Пројективна геометрија

Аутор: Владица Андрејић

Збирка задатака базираних на вежбама држаних сезоне 2004/05

27. март 2005.

1 Аналитички приступ

1.1 Основна теорема, дворазмера

Задатак 1.1 Тачке 0, ∞ и 1 афиног система координата узете су редом за базне тачке $A_1(1:0)$, $A_2(0:1)$ и јединицу $B(1:1)$ новог хомогеног система координата. Наћи везу између афине координате и нових хомогених координата.

Задатак 1.2 Тачке $A_1(2:1)$, $A_2(3:1)$ и $B(4:1)$ дате координатама $(x_1:x_2)$ одабране су редом за базне тачке и тачку јединице новог система хомогених координата $(x'_1:x'_2)$. Одредити везу између старог и новог система координата.

Задатак 1.3 Дате су тачке $A(0:1)$, $B(1:0)$, $C(1:1)$, $D(3:2)$. Одредити дворазмеру $(ABCD)$.

Задатак 1.4 На афиној правој уведене су хомогене координате. Одредити афини смисао дворазмере $(ABCD)$ тачака $A(x_1) = A(x_1:1)$, $B(x_2)$, $C(x_3)$, $D(x_4)$.

Задатак 1.5 Одредити тачку X тако да је $\mathcal{H}(AX;BC)$ и $A(1:0)$, $B(2:1)$, $C(4:1)$

1.2 Пројективна пресликавања пројективне праве

Задатак 1.6 Наћи формуле пројективног пресликавања које преводи тачке $A(0:1)$, $B(1:0)$, $C(1:1)$ у тачке $A'(1:-1)$, $B'(1:1)$, $C'(1:3)$.

Задатак 1.7 Наћи фиксне тачке пресликавања $\lambda x'_1 = 2x_1 - x_2$, $\lambda x'_2 = x_1 + 4x_2$.

Задатак 1.8 Наћи афини запис претходног (задатак 1.7) пресликавања.

Задатак 1.9 Наћи запис претходног (задатак 1.7) пресликавања у некој новој бази у којем је фиксна тачка бесконачно далека.

Задатак 1.10 Наћи фиксне тачке пресликавања $\lambda x'_1 = 2x_1 + 3x_2$, $\lambda x'_2 = 3x_1 + 2x_2$.

Задатак 1.11 Наћи нови пројективни координатни систем у чијим је афиним координатама претходно (задатак 1.10) пресликавање хомотетија.

Задатак 1.12 Одредити потребне и довољне услове да пројективно пресликавање праве буде елиптичко, параболичко, односно хиперболичко.

Задатак 1.13 Доказати да постоји јединствено параболичко пресликавање f коме је дата тачка A фиксна, а при коме је $fM = M' \neq M$. Нека је $M'' = fM'$, доказати да важи $\mathcal{H}(M''M;M'A)$.

Задатак 1.14 (Аксиома раздвојености парова тачака) Доказати да за различите тачке A, B, C, D пројективне праве важи тачно једно од тврђења $AB \div CD$, $AC \div BD$, $AD \div BC$.

Задатак 1.15 Доказати да је пресликавање пројективне праве које тачке A, B, C пресликава редом у B, C, A елиптичко.

Задатак 1.16 Доказати да елиптичко и параболичко пресликавање чувају оријентацију.

Задатак 1.17 Ако је пресликавање пројективне праве инволутивно на једном пару тачака, онда је оно инволуција.

Задатак 1.18 Испитати раздвојеност парова тачака AA' и BB', ако су A, A' и B, B' одговарајуће тачке хиперболичке, односно елиптичке инволуције.

Задатак 1.19 Инволуција на пројективној правој задата је са два пара тачака $A(1:2)$, $A'(1:0)$ и $B(2:3)$, $B'(8:1)$. Наћи формуле инволуције, њене фиксне тачке и одредити да ли она чува оријентацију.

Задатак 1.20 У афиној равни дате су праве $a: y=0$, $b: y=x$ и тачка $S(1,2)$. На правој a уведен је нови координатни систем $(x_1 : x_2)$ чије базне тачке имају афине координате $A_1(0,0)$, $A_2(2,0)$, а тачка јединице $B(3,0)$, а на правој b систем $(x_1' : x_2')$ чије базне тачке и јединица имају афине координате $C_1(1,1)$, $C_2(0,0)$ и $D(2,2)$. У датим хомогеним координатама одредити формуле перспективне трансфомације праве a на праву b са центром S.

1.3 Пројективна раван

Задатак 1.21 Одредити праву кроз тачке $A(2:5:2)$ и $B(8:-1:1)$.

Задатак 1.22 Доказати да $C(-2:16:5)$ припада правој AB из претходног задатка (задатак 1.21), а затим наћи тачку D тако да је $\mathcal{H}(AB;CD)$

Задатак 1.23 У односу на пројективни систем координата дате су координате нових базних тачака $A_1(4:1:1)$, $A_2(4:4:1)$, $A_3(0:4:1)$, $B(2:1:1)$. Наћи формуле трансформација координата из старих у нове.

Задатак 1.24 Наћи фиксне тачке и фиксне праве пресликавања $\lambda x_1' = 4x_1 - x_2$, $\lambda x_2' = 6x_1 - 3x_2$, $\lambda x_3' = x_1 - x_2 - x_3$.

Задатак 1.25 Пресликавање је задато формулама $\lambda x_1' = x_2 + x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = x_1 + x_2$. Доказати да је оно хиперболичка хомологија. Одредити центар и осу, а затим изабрати координатни систем у чијим је афиним координатама то пресликавање хомотетија.

Задатак 1.26 Наћи формуле пројективне трансформације равни $\alpha : z = 0$ у тродимензионом афином простору која је композиција пројекције из тачке $S_1(0,0,-1)$ на раван $\beta : x + y + z = 1$ и пројекције из тачке $S_2(6,-3,2)$ назад на раван α. Доказати да је у питању параболичка хомологија.

Задатак 1.27 Наћи пројективно пресликавање проширене афине равни које праве $a : x = 0$, $b : y = 0$, $c : y = 1 - x$ пресликава редом на b, c, a и које тежиште троугла коме странице припадају тим правама пресликава у пресек правих $x - y = 0$ и $x - y = 2$. Која права се пресликава у бесконачно далеку? Шта је слика круга описаног око тог троугла?

1.4 Криве другог реда

Задатак 1.28 Доказати да тачке конјуговане тачки A у односу на криву другог реда Γ леже на полари.

Задатак 1.29 Дата је крива $\Gamma : x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$. На правој $p : 2x_1 - x_2 - 9x_3 = 0$ наћи тачку X хармонијски конјуговану тачки $A(-1:2:1)$ у односу на криву Γ.

Задатак 1.30 Дата је крива $\Gamma : 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$. 1) Наћи једначину поларе тачке $A(1:0:1)$; 2) Наћи, ако постоје, тангенте из A на криву Γ; 3) Наћи пол праве $q : x_3 = 0$.

Задатак 1.31 Наћи једначину криве другог реда која додирује осу Ox у тачки $(3,0)$, осу Oy у тачки $(0,2)$ и додирује бесконачно далеку праву.

Задатак 1.32 У афиној равни дат је круг $x^2 + y^2 = 1$. Наћи му једначину у систему координата чије су базне тачке и јединица $A_1(1,0)$; $A_2(0,1)$; $A_3(-1,0)$ и $B(0,-1)$. Коју криву он представља у новом афином систему координата?

Задатак 1.33 Доказати да ако темена четворотеменика $ABCD$ припадају кривој другог реда тада полара његове дијагоналне тачке (у односу на ту криву) садржи преостале две дијагоналне тачке.

Задатак 1.34 Дате су тачке афине равни $A(0,0)$; $B(1,0)$; $C(1,1)$ и $D(0,1)$. У хомогеним координатама одредити формуле трансформације f при којој су тачке A и C фиксне, док се тачке B и D пресликавају редом у бесконачно далеке тачке правих AB и AD. Одредити слике унутрашњости квадрата $ABCD$, као и круга $k(C, CB)$ при трансформацији f. Која је афина једначина криве $f(k)$?

Задатак 1.35 (Колоквијум 16.12.2003) У пројективној равни задата је крива $\Gamma : x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ и тачка $A(1:2:1)$. Одредити тангенте из тачке A на криву Γ. Нека су T_1 и T_2 додирне тачке тангенти из A на криву Γ. Одредити још неку криву другог реда која садржи тачке T_1 и T_2 и има за тангенте праве AT_1 и AT_2.

1.5 Задаци са рокова

Задатак 1.36 (Колоквијум 16.12.2003) Нека су A_1, A_2, A_3 и A_4 различите тачке пројективне праве. Израчунати
1) $\prod_{\sigma\in S_4}(A_{\sigma 1}A_{\sigma 2}A_{\sigma 3}A_{\sigma 4}) = (A_1A_2A_3A_4)\cdot(A_1A_2A_4A_3)\cdot(A_1A_3A_2A_4)\cdot\ldots\cdot(A_4A_3A_2A_1)$;
2) $\sum_{\sigma\in S_4}(A_{\sigma 1}A_{\sigma 2}A_{\sigma 3}A_{\sigma 4}) = (A_1A_2A_3A_4)+(A_1A_2A_4A_3)+(A_1A_3A_2A_4)+\ldots+(A_4A_3A_2A_1)$.
(У питању су производ, односно сума дворазмера по свим пермутацијама тачака A_1, A_2, A_3, A_4)

Задатак 1.37 (Колоквијум 16.12.2003) Пројективно пресликавање је задато формулама $\lambda x_1' = 5x_1 - 3x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = -3x_1 + 5x_2 + x_3$, $\lambda x_3' = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3$. Одредити све фиксне праве датог пресликавања, а затим наћи нови пројективни координатни систем у чијим је афиним координатама дато пресликавање афино и исписати формуле пресликавања у новим координатама.

Задатак 1.38 (Јун 09.06.2004) Нека је f пројективно пресликавање пројективне праве p на себе саму и $A_0 \in p$. Уколико важи $A_{n+1} := f(A_n)$ за $n \geq 0$, и $A_6 = A_0$ одредити дворазмеру $(A_1A_2A_4A_5)$ уколико постоји.

Задатак 1.39 (Септембар 03.09.2004) У пројективној равни дата је крива $\Gamma : 3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$. Одредити тангенте из тачке $A(1:1:1)$ на криву Γ. Да ли је права $x_3 = 0$ тангента на криву Γ?

Задатак 1.40 (Октобар 22.09.2004) У пројективној равни дато је пресликавање f формулама: $\lambda x_1' = x_2 + x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = x_1 + x_2$. Одредити све фиксне праве пресликавања f. Нека је p фиксна права која садржи тачку $P(0:3:2)$. Тачке A и B су дефинисане са $\{A\} = p \cap \{x_3 = 0\}$ и $\{B\} = p \cap \{x_2 = 0\}$. Одредити тачку X тако да важи хармонијска конјугованост парова A, B и P, X.

Задатак 1.41 (Новембар 20.11.2004)
1) Мора ли композиција две инволуције на пројективној правој бити инволуција?
2) Може ли композиција елиптичке и хиперболичке инволуције бити елиптичка инволуција?
3) Може ли композиција елиптичке и хиперболичке инволуције бити хиперболичка инволуција?

Задатак 1.42 (Колоквијум 26.12.2004) Дате су три тачке пројективне праве својом афином координатом $A(0)$, $B(1)$, $C(2)$. Одредити сва параболичка пресликавања пројективне праве која сликају A и B редом у A' и B', таква да важе дворазмере $(ABCA') = 3$ и $(ABA'B') = 16/15$.

Задатак 1.43 (Колоквијум 26.12.2004) Пресликавање f пројективне равни задато је формулама: $\lambda x_1' = 10x_1 + 6x_2 - 6x_3$, $\lambda x_2' = -3x_1 + x_2 + 3x_3$ и $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + x_3$. Одредити фиксне тачке и фиксне праве пресликавања f. Наћи нови пројективни систем координата у којем је тачка $(0:0:1)$ бесконачно далека и у чијим је афиним координатама пресликавање f афино. Написати формуле пресликавања f у новим координатама.

Задатак 1.44 (Колоквијум 26.12.2004) Одредити све обле криве другог реда у равни које садрже тачке $A(2,0)$ и $B(0,1)$ и додирују y-осу и праву $x = 2$. Написати хомогену једначину параболе која припада фамилији претходно нађених решења. Написати једначину слике те параболе при пресликавању задатом формулама: $\lambda x_1' = x_2 + x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = x_1 + x_2$.

Задатак 1.45 (Децембар 18.12.2004) У афиној равни дате су тачке $A_1(2,0)$, $A_2(0,2)$, $A_3(3,1)$ и $B(-1,1)$ које су узете за базне тачке и јединицу новог хомогеног система координата. Ако крива другог реда Γ садржи тачке A_1, A_2, A_3, B и додирује x-осу (у старом афином систему), одредити једначину криве Γ у новом афином систему координата.

Задатак 1.46 (Јануар 12.01.2005) Пресликавање f пројективне равни задато је формулама: $\lambda x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$ и $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$. Одредити фиксне тачке и фиксне праве пресликавања f. Наћи нови пројективни систем координата у којем је тачка $(0:0:1)$ бесконачно далека и у чијим је афиним координатама пресликавање f афино. Написати формуле пресликавања f у новим координатама.

Задатак 1.47 (Фебруар 02.02.2005) Дато је пројективно пресликавање равни које преводи тачке $A_1(1:0:1)$, $A_2(1:0:0)$, $A_3(0:1:0)$ и $B(2:1:1)$ редом у базне тачке и тачку јединице. Нека је Γ парабола из фамилије кривих другог реда $\{x_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0 : a \in \mathbb{R}\}$. Одредити једначину слике криве Γ при датом пресликавању.

Задатак 1.48 (Март 19.03.2005) На правој $y = 0$ уведен је координатни систем чије базне тачке и јединица имају афине координате $A_1(1,0)$, $A_2(0,0)$ и $B(2,0)$. На правој $y = x$ уведен је координатни систем чије базне тачке и јединица имају афине координате $C_1(0,0)$, $C_2(1,1)$ и $D(2,2)$. У датим хомогеним координатама одредити формуле перспективног пресликавања са центром у $S(0,2)$ које пресликава праву $y = 0$ на праву $y = x$.

2 Синтетички приступ

2.1 Пројективна пресликавања једнодимензионих многострукости

Задатак 2.1 Доказати да је пројективно пресликавање перспективно акко се заједнички елемент једнодимензионих многострукости слика у себе.

Задатак 2.2 Дате су различите тачке A,B,C на правој p и различите тачке A',B',C' на правој p'. Одредити слику произвољне тачке $D \in p$ при пројективном пресликавању које пресликава A, B, C редом у A', B', C'. Дискутовати и случај $p = p'$.

Задатак 2.3 (Папасова теорема) Ако је $A, B, C \in p$, $A', B', C' \in p'$ и $p \neq p'$ онда су колинеарне тачке у пресецима $AB' \cap BA'$, $AC' \cap CA'$, $BC' \cap CB'$.

Задатак 2.4 Нека је $f : p \,\overline{\wedge}\, p$ и $f(M) = M$. Доказати да је f параболичко акко за сваку тачку $A \in p \setminus \{M\}$ важи $\mathcal{H}(M, f(A); A, f(f(A)))$.

Задатак 2.5 Доказати да параболичка пројективна пресликавања на правој p која фиксирају тачку M међусобно комутирају.

Задатак 2.6 (Колоквијум 24.04.2004) Дате су три конкурентне праве p, q, a и тачке A_1, A_2, A_3 на правој a. Ако су f_1, f_2, f_3 перспективна пресликавања праве p на праву q са центрима A_1, A_2, A_3 (тим редом), доказати да важи $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$.

2.2 Пројективна пресликавања дводимензионих многострукости

Задатак 2.7 Доказати да су оса, противоса и противоса инверзног пресликавања паралелне.

Задатак 2.8 Доказати да је перспективно колинеарно пресликавање одређено центром, осом и 1) тачком и њеном сликом; 2) правом и њеном сликом; 3) противосом.

Задатак 2.9 Дата је тачка S, права s и четвороугао $ABCD$. Одредити перспективно колинеарно пресликавање са осом s и центром S које дати четвороугао пресликава у четвороугао коме су дијагонале нормалне.

Задатак 2.10 (Новембар 20.11.2004) У равни, је дат четвороугао $ABCD$ који није трапез. Одредити сва перспективно колинеарна пресликавања равни која имају A и B за фиксне тачке, док четвороугао $ABCD$ преводе у паралелограм.

Задатак 2.11 (Фебруар 02.02.2005) Дате су тачке A, B, C, D и E у равни такве да никоје три нису колинеарне и никоје две праве њима одређене нису паралелне. Перспективно колинеарно пресликавање са фиксним тачкама A, B и E пресликава четвороугао $ABCD$ у трапез који за основицу има слику дужи BC. Конструисати слику четвороугла $ABCD$ при том пресликавању за све могуће случајеве.

2.3 Перспективно афина пресликавања

Задатак 2.12 Дате су праве p, s и дужAB. Одредити перспективно афино пресликавање чија је оса s, зраци афиности су паралелни са p, а слика дужи AB има дату дужину d.

Задатак 2.13 (Децембар 18.02.2004) У равни је дата права s и тачке A, B, C и D'. Перспективно афиним пресликавањем са осом s троугао ABC се слика на једнакокраки троугао $A'B'C'$ са основицом $B'C'$, тако да D' лежи на правој $B'C'$. Конструисати троугао $A'B'C'$. Решавати само општи случај!

Задатак 2.14 Дата је права s и четвороугао $ABCD$. Одредити перспективно афино пресликавање које има осу s и које дати четвороугао пресликава у квадрат.

Задатак 2.15 (Збирка 57.) Дате су тачке A, B, C, D и права s. Одредити перспективно афино пресликавање са осом s која троугао ABC слика у троугао $A'B'C'$ са правим углом код темена C', тако да се D налази на правој $A'B'$.

2.4 Дезаргова теорема

Задатак 2.16 Дате су неколинеарне тачке A, B и C и права p тако да $C \in p$. Нека су P и Q произвољне тачке праве p и нека је $AP \cap BC = \{M\}$, $AQ \cap BC = \{N\}$, $BP \cap AC = \{U\}$, $BQ \cap AC = \{V\}$. Доказати да су праве AB, MU, NV конкурентне.

Задатак 2.17 У произвољан четвороугао уписан је трапез чије су основе паралелне једној дијагонали четвороугла. Доказати да се бочне стране трапеза секу на другој дијагонали четвороугла.

Задатак 2.18 У равни су дате конкурентне праве a, b, c и три тачке P, Q, R које им не припадају. Одредити тачке $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ такве да важи $P \in BC$, $Q \in AC$, $R \in AB$.

Задатак 2.19 Три тротеменика имају заједнички центар перспективе. Доказати да су одговарајуће три осе перспективе конкурентне праве.

Задатак 2.20 Дата је тачка A и праве p и q које се секу "ван папира" у тачки B. Конструисати праву AB.

2.5 Криве другог реда

Задатак 2.21 Кроз тачку D странице BC тротеменика ABC пролази права p која сече странице AB и AC редом у тачкама P и Q. Праве CP и BQ секу се у тачки X. Шта је геометријско место тачака X када $p \ni D$?

Задатак 2.22 На недегенерисаној кривој другог реда Γ дате су различите тачке A, B и C. Нека је a тангента на Γ у тачки A и $D \neq A$ произвољна тачка праве a. Ако је $X \in \Gamma$, $\{Y\} = BX \cap AC$, $\{M\} = AX \cap DY$ доказати да је геометријско место тачака M крива другог реда када X пролази криву Γ и испитати дегенерисаност.

Задатак 2.23 (Јун 09.06.2004) Нека су Γ_1 и Γ_2 недегенерисане криве другог реда, а A_1, A_2 и Z различите тачке такве да важи $A_1 \in \Gamma_1$, $A_2 \in \Gamma_2$, $Z \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Нека је $p \ni Z$ произвољна права. Нека су M_1 и M_2 тачке такве да $M_i \in \Gamma_i \cap p$ и уколико p није тангента на Γ_i онда $M_i \neq Z$ за $i = 1, 2$. Ако је $\{X\} = A_1M_1 \cap A_2M_2$, доказати да је геометријско место тачака X крива другог реда кад $p \ni Z$. Дати потребан и довољан услов да је та крива дегенерисана.

Задатак 2.24 Дате су тачке A, B, C, D, E недегенерисане криве другог реда Γ и права $p \ni A$. Конструисати другу пресечну тачку праве p и криве Γ.

Задатак 2.25 Дате су тачке A, B, C, D и тангента $a \ni A$ недегенерисане криве другог реда Γ. Конструисати тангенту на Γ у тачки C.

Задатак 2.26 Дате су тангенте a, b, c и додирне тачке $A \in a$, $B \in b$ криве другог реда Γ. За дату тачку $R \in c$ одредити другу пресечну тачку праве AR и криве Γ.

Задатак 2.27 Дате су тачке A, B, C и правац o' осе параболе, као и права $p \ni A$. Конструисати другу пресечну тачку праве p и параболе.

Задатак 2.28 (Октобар 22.09.2004) Дате су тачке A и B и праве a, b и p. Конструисати центар хиперболе ако је a тангента у A, b тангента у B и p асимптота хиперболе.

Задатак 2.29 (Јануар 12.01.2005) У еуклидској равни дате су различите праве a и t, као и тачке T и M са праве t. Ако је T теме параболе и ако су a и t њене тангенте, конструисати другу тангенту из тачке M на ту параболу.

Задатак 2.30 (Колоквијум 24.04.2004) У еуклидској равни дате су тачке A и O, као и праве a и p. Ако је A додирна тачка тангенте a на хиперболу, O центар те хиперболе, а p једна њена асимптота, одредити другу њену асимптоту.

2.6 Задаци са рокова

Задатак 2.31 (Колоквијум 24.04.2004) У еуклидској равни дат је четвороугао $ABCD$ и права s. Нека је f перспективно колинеарно пресликавање са осом s које дати четвороугао преводи у делтоид. Конструисати противосу пресликавања f, а затим и геометријско место тачака могућих центара тог пресликавања.

Задатак 2.32 (Септембар 03.09.2004) Дат је четвороугао $ABCD$ и права s у равни. Одредити перспективно афино пресликавање са осом s које дати четвороугао пресликава на правоугаоник са односом страница $2:1$.

Задатак 2.33 (Март 19.03.2005) У произвољан четвороугао уписан је трапез. Ако се бочне ивице трапеза секу на једној дијагонали датог четвороугла, доказати да су онда основице трапеза паралелне другој дијагонали.

3 Решења аналитичких задатака

Решење 1.35

Матрица криве Γ је $G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Полара је $GA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Видимо да је једначина поларе $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Сада T_1 и T_2 добијамо у пресеку поларе и криве. На пример можемо заменити $2x_1 = x_2 + 2x_3$ у једначину криве и добити $-2x_2x_3 = 0$, што даје $x_2 = 0$ или $x_3 = 0$. Одавде имамо решења $T_1(1:0:1)$ и $T_2(1:2:0)$. Тражене тангенте биће $AT_1 = [1:0:-1]$ и $AT_2 = [2:-1:0]$.
За други део задатка користимо односе пол полара, те ће за матрицу тражене криве морати да буде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{13} \\ a_{12}+a_{23} \\ a_{13}+a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+2a_{12} \\ a_{12}+2a_{22} \\ a_{13}+2a_{23} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ово нам даје четири једначине: $a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 0$, $a_{12} + a_{23} = 0$ из прве везе и $a_{11} + 4a_{12} + 4a_{22} = 0$, $a_{13} + a_{23} = 0$ из друге везе. Можемо ставити рецимо $a_{12} = 0$. Биће $a_{23} = 0$, те $a_{13} = 0$, $a_{33} = -a_{11}$, $4a_{22} = -a_{11}$. Ставимо ли $a_{22} = 1$ биће $a_{11} = -4$ и $a_{33} = 4$. Ово нам даје једну од кривих које задовољавају тражени услов: $-4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 = 0$. □

Решење 1.36 Нека су A, B, C, D различите тачке пројективне праве.
1) Из добро познате једнакости $(ABCD) \cdot (ABDC) = 1$ видимо да свака пермутација има свог пара, па ће, како постоји 24 пермутација, бити $\prod_{\sigma \in S_4} (A_{\sigma 1} A_{\sigma 2} A_{\sigma 3} A_{\sigma 4}) = 1^{12} = 1$.
2) За $\overrightarrow{C} = \alpha \overrightarrow{A} + \beta \overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{D} = \gamma \overrightarrow{A} + \delta \overrightarrow{B}$ имаћемо $\beta \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C} - \alpha \overrightarrow{A}$ и $\beta \overrightarrow{D} = \beta\gamma \overrightarrow{A} + \delta(\overrightarrow{C} - \alpha \overrightarrow{A}) = (\beta\gamma - \alpha\delta)\overrightarrow{A} + \delta \overrightarrow{C}$.
Сада је $(ABCD) + (ACBD) = (\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}) + (\frac{1}{-\alpha} : \frac{\delta}{\beta\gamma - \alpha\delta}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\delta} = 1$. Закључак је да $(ABCD) + (ACBD) = 1$ важи увек, те као под 1) увиђамо пар свакој пермутацији одакле је $\sum_{\sigma \in S_4} (A_{\sigma 1} A_{\sigma 2} A_{\sigma 3} A_{\sigma 4}) = 1 + ... + 1 = 12$.
□

Решење 1.38 Уколико дворазмера $(A_1A_2A_4A_5)$ постоји то због инваријантности за пројективно пресликавање постоје и дворазмере $(A_2A_3A_5A_0)$ и $(A_3A_4A_0A_1)$, одакле следи да су тачке A_0, A_1, A_2, A_3 различите. Сада можемо да уведемо хомогене координате на правој p са $A_0 = (1:0)$, $A_1 = (0:1)$, $A_2 = (1:1)$, $A_3 = (a:1)$ и $a \notin \{0, 1\}$. Нека је

$$\lambda A_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot A_n$$

За $n = 0$ имамо $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, одакле је $x_{11} = 0$.
За $n = 1$ имамо $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, одакле је $x_{12} = x_{22}$.
За $n = 2$ имамо $\lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & x_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, одакле је $a(x_{21} + x_{12}) = x_{12}$.
Одавде добијамо матрицу пресликавања f у облику $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$, те имамо рачуном и A_4, A_5, A_6:
$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2a - a^2 \\ 1 + a - a^2 \end{pmatrix}$,
$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a - a^2 \\ 1 + a - a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 + a - a^2 \\ (1-a)(2-a) + 1 + a - a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 + a - a^2 \\ 3 - 2a \end{pmatrix}$.
Како је $A_6 = A_0$ то мора бити $3 - 2a = 0$, односно $a = \frac{3}{2}$, што даје матрицу пресликавања $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, те је и $A_3(3:2)$, $A_4(2:1)$. Сада је $(A_1A_2A_4A_5) = (A_0A_1A_3A_4) = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$. □

Решење 1.39 Из једначине криве Γ имамо њену матрицу G

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Прво налазимо полару за тачку A у односу на криву Γ по једначини $\lambda U = GA$, одакле добијамо $[1:-1:-1]$, тј полару $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Додирне тачке тангенти добијамо у пресеку криве и поларе. Решавањем система једначина добијамо два решења, тачке $M(1:0:1)$ и $N(1:1:0)$. Сада су тражене тангенте праве

$AM[1:0:-1]$ и $AN[1:-1:0]$, односно праве $x_1 = x_3$ и $x_1 = x_2$. Да ли је крива $[0:0:1]$ тангента на криву одговорићемо кад јој нађемо пол, тачку $P(x_1:x_2:x_3)$. Однос пол-полара даје нам једначину

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

те решавамо систем једначина $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Одавде добијамо тачку $P(1:1:2)$. Провером у једначину криве видимо да $P \notin \Gamma$, те $x_3 = 0$ није тангента на криву! То се лакше може видети ако пресечемо Γ са $x_3 = 0$. Добијамо $3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = (3x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$, што значи да права сече криву у две тачке па не може бити тангента! $\square$

Решење 1.40

Ако је F матрица пресликавања f имамо $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Карактеристични полином је $\det(F - \lambda I) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$, што даје сопствене вредности $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$. Сопствени вектори матрице $F^T = F$ одређују фиксне праве, а то су $[1:1:1]$, односно $[a:b:-(a+b)]$, где a и b нису истовремено нуле! Лако је видети да једино права $p[1:2:-3]$ од горњенаведених решења садржи тачку $P(0:3:2)$. Сада је $p \cap \{x_3 = 0\} = \{A(2:-1:0)\}$ и $p \cap \{x_2 = 0\} = \{B(3:0:1)\}$. За $\mathcal{H}(AB;PX)$ потребно је да важи $(ABPX) = -1$. Како је $(0,3,2) = -3(2,-1,0) + 2(3,0,1)$, то ће X бити $(12:-3:2)$ јер је $(12,-3,2) = 3(2,-1,0) + 2(3,0,1)$. $\square$

Решење 1.41

A је матрица инволуције ако и само ако важи $A^2 = \lambda I$.
За $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, имамо $\lambda I = A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$.
Мора бити $a^2+bc = bc+d^2$, $ab+bd = 0$ и $ac+cd = 0$. Прва једначине $a^2 = d^2$, даје две могућности. Прва је $a = d \neq 0$ одакле је $b = 0$ и $c = 0$, те је A идентичко. Друга могућност $a + d = 0$ (односно $\mathrm{tr}A = 0$) повлачи све три једнакости. Дакле инволуција на пројективној правој је или идентичко или пресликавање са трагом 0.

1) Очигледно важи $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Прве две матрице представљају инволуцију (траг им је нула), но композиција (производ матрица) то очигледно није. Дакле, композиција две инволуције не мора бити инволуција!

2) Шта може бити композиција елиптичке и хиперболичке инволуције? Како идентичко пресликавање није ни једно ни друго то су трагови матрица тих пресликавања једнаки нули. Погледамо ли карактеристични полином матрице имамо $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}A \cdot \lambda + \det A = \lambda^2 + \det A$, одакле се види да је A елиптичко за $\det A > 0$, односно хиперболичко за $\det A < 0$. Нека је E матрица елиптичке, а H матрица хиперболичке инволуције. Њихова композиција има матрицу $E \cdot H$, а како је $\det(E \cdot H) = \det E \cdot \det H$ и $\det E > 0$, $\det H < 0$, то је $\det(E \cdot H) < 0$, те она не може бити елиптичка инволуција, што даје негативан одговор на наше питање!

3) Очигледно важи $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Јасно се види да смо дали један пример где је композиција елиптичке и хиперболичке инволуције, поново хиперболичка инволуција, па је одговор потврдан! $\square$

Решење 1.42 У хомогеном координатном систему дате тачке су $A(0:1)$, $B(1:1)$ и $C(2:1)$.
Из $\overrightarrow{C} = -\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A'} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$ и $(ABCA') = 3$, добијамо $2\alpha = -3\beta$, те $\overrightarrow{A'} = -3\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}$ и $\mathbf{A}'(\mathbf{2}:\mathbf{-1})$.
Из $\overrightarrow{A'} = -3\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{B'} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$ и $(ABA'B') = 16/15$, добијамо $5\gamma = -8\delta$, те $\overrightarrow{B'} = -8\overrightarrow{A} + 5\overrightarrow{B}$ и $\mathbf{B}'(\mathbf{5}:\mathbf{-3})$
Ако је $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $\lambda X' = MX$, из $A \to A'$ и $B \to B'$ имамо $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$
Одавде добијамо две једначине: $b = -2d$ и $3(a+b)+5(c+d) = 0$. Ово нам даје $5c = d - 3a$. За параболичко пресликавање је $(\mathrm{tr}M)^2 = 4\det M$ што даје једначину $(a+d)^2 = 4(ad-bc)$. Она се горњим сменама своди на $5a^2+10ad+5d^2 = 20ad - 4(-2d)(d-3a)$, што даје квадратну једначину $5a^2+14ad-3d^2 = 0$, са решењима $a = -3d$ и $5a = d$. Дакле тражена пресликавања су дата матрицама $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 5 & -50 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}$. $\square$

Решење 1.43

Матрица пресликавања f је $M = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Након краћег рачуна добијамо $\chi_M(\lambda) = -(\lambda-4)^3$. Дакле једина сопствена вредност је 4 (трострука нула). Посматрајући једначине $(M-4I)X = 0$ и $(M^T-4I)X = 0$ добијамо фиксне тачке $\{(a : b : a+b) | a^2+b^2 \neq 0\}$, као и фиксне праве $\{[a : b : b-2a] | a^2+b^2 \neq 0\}$. Афино пресликавање има бесконачно далеку праву за фиксну праву, а како желимо да тачка $(0 : 0 : 1)$ буде бесконачно далека то она мора бити на оригиналној фиксној правој. Дакле из скупа решења фиксних правих узимамо ону која садржи нашу тачку и то је права $[1 : 2 : 0]$. У прве две колоне матрице преласка уписаћемо две тачке са те праве на пример $(2 : -1 : 0)$ и $(0 : 0 : 1)$, а у трећу било шта да важи $\det C \neq 0$, на пример $(1 : 0 : 0)$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = C^{-1}MC = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \square$$

Решење 1.44 У хомогеним координатама имамо тачке $A(2 : 0 : 1)$ и $B(0 : 1 : 1)$, као и тангенте криве $a[1 : 0 : -2]$ и $b[1 : 0 : 0]$. Очигледно је $A \in a$ и $B \in b$, тако да имамо два односа пол-полара. Ако је G матрица криве то је онда

$$G \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11}+a_{13} \\ 2a_{12}+a_{23} \\ 2a_{13}+a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -2\lambda \end{pmatrix} \text{ и } G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}+a_{13} \\ a_{22}+a_{23} \\ a_{23}+a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Добијамо систем четири једначине: $2(2a_{11}+a_{13}) + 2a_{13} + a_{33} = 0$, $2a_{12}+a_{23} = 0$, $a_{22}+a_{23} = 0$, $a_{23}+a_{33} = 0$. Изразимо a_{22} и a_{23} преко a_{12}, те видимо да за облу криву мора бити $a_{12} \neq 0$, одакле можемо поставити рецимо $a_{12} = 2$, одакле имамо $a_{22} = 4$, $a_{33} = 4$, $a_{23} = -4$, као и везу $a_{11}+a_{13} = -1$.
Једначина криве биће $ax_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2(a-1)x_1x_3 - 8x_2x_3 = 0$, где је реални параметар $a \neq 1$ јер је тад $\det G = 0$. За параболу имамо услов додира са правом $x_3 = 0$, те дискриминанта једначине $ax_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$ мора бити нула, што се дешава за $a = 1$, но тада крива није обла! Дакле тражена парабола не постоји! $\square$

Решење 1.45
Веза између старих и нових координата је дата матрицом M са $\lambda X = MX'$.
Старе хомогене координате тачака су $A_1(2 : 0 : 1)$, $A_2(0 : 2 : 1)$, $A_3(3 : 1 : 1)$, $B(-1 : 1 : 1)$
Нове хомогене координата тачака су $A_1(1 : 0 : 0)$, $A_2(0 : 1 : 0)$, $A_3(0 : 0 : 1)$, $B(1 : 1 : 1)$
Везе између старих и нових координата на овим тачкама ће у потпуности одредити матрицу M

A_1	A_2	A_3	B
$m_{11} = 2\lambda_1$	$m_{12} = 0$	$m_{13} = 3\lambda_3$	$m_{11}+m_{12}+m_{13} = -\lambda_4$
$m_{21} = 0$	$m_{22} = 2\lambda_2$	$m_{23} = \lambda_3$	$m_{21}+m_{22}+m_{23} = \lambda_4$
$m_{31} = \lambda_1$	$m_{32} = \lambda_2$	$m_{33} = \lambda_3$	$m_{31}+m_{32}+m_{33} = \lambda_4$

Одавде важи $2\lambda_1 + 3\lambda_3 = -\lambda_4$, $2\lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4$, одакле се добија $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3$, те је

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\text{приде је и } M^{-1} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

Ако U представља праву у старим, а U' у новим координатама, онда важи $0 = \lambda U^T X = U^T MX'$, одакле је $\mu U'^T = U^T M$, односно добро позната веза $\mu U' = M^T U$. Ако за U узмемо x-осу , односно праву $[0 : 1 : 0]$ добијамо $U' = M^T U = [0 : 2 : -1]$. Како се тангента пројективним пресликавањем мора сликати на тангенту, то је $[0 : 2 : -1]$ тангента на Γ у новом систему. Једначина криве Γ у новом систему има општи облик

$$a_{11}{x_1'}^2 + a_{22}{x_2'}^2 + a_{33}{x_3'}^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + 2a_{13}x_1'x_3' + 2a_{23}x_2'x_3' = 0$$

$A_1(1 : 0 : 0) \in \Gamma \Rightarrow a_{11} = 0$, $A_2(0 : 1 : 0) \in \Gamma \Rightarrow a_{22} = 0$, $A_3(0 : 0 : 1) \in \Gamma \Rightarrow a_{33} = 0$. Како је даље $[0 : 2 : -1]$ тангента у $(1 : 0 : 0)$ то је она полара за тачку A_1, што даје

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Дакле имамо $a_{12} = -2a_{13}$. Ако укључимо и $B(1:1:1) \in \Gamma \Rightarrow a_{12}+a_{13}+a_{23} = 0$ имамо и $a_{13} = a_{23}$. Из свега овога имамо тражену једначину криве Γ у новим хомогеним координатама задату са $2x_1'x_2' - x_1'x_3' - x_2'x_3' = 0$, што је у новим афиним координатама једначина $2x'y' - x' - y' = 0$. (Иначе једначина криве у старом систему је $x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3 = 0$) $\Box$

Решење 1.46

Матрица пресликавања f је $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Након краћег рачуна добијамо $\chi_M(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. Дакле имамо две сопствене вредности: -1 (двострука нула) и 2. Посматрајући једначине $(M+I)X = 0$ и $(M-2I)X = 0$, односно $(M^T+I)X = 0$ и $(M^T-2I)X = 0$ добијамо фиксне тачке $\{(a:b:-a-b)|a^2+b^2 \neq 0\} \cup \{(-1:1:3)\}$, као и фиксне праве $\{[a+3b:a:b]|a^2+b^2 \neq 0\} \cup \{[1:1:1]\}$. Афино пресликавање има бесконачно далеку праву за фиксну праву, а како желимо да тачка $(0:0:1)$ буде бесконачно далека то она мора бити на оригиналној фиксној правој. Дакле из скупа решења фиксних правих узимамо ону која садржи нашу тачку и то је права $[1:1:0]$. У прве две колоне матрице преласка уписаћемо две тачке са те праве на пример $(0:0:1)$ и $(-1:1:0)$, а у трећу било шта тако да важи $\det C \neq 0$, на пример $(1:0:0)$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = C^{-1}MC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тражене формуле пресликавања f су $\lambda X' = FX$. $\Box$

Решење 1.47 Пронађимо најпре све параболе из дате фамилије кривих. Знамо да је парабола недегенерисана крива која за тангенту има бесконачно далеку праву. Услов додира са правом $x_3 = 0$ даје дуплу нулу квадратне једначине $x_1^2 + 2ax_1x_2 + 4x_2^2 = 0$, односно нула дискриминанту, што је еквивалентно услову $a^2 = 4$. Ово је потребан услов, док би за довољан услов требало проверити детерминанту матрице $G = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 4 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ индуковане кривом Γ, односно $\det G = -a^3 + 8a - 8$. У случају $a = 2$ је $\det G = 0$ те тада имамо две праве које се секу, а не параболу! Остаје још $a = -2$, за шта је $\det G = -16 \neq 0$, те имамо тачно једну параболу из дате фамилије $\Gamma : x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$. Са друге стране можемо потражити матричну везу коју индукује дато пресликавање у директно примењивом облику $\lambda X = AX'$. Директном провером видимо да матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ задовољава одговарајуће везе међу четири пара тачака (у општем положају), те је тиме пресликавање једнозначно одређено. Заменом оригинала сликама у једначину криве или применом формуле $G' = A^TGA$ добијамо

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Одавде видимо да тражена слика криве Γ има једначину $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ $\Box$

Решење 1.48 Тражено перспективно пресликавање f одређено је са три пара тачака. Са слике видимо да је $f(A_2) = C_1$, $f(B) = C_2$ и $f(X) = D$, где је X бесконачно далека тачка праве $y = 0$. Потребно је наћи координате тачке X. У ту сврху потражимо везу између стандардних афиних и наших координата са праве $y = 0$. Ту афиним координатама $(1:1)$, $(0:1)$, $(2:1)$ одговарају базне тачке тј $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$. Ово даје везу

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

. Како X као бесконачно далека има стандардне афине координате $(1:0)$ то множењем горњом матрицом добијамо да су њене координате $X(1:2)$. Координате осталих тачака знамо као базне из услова задатка. Дакле имамо $A_2(0:1)$, $B(1:1)$, $X(1:2)$ које се сликају у $C_1(1:0)$, $C_2(0:1)$, $D(1:1)$, што даје тражене формуле трансформације:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Box$$

.

Друго решење 1.48 Може се посматрати рецимо тачка $Y(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ и искористити веза да тачке A_1, A_2, B иду у тачке Y, C_1, C_2. Једино су непознате координате тачке Y но она има стандардне афине координате $(2 : 3)$ на правој $y = x$, док базне тачке и јединица имају $(0 : 1)$, $(1 : 1)$ и $(2 : 1)$. Као и у првом решењу срачунају се координате за Y и на крају матрица пресликавања. $\square$

4 Решења синтетичких задатака

Решење 2.6 Потребно је и довољно показати да за произвољно $P \in p$ важи $(f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1)(P) = (f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3)(P)$. Нека је $Q_1 := f_1(P)$, $P_1 := f_2^{-1}(Q_1)$, тј $A_1P \cap A_2P_1 = \{Q_1\}$ и нека је $Q_2 := f_3(P)$, $P_2 := f_2^{-1}(Q_2)$, тј $A_3P \cap A_2P_2 = \{Q_2\}$. Применимо ли Папасову теорему на колинеарне тројке $A_1, A_2, A_3 \in a$ и $P_1, P, P_2 \in p$ добићемо три колинеарне тачке одређене са $A_1P \cap A_2P_1$, $A_3P \cap A_2P_2$ и $A_1P_2 \cap A_3P_1$. Прве две тачке су Q_1 и Q_2 и оне одређују праву q, одакле за $\{Q\} := A_1P_2 \cap A_3P_1$ важи $Q \in q$, односно $A_1P_2 \cap A_3P_1 \cap q = \{Q\}$. Како је сада $A_1P_2 \cap q = \{f_1(P_2)\}$ и $A_3P_1 \cap q = \{f_3(P_1)\}$ то мора бити $f_1(P_2) = Q = f_3(P_1)$, односно $f_1(f_2^{-1}(f_3(P))) = f_3(f_2^{-1}(f_1(P)))$, што доказује тврђење. □

Друго решење 2.6 Пројективна пресликавања $f_1 \circ f_2^{-1}$ и $f_3 \circ f_2^{-1}$ праве q на саму себе су параболичка јер је тачка $\{S\} := a \cap q \cap p$ једина фиксна тачка. Познато је да параболичка пресликавања на правој са истом фиксном тачком комутирају (задатак 2.5), те је $(f_1 \circ f_2^{-1}) \circ (f_3 \circ f_2^{-1}) = (f_3 \circ f_2^{-1}) \circ (f_1 \circ f_2^{-1})$. Множењем здесна са f_2 добијамо тражену једнакост. □

Решење 2.10 A и B су фиксне тачке перспективно колинеарног пресликавања $'$ са центром S. Претпоставимо да је $A \neq S \neq B$, тј да ниједна дата фиксна тачка није центар. Како све фиксне тачке чине скуп $s \cup \{S\}$ то би оса s морала бити $s = AB$. Одатле $CD \cap C'D' \cap AB \neq \varnothing$, те како је $AB \parallel C'D'$ (јер је $ABC'D'$ паралелограм), имамо и $AB \parallel CD$, те би $ABCD$ био трапез, што није! Дакле једна дата фиксна тачка мора бити центар. Не умањујући општост претпоставимо да је $S = B$. Како је B центар то $C' \in BC$ и $D' \in BD$, а из паралелограма $ABC'D'$ имамо $BC'C \parallel AD'$, те тачка D' мора бити у пресеку праве BD и праве кроз A паралелне BC. Наравно тачка C' је у пресеку праве BC и праве кроз D' паралелне AB. Тачке A, B, C, D су у општем положају, те је пресликавање задато њиховим сликама A, B, C', D'. Друго решење се добија еквивалентно претходном када узмемо A за центар. □

Друго решење 2.10 Четвороугао је паралелограм ако и само ако му се дијагонале полове. Ако је $\{E\} = AC \cap BD$, мора бити E' средиште и дужи $A'C'$ и дужи $B'D'$. Ово је мотив за увођење тачака M и N тако да важи $\mathcal{H}(AC; EM)$ и $\mathcal{H}(BD; EN)$. Како се $\mathcal{H}$ чува то ће бити $\mathcal{H}(A'C'; E'M')$ и $\mathcal{H}(B'D'; E'N')$, те M' и N' морају бити бесконачно далеке. Дакле MN мора бити противоса. A и B су фиксне те је $A, B \in \{S\} \cup s$. AB не може бити оса јер би било $AB \parallel MN$, те и $AB \parallel CD$ што није! Дакле противоса је MN, центар је A (или B), а оса је права кроз B (или кроз A) паралелна MN. Пресликавање је једнозначно одређено центром, осом и противосом, те задатак има два решења. □

Решење 2.11 Знамо да су све фиксне тачке перспективно колинеарног пресликавања $'$ тачке са осе и центар. Имамо $A' = A$, $B' = B$, $E' = E$, те разликујемо два суштински различита случаја:
1) E **је центар!** Посматрајмо тачку P дефинисану са $\{P\} := BC \cap AD$. Из трапеза $ABC'D'$ имамо $BC' \parallel AD'$, те како је $\{P'\} = BC' \cap AD'$ то је P' бесконачно далека тачка. Дакле P припрада противоси, а како је E центар то је P' бесконачно далека праве PE. Сада је лако конструисати. $C' \in EC$ и $D' \in ED$ јер је E центар. Са друге стране C' лежи на правој кроз B паралелној PE (права $BC'P'$), док D' лежи на правој кроз A паралелној PE (права $AD'P'$). Наравно C' добијамо у пресеку EC и праве паралелне PE кроз B, а D' добијамо у пресеку праве ED и праве паралелне PE кроз A.
2) E **није центар!** Центар мора бити тачка A или тачка B. Не умањујући општост можемо претпоставити да је A центар, те онда права BE мора бити оса. A је центар те $D' \in AD$, а како због трапеза мора бити $AD' \parallel BC'$ то C' припада правој паралелној AD кроз B, а наравно C' лежи и на AC, те је конструишемо у њиховом пресеку. Како је BE оса то је $CD \cap C'D' \cap BE \neq \varnothing$, те за $\{M\} := BE \cap CD$ важи $M \in C'D'$, одакле $\{D'\} := AD \cap MC'$. □

Друго решење 2.11 Први случај можемо решити и другачије. Претпоставка је да је E центар, а AB оса. **Конструкција:** $\{M\} := AB \cap CD$. N конструишемо у пресеку DC и праве кроз B паралелне AD. C' конструишемо у пресеку EC и праве кроз N паралелне ED. $\{D'\} := MC' \cap ED$. **Доказ:** $MA : MB = MD : MN$ по Талесовој теореми, јер је $AD \parallel BN$. $MD : MN = MD' : MC'$ по Талесовој теореми, јер је $DD' \parallel NC'$. Сада је и $MA : MB = MD' : MC'$, одакле по обрнутој Талесовој теореми имамо $AD' \parallel BC'$, те је $ABC'D'$ трапез. □

Решење 2.13 Нека је E средиште дужи BC. Афино пресликавање чува односе дељења дужи те се E слика у E', средиште дужи $B'C'$. Како је $|A'B'| = |A'C'|$, то је E' подножје висине троугла $A'B'C'$ из темена A'. У општем случају имаћемо пресеке $\{X\} := BC \cap s$ и $\{Y\} := AE \cap s$, а из особина перспективног пресликавања $X \in B'C'$ и $Y \in A'E'$. Како је $B'C'XE' \perp A'YE'$ и $E' \in B'C'D'X$, то је E' подножје висине из Y на $D'X$. (или $E' \in k(XY) \cap D'X$) мора бити на кругу над пречником XY. Паром (E, E') и осом s афино пресликавање је једнозначно одређено. B', односно C' добијамо на правој $D'X$ у пресеку са правом паралелној зраку афиности EE' кроз B, односно C, док тачку A' можемо добити у пресеку YE' и праве кроз A паралелне са EE'. □

Решење 2.23 Направимо пројективна пресликавања индукована кривим Γ_i. Нека је $f_1 : A_1 \barwedge Z$ индуковано са Γ_1, а $f_2 : Z \barwedge A_2$ индуковано са Γ_2. Дефинишимо $f : A_1 \barwedge A_2$ са $f := f_2 \circ f_1$. Биће $f(A_1M_1) = f_2(f_1(A_1M_1)) = f_2(ZM_1) = f_2(p) = f_2(ZM_2) = A_2M_2$. Како је $\{X\} = A_1M_1 \cap f(A_1M_1)$ то је ГМТ X по дефиницији крива другог реда. Како је $A_1 \neq A_2$ довољно је испитати кад је f перспективно пресликавање. Ово је еквивалентно томе да је $f(A_1A_2) = A_1A_2$, односно $f_1(A_1A_2) = f_2^{-1}(A_2A_1)$. Разликујемо више случајева:

1) A_1A_2 није тангента ни на Γ_1, ни на Γ_2: Тада је $f_1(A_1A_2) = ZT_1$, са $T_1 \in A_1A_2 \cap \Gamma_1$, као и $f_2^{-1}(A_1A_2) = ZT_2$, са $T_2 \in A_1A_2 \cap \Gamma_2$. Када је $ZT_1 = ZT_2$? Не може бити $T_1 \neq T_2$ јер би било $Z \in T_1T_2 = A_1A_2$, те $T_1 = Z = T_2$. Мора бити $T_1 = T_2 = T$. Тада $T \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и A_1, A_2, T су колинеарне. За $T \neq Z$ ствар очигледно важи, док за $T = Z$ дегенерисаност значи да Γ_1 и Γ_2 имају заједничку тангенту у Z.

2) A_1A_2 је тангента на тачно једну од кривих Γ_1, Γ_2: Претпоставимо да је у питању Γ_1, дакле $f_1(A_1A_2) = ZA_1$ и $f_2^{-1}(A_1A_2) = ZT$, са $T \in A_1A_2 \cap \Gamma_2$. Не сме бити $T \neq A_1$ јер би било $Z \in A_1T = A_1A_2$. Мора бити $T = A_1$, односно $A_1 \in \Gamma_2$ и то јесте решење. Симетрично ако је A_1A_2 тангента на Γ_2 мора бити $A_2 \in \Gamma_1$.

3) Случај кад је A_1A_2 тангента на обе криве је неизводљив јер би морало бити $f(A_1A_2) = ZA_1 = ZA_2 = f_2^{-1}(A_1A_2)$, те и $Z \in A_1A_2$, што је немогуће јер би A_1A_2 имала два пресека са Γ_i.

Закључак: крива је дегенерисана акко (Z, A_1, A_2 колинеарне и Γ_1 и Γ_2 имају заједничку тангенту у Z), или (A_1 и A_2 колинеарне са неком тачком из $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ различитом од Z) или (A_1A_2 је тангента на Γ_1 и $A_1 \in \Gamma_2$) или (A_1A_2 је тангента на Γ_2 и $A_2 \in \Gamma_1$). $\Box$

Решење 2.28 Нека је $\{P_\infty\} := p \cap u_\infty$ и $\{Q_\infty\} = q \cap u_\infty$, где је q друга асимптота. Применимо Паскалову теорему на дегенерисани шестотеменик $AABBP_\infty Q_\infty$. За $a \cap BP_\infty =: \{M\}$, $AB \cap u_\infty =: \{N\}$, $b \cap Q_\infty A = \{L\}$ теорема даје колинеарност M, N, L. Дакле $b \cap Q_\infty A \cap MN = \{L\}$, те $\{L\} := b \cap MN$ и $\{Q_\infty\} := AL \cap u_\infty$ што даје правац асимптоте q. Применимо Паскалову теорему на дегенерисани шестостраник $AAQ_\infty Q_\infty P_\infty B$. За $a \cap u_\infty =: \{U\}$, $AQ_\infty \cap P_\infty B =: \{V\}$, $q \cap BA = \{W\}$ теорема даје колинеарност U, V, W. Биће $q \cap BA \cap UV = \{W\}$, те $\{W\} := BA \cap UV$ и $q := WQ_\infty$, што одређује асимптоту q. На крају центар O добијамо у пресеку асимптота $\{O\} := p \cap q$. **Конструкција:** M је пресек праве a и праве кроз B паралелне p. L је пресек праве b и праве кроз M паралелне AB. V је пресек праве кроз A паралелне AL и праве кроз B паралелне p. W је пресек праве AB и праве кроз V паралелне a. Центар O добијамо у пресеку праве p и праве кроз W паралелне AL. $\Box$

Решење 2.29 Нека је друга тангента из M (прва је наравно t) тражена права x. Са A_∞ и X_∞ обележимо бесконачно далеке тачке правих a и x. Са U_∞ обележимо додирну тачке тангенте u_∞ (Наравно u_∞ је по дефиницији тангента параболе). U_∞ се може видети и као бесконачно далека тачка осе, а оса је нормална на тангенту t у темену T. Нека је $\{L\} = a \cap t$. Применимо Брианшонову теорему на дегенерисани шестостраник $ttxu_\infty u_\infty a$. Ако је $p = (tt)(u_\infty u_\infty) = TU_\infty$, $q = (tx)(u_\infty a) = MA_\infty$, $r = (xu_\infty)(at) = X_\infty L$, то по теореми имамо конкурентност правих p, q и r. Ако је $\{V\} = p \cap q$, то онда $V \in r$, односно $X_\infty \in VL$. Сада лако можемо исписати конструкцију. $\{L\} := a \cap t$. Тачку V добијамо у пресеку праве кроз T нормалне на t (оса) и праве кроз M паралелне са a. Тражена тангента x ће бити права кроз M паралелна правој VL. $\Box$

Решење 2.30 Како је O центар хиперболе, то је хипербола централно симетрична у односу на O, те како је A на хиперболи то је на њој и $B \neq A$, таква да је $B \in AO \cap k(O, OA)$. Нека је $\{P_\infty\} := p \cap u_\infty$ и $\{Q_\infty\} := q \cap u_\infty$, где је q друга асимптота. Тачке A, B, P_∞, Q_∞ припадају хиперболи, те примењујемо Паскалову теорему на дегенерисани шестотеменик $P_\infty P_\infty Q_\infty AAB$. За $\{M\} := p \cap a$, $\{N\} := u_\infty \cap ABO$, $\{L\} = Q_\infty A \cap BP_\infty$ су по теореми M, N, L колинеарне. Дакле $Q_\infty A \cap BP_\infty \cap MN = \{L\}$, те $\{L\} := BP_\infty \cap MN$. Сада је $Q_\infty \in AL$, те $Q_\infty := AL \cap u_\infty$ и $q := OQ_\infty$. Конструкција: $A \neq B \in AO \cap k(O, OA)$. M је пресек p и a. L је пресек праве кроз B паралелне p и праве кроз M паралелне AO. Тражена асимптота q је права кроз O паралелна AL. $\Box$

Друго решење 2.30 Нека је $\{P_\infty\} := p \cap u_\infty$ и $\{Q_\infty\} := q \cap u_\infty$, где је q друга асимптота. Нека је још $\{P\} := a \cap p$, $\{Q\} = a \cap q$, и $\{S\} = P_\infty Q \cap Q_\infty P$. Посматрамо ли четвороугао $PSQO$, можемо приметити да важи $PSQ_\infty \parallel OQQ_\infty$ и $QSP_\infty \parallel OPP_\infty$, те је он паралелограм. Применимо ли Брианшонову теорему на дегенерисани шестостраник *ppqqaa* добићемо $P_\infty Q \cap Q_\infty P \cap OA \neq \varnothing$, односно $S \in OA$. Сада је због $\{A\} = PQ \cap OS$ тачка A пресек дијагонала паралелограма $PSQO$, те их као таква полови. Дакле $Q \in a$ и $|PA| = |QA|$, што нам омогућава да дефинишемо $P \neq Q \in a \cap k(A, AP)$. На крају је наравно $q := OQ$. $\Box$

Решење 2.31 Нека је $\{E\} := AC \cap BD$. За $f =' $ имаћемо $\{E'\} = A'C' \cap B'D'$. Четвороугао $A'B'C'D'$ је делтоид акко $A'E'C' \perp B'E'D'$ и $|A'E'| = |C'E'|$. Ако је $U \in AEC$ таква да $\mathcal{H}(AC; EU)$ биће $\mathcal{H}(A'C'; E'U')$. Како је E' средиште дужи $A'C'$ то је U' бесконачно далека, те тачка U припада противоси u. Знамо да је $u \parallel s$, те u конструишемо као праву кроз U паралелну са s. Сада разликујемо случајеве:

1) $AC \nparallel s$ и $BD \nparallel s$: Нека је $\{X\} := AC \cap s$ и $\{Y\} := BD \cap s$. Како је $A'C'XE' \perp B'D'YE'$ то се E' налази на кругу над пречником XY, тј $E' \in k(XY)$. За центар S мора бити $\{S\} = EE' \cap UU'$. U' је бесконачно далека праве $A'C'XE'$, те је $SUU' \parallel A'C'XE'$. Примена Талесове теореме даје нам сличне троуглове: $\triangle\, SUE \sim \triangle\, E'XE$, односно $XE' : US = XE : UE = h$. Нека је O средиште дужи XY и $\{T\} := OE \cap u$, тада због $s \parallel u$ имамо $\triangle\, TUE \sim \triangle\, OXE$, те $XO : UT = XE : UE = h$. Како је $XE' : US = h = XO : UT$ и $\angle SUT = \angle E'XO$ (као углови са паралелним крацима), то важи $\triangle UST \sim \triangle XE'O$, те и $TS : OE' = h$. Одавде се види да је растојање TS фиксно. Дакле геометријско место тачака могућих центара пресликавања f је круг са центром у T и полупречником TU.

2) $AC \nparallel s$ и $BD \parallel s$: Нека је $\{X\} := AC \cap s$, тада $X \in A'E'C'$. $BD \parallel s$ повлачи $B'E'D' \parallel s$, те због $A'E' \perp B'E'$ имамо $A'E'X \perp s$. Дакле E' се налази на правој кроз X нормалој на s. U' је бесконачно далека праве $A'C'E'X$, те је UU' права кроз U паралелна $E'X$, односно нормална на s. Како центар $S \in UU'$ то је геометријско место тачака могућих центара права кроз U нормална на s.

3) $AC \parallel s$: Како је $U \in AC$ и $AC \parallel s$, то је $AC = u \parallel s$. Ово даље значи да су A' и C' бесконачно далеке што је немогуће јер онда нема делтоида. Дакле $AC \parallel s$ није могућа опција. $\square$

Решење 2.32 Како афино пресликавање чува паралелност то четвороугао $ABCD$ мора бити паралелограм! Нека је у слици $A'B' : A'D' = 2 : 1$. Нека је E средиште странице AB, F средиште странице DC, а $\{M\} = AF \cap DE$. Слика тачке M биће $\{M'\} = A'F' \cap D'E'$, а како се односи на правој чувају то је $A'E'F'D'$ квадрат са центром M'. (Ово се сада своди на задатак 2.14) Дефинишемо ли $\{X\} = AF \cap s$, $\{Y\} = DE \cap s$, то због $A'F'XM' \perp D'E'YM'$ мора бити M' на кругу над пречником XY. Нека су p и q праве кроз M које су паралелне редом са AEB и AD. Дефинишемо ли $\{U\} = p \cap s$, $\{V\} = q \cap s$ то $U \in p'$, $V \in q'$. Како се паралелност чува афиним пресликавањем $p' \parallel A'E'B' \perp A'D' \parallel q'$ одакле $p' \perp q'$, односно $UM' \perp VM'$, те је M' на кругу над пречником UV. Дакле M' добијамо у пресеку кругова над пречницима XY и UV. Сада је пресликавање одређено осом s и паром одговарајућих тачака M и M'. $\square$

Решење 2.33 Нека је $ABCD$ трапез са $AB \parallel CD$ уписан у четвороугао $PQRS$ и рецимо $A \in PQ$, $B \in QR$, $C \in RS$, $D \in SP$. Како је $AD \cap BC \cap QS \neq \varnothing$, то тротеменици $\triangle\, ABQ$ и $\triangle\, DCS$ имају центар перспективе, те по Дезарговој теореми имају и осу перспективе. $AQ \cap DS = \{P\}$, $BQ \cap CS = \{R\}$, $AB \cap CD = \{X\}$, при чему су по теореми P, R и X колинеарне. Одавде је $AB \cap CD \cap PR = \{X\}$, но $AB \parallel CD$, одакле је X бесконачно далека тачка. Зато је и $AB \parallel CD \parallel PR$, што је и требало доказати! $\square$

Друго решење 2.33 Задатак се могао решити и применом Обрнуте Дезаргове теореме на тротеменике $\triangle\, ADP$ и $\triangle\, BCR$ $\square$