ПРОЈЕКТИВНА ГЕОМЕТРИЈА (1. Колоквијум) - 16. Децембар 2003.
Задаци и решења - Владица Андрејић

ЗАДАТАК 1.

Задатак : Нека су A_1, A_2, A_3 и A_4 различите тачке пројективне праве. Израчунати
1) $\prod_{\sigma \in S_4}(A_{\sigma 1}A_{\sigma 2}A_{\sigma 3}A_{\sigma 4}) = (A_1A_2A_3A_4)\cdot(A_1A_2A_4A_3)\cdot(A_1A_3A_2A_4)\cdot ... \cdot(A_4A_3A_2A_1)$;
2) $\sum_{\sigma \in S_4}(A_{\sigma 1}A_{\sigma 2}A_{\sigma 3}A_{\sigma 4}) = (A_1A_2A_3A_4)+(A_1A_2A_4A_3)+(A_1A_3A_2A_4)+ ... +(A_4A_3A_2A_1)$.
(У питању су производ, односно сума дворазмера по свим пермутацијама тачака A_1, A_2, A_3, A_4)

Решење : Нека су A, B, C, D различите тачке пројективне праве.
1) Из добро познате једнакости $(ABCD)\cdot(ABDC) = 1$ видимо да свака пермутација има свог пара, па ће, како постоји 24 пермутација, бити $\prod_{\sigma \in S_4}(A_{\sigma 1}A_{\sigma 2}A_{\sigma 3}A_{\sigma 4}) = 1^{12} = 1$.
2) За $\vec{C} = \alpha\vec{A}+\beta\vec{B}$ и $\vec{D} = \gamma\vec{A}+\delta\vec{B}$ имаћемо $\beta\vec{B} = \vec{C}-\alpha\vec{A}$ и $\beta\vec{D} = \beta\gamma\vec{A}+\delta(\vec{C}-\alpha\vec{A}) = (\beta\gamma-\alpha\delta)\vec{A}+\delta\vec{C}$. Сада је $(ABCD)+(ACBD) = (\frac{\beta}{\alpha}:\frac{\delta}{\gamma})+(\frac{1}{-\alpha}:\frac{\delta}{\beta\gamma-\alpha\delta}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}+\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha\delta} = 1$. Закључак је да $(ABCD)+(ACBD) = 1$ важи увек, те као под 1) увиђамо пар свакој пермутацији одакле је $\sum_{\sigma \in S_4}(A_{\sigma 1}A_{\sigma 2}A_{\sigma 3}A_{\sigma 4}) = 1 + ... + 1 = 12$. □

ЗАДАТАК 2.

Задатак : Пројективно пресликавање је задато формулама $\lambda x_1' = 5x_1 - 3x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = -3x_1 + 5x_2 + x_3$, $\lambda x_3' = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3$. Одредити све фиксне праве датог пресликавања, а затим наћи нови пројективни координатни систем у чијим је афиним координатама дато пресликавање афино и исписати формуле пресликавања у новим координатама.

ЗАДАТАК 3.

Задатак : У пројективној равни задата је крива $\Gamma : x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ и тачка $A(1:2:1)$. Одредити тангенте из тачке A на криву Γ. Нека су T_1 и T_2 додирне тачке тангенти из A на криву Γ. Одредити још неку криву другог реда која садржи тачке T_1 и T_2 и има за тангенте праве AT_1 и AT_2.

Решење :
Матрица криве Γ је $G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Полара је $GA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Видимо да је једначина поларе $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Сада T_1 и T_2 добијамо у пресеку поларе и криве. На пример можемо заменити $2x_1 = x_2 + 2x_3$ у једначину криве и добити $-2x_2x_3 = 0$, што даје $x_2 = 0$ или $x_3 = 0$. Одавде имамо решења $T_1(1:0:1)$ и $T_2(1:2:0)$. Тражене тангенте биће $AT_1 = [1:0:-1]$ и $AT_2 = [2:-1:0]$.
За други део задатка користимо односе пол полара, те ће за матрицу тражене криве морати да буде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{13} \\ a_{12}+a_{23} \\ a_{13}+a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+2a_{12} \\ a_{12}+2a_{22} \\ a_{13}+2a_{23} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ово нам даје четири једначине: $a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 0$, $a_{12} + a_{23} = 0$ из прве везе и $a_{11} + 4a_{12} + 4a_{22} = 0$, $a_{13} + a_{23} = 0$ из друге везе. Можемо ставити рецимо $a_{12} = 0$. Биће $a_{23} = 0$, те $a_{13} = 0$, $a_{33} = -a_{11}$, $4a_{22} = -a_{11}$. Ставимо ли $a_{22} = 1$ биће $a_{11} = -4$ и $a_{33} = 4$. Ово нам даје једну од кривих које задовољавају тражени услов: $-4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 = 0$. □