$, што доказује тврђење. $\square$

Друго Решење : Пројективна пресликавања $f_1 \circ f_2^{-1}$ и $f_3 \circ f_2^{-1}$ праве q на саму себе су параболичка јер је тачка $\{S\} := a \cap q \cap p$ једина фиксна тачка. Познато је да параболичка пресликавања на правој са истом фиксном тачком комутирају, те је $(f_1 \circ f_2^{-1}) \circ (f_3 \circ f_2^{-1}) = (f_3 \circ f_2^{-1}) \circ (f_1 \circ f_2^{-1})$. Множењем здесна са f_2 добијамо тражену једнакост. $\square$

ЗАДАТАК 2.

Задатак : У еуклидској равни дат је четвороугао $ABCD$ и права s. Нека је f перспективно колинеарно пресликавање са осом s које дати четвороугао преводи у делтоид. Конструисати противосу пресликавања f, а затим и геометријско место тачака могућих центара тог пресликавања.

Решење : Нека је $\{E\} := AC \cap BD$. За $f =' $ имаћемо $\{E'\} = A'C' \cap B'D'$. Четвороугао $A'B'C'D'$ је делтоид акко $A'E'C' \perp B'E'D'$ и $|A'E'| = |C'E'|$. Ако је $U \in AEC$ таква да $\mathcal{H}(AC; EU)$ биће $\mathcal{H}(A'C'; E'U')$. Како је E' средиште дужи $A'C'$ то је U' бесконачно далека, те тачка U припада противоси u. Знамо да је $u \parallel s$, те u конструишемо као праву кроз U паралелну са s. Сада разликујемо случајеве:

1) $AC \nparallel s$ и $BD \nparallel s$: Нека је $\{X\} := AC \cap s$ и $\{Y\} := BD \cap s$. Како је $A'C'XE' \perp B'D'YE'$ то се E' налази на кругу над пречником XY, тј $E' \in k(XY)$. За центар S мора бити $\{S\} = EE' \cap UU'$. U' је бесконачно далека праве $A'C'XE'$, те је $SUU' \parallel A'C'XE'$. Примена Талесове теореме даје нам сличне троуглове: $\triangle\, SUE \sim \triangle\, E'XE$, односно $XE' : US = XE : UE = h$. Нека је O средиште дужи XY и $\{T\} := OE \cap u$, тада због $s \parallel u$ имамо $\triangle\, TUE \sim \triangle\, OXE$, те $XO : UT = XE : UE = h$. Како је $XE' : US = h = XO : UT$ и $\angle SUT = \angle E'XO$ (као углови са паралелним крацима), то важи $\triangle UST \sim \triangle XE'O$, те и $TS : OE' = h$. Одавде се види да је растојање TS фиксно. Дакле геометријско место тачака могућих центара пресликавања f је круг са центром у T и полупречником TU.

2) $AC \nparallel s$ и $BD \parallel s$: Нека је $\{X\} := AC \cap s$, тада $X \in A'E'C'$. $BD \parallel s$ повлачи $B'E'D' \parallel s$, те због $A'E' \perp B'E'$ имамо $A'E'X \perp s$. Дакле E' се налази на правој кроз X нормалој на s. U' је бесконачно далека праве $A'C'E'X$, те је UU' права кроз U паралелна $E'X$, односно нормална на s. Како центар $S \in UU'$ то је геометријско место тачака могућих центара права кроз U нормална на s.

3) $AC \parallel s$: Како је $U \in AC$ и $AC \parallel s$, то је $AC = u \parallel s$. Ово даље значи да су A' и C' бесконачно далеке што је немогуће јер онда нема делтоида. Дакле $AC \parallel s$ није могућа опција. $\square$

ЗАДАТАК 3.

Задатак : У еуклидској равни дате су тачке A и O, као и праве a и p. Ако је A додирна тачка тангенте a на хиперболу, O центар те хиперболе, а p једна њена асимптота, одредити другу њену асимптоту.

Прво Решење : Како је O центар хиперболе, то је хипербола централно симетрична у односу на O, те како је A на хиперболи то је на њој и $B \neq A$, таква да је $B \in AO \cap k(O, OA)$. Нека је $\{P_\infty\} := p \cap u_\infty$ и $\{Q_\infty\} := q \cap u_\infty$, где је q друга асимптота. Тачке A, B, P_∞, Q_∞ припадају хиперболи, те примењујемо Паскалову теорему на дегенерисани шестотеменик $P_\infty P_\infty Q_\infty AAB$. За $\{M\} := p \cap a$, $\{N\} := u_\infty \cap ABO$, $\{L\} = Q_\infty A \cap BP_\infty$ су по теореми M, N, L колинеарне. Дакле $Q_\infty A \cap BP_\infty \cap MN = \{L\}$, те $\{L\} := BP_\infty \cap MN$. Сада је $Q_\infty \in AL$, те $Q_\infty := AL \cap u_\infty$ и $q := OQ_\infty$. Конструкција: $A \neq B \in AO \cap k(O, OA)$. M је пресек p и a. L је пресек праве кроз B паралелне p и праве кроз M паралелне AO. Тражена асимптота q је права кроз O паралелна AL. $\square$

Друго Решење : Нека је $\{P_\infty\} := p \cap u_\infty$ и $\{Q_\infty\} := q \cap u_\infty$, где је q друга асимптота. Нека је још $\{P\} := a \cap p$, $\{Q\} = a \cap q$, и $\{S\} = P_\infty Q \cap Q_\infty P$. Посматрамо ли четвороугао $PSQO$, можемо приметити да важи $PSQ_\infty \parallel OQQ_\infty$ и $QSP_\infty \parallel OPP_\infty$, те је он паралелограм. Применимо ли Брианшонову теорему на дегенерисани шестостраник $ppqqaa$ добићемо $P_\infty Q \cap Q_\infty P \cap OA \neq \varnothing$, односно $S \in OA$. Сада је због $\{A\} = PQ \cap OS$ тачка A пресек дијагонала паралелограма $PSQO$, те их као таква полови. Дакле $Q \in a$ и $|PA| = |QA|$, што нам омогућава да дефинишемо $P \neq Q \in a \cap k(A, AP)$. На крају је наравно $q := OQ$. $\square$