# Геометрија 4 - 2014 - Тест (24.05.2014)

Тест се попуњава тако што се у празне кућице уписују реални бројеви, док се попуњене кућице или заокруже или прецртају у зависности од тога шта може бити решење...

Скраћенице које користимо су:

$\mathbb{RP}^2$ - реална пројективна раван

$\mathbb{QP}^2$ - рационална пројективна раван

$\mathbb{CP}^2$ - комплексна пројективна раван

$\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$ - Фаноова раван

$\mathbb{EP}^2$ - проширена еуклидска раван

**1.** $\boxed{5}$ Пројективна колинеација коначне Папосове равни има тачно 5 фиксних тачака. Ако укупан број тачака те пројективне равни означимо са $t$, колика је минимална, а колика максимална вредност за $t$?

$$\boxed{13} \le t \le \boxed{21}$$

Ако пројективна колинеација Папосове равни има четири темена четворотеменика за фиксне тачке онда су све тачке фиксне, а има их барем 7, што није случај. Дакле, међу фиксним тачкама имамо три колинеарне. У Папосовој равни важи Основна теорема пројективитета, тако да рестрикција пројективне колинеације на праву са три фиксне тачке мора бити идентичко. Можемо закључити да је та права оса, односно да се ради о перспективној колинеацији. Ако је у питању хомологија, то једна од тих фиксних тачака (центар) није на оси, те оса садржи 4 тачке, односно ред је $r = 3$, а број тачака $t = r^2 + r + 1 = 13$. У преосталој варијанти у питању је елација, све фиксне тачке су на оси, те она садржи 5 тачака, односно ред је $r = 4$, а број тачака $t = r^2 + r + 1 = 21$. Напоменимо да постоје коначне равни реда 3 и 4, конкретно аналитички модели за поља $\mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

**2.** $\boxed{2}$ Број фиксних тачака пројективног пресликавања реалне пројективне праве на саму себе може бити

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\cancel{\boxed{3}}$ $\cancel{\boxed{4}}$ $\cancel{\boxed{5}}$

Број фиксних тачака зависи од броја сопствених вектора матрице 2 пута 2. Ако матрица има две различите реалне сопствене вредности, то има две фиксне тачке (хиперболичко). Ако матрица има комплексне сопствене вредности, оне су међусобно конјуговане и нема фиксних тачака (елиптичко). Ако матрица има двоструку реалну сопствену вредност, тада има или бесконачно много тачака (идентичко) или има једну фиксну тачку (параболичко). Наравно три фиксне тачке повлачи све тачке фиксне, тако да $3, 4, 5$ нису опције.

$\boxed{3.}$ $\boxed{2}$
Број фиксних тачака колинеације реалне пројективне равни на саму себе може бити

~~0~~ | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | ~~5~~

Број фиксних тачака зависи од броја сопствених вектора матрице 3 пута 3. Како је матрица непарног реда она мора имати бар једну реалну сопствену вредност, самим тим бар један сопствени вектор, самим тим бар једну фиксну тачку, што значи да 0 није опција. Ако постоји бар 4 фиксних тачака то су све фиксне ако оне чине четворотеменик, односно има 3 фиксне колинеарне, па су те колинеарне на оси. Дакле, бар 4 фиксне тачке повлачи бесконачно много фиксних тачака, те 4 и 5 нису опције. Најједноставније примери матрица за 1, 2 и 3 су наведени редом:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$\boxed{4.}$ $\boxed{2}$ У којим од наведених пројективних равни свака перспективна колинеација је елација?

~~$\mathbb{RP}^2$~~ | ~~$\mathbb{QP}^2$~~ | ~~$\mathbb{CP}^2$~~ | $\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$ | ~~$\mathbb{EP}^2$~~

Перспективна колинеација је или хомологија или елација! У којој пројективној равни не постоји хомологија? То може да се деси само у јако рестриктивним равнима, конкретно у $\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$. Тачке са осе су фиксне, ако постоји хомологија то је центар фиксна тачка ван осе. Али сада свака права кроз центар је фиксна права и сече осу у некој фиксној тачки. Та права садржи трећу тачку, али она мора бити фиксна због бијекције, те су тако свих 7 тачака фиксне и пресликавање је идентичко, односно није перспективна колинеација по дефиницији

$\boxed{5.}$ $\boxed{5}$ У $\mathbb{RP}^2$ дате су тачке $A, B, C, D, E$ тако да важе дворазмере $(ABCD) = 6$ и $(ACBE) = -2$. Израчунати дворазмеру $d = (ADEB)$.

$$d = \boxed{2}$$

Нека је $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{E} = \mu\overrightarrow{A} + \nu\overrightarrow{B}$. Тада имамо

$$(ABDE) = \frac{\delta}{\gamma} : \frac{\nu}{\mu} = \left(\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\nu}{\mu}\right) : \left(\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}\right) = (ABCE) : (ABCD)$$

Даље је $(ABDE) = \frac{(ABCE)}{(ABCD)} = \frac{1-(ACBE)}{(ABCD)} = \frac{1-(-2)}{6} = \frac{1}{2}$,
одакле $(ADEB) = \frac{1}{(ADBE)} = \frac{1}{1-(ABDE)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

$\boxed{6.}$ $\boxed{5}$ Колинеација $f$ у $\mathbb{RP}^2$ задата је формулама $\lambda x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$. Одредити фиксну праву $p$ за $f$ која пролази кроз тачку $(1:2:3)$.

$$p : x_1 + \boxed{-2}\, x_2 + \boxed{1}\, x_3 = 0$$

$$\lambda\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

$$(A + 1\mathrm{Id})X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow s = [1:1:1]$$

$$(A - 2\mathrm{Id})X = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1 : x_2 : x_3) = (1 : -1 : -3) = S$$

Ако пронађемо све фиксне тачке видимо да је у питању перспективна колинеација јер има осу $s = [1:1:1]$. Како је $S(1:-1:-3)$ фиксна тачка и не припада $s$ то је у питању хомологија са центром $S(1:-1:-3)$, тако да фиксна права кроз $(1:2:3)$ мора бити права кроз $S$. Како је $(1,-1,-3) \times (1,2,3) = (3,-6,3)$, то је тражена фиксна права $[3:-6:3] = [1:-2:1]$

$\boxed{7.}$ $\boxed{5}$ У $\mathbb{RP}^2$ одредити једначину конике $\Gamma$ која додирује праву $x_1 = 0$ у тачки $(0:2:1)$, додирује праву $x_2 = 0$ у тачки $(2014:0:0)$ и садржи тачку $(1:2:3)$.

$$\Gamma : \boxed{0}\, x_1^2 + x_2^2 + \boxed{4}\, x_3^2 + \boxed{-8}\, x_1x_2 + \boxed{0}\, x_1x_3 + \boxed{-4}\, x_2x_3 = 0$$

Имамо пол полара везе $(0:2:1) \leftrightarrow [1:0:0]$ и $(2014:0:0) \leftrightarrow [0:1:0]$, тако да је

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2014 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Из прве имамо $2a_{22} + a_{23} = 0$ и $2a_{23} + a_{33} = 0$, односно $a_{23} = -2a_{22}$ и $a_{33} = -2a_{23} = 4a_{22}$, а из друге $a_{11} = 0$, $a_{13} = 0$. Коника садржи тачку $(1:2:3)$ тако да је

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & -2a_{22} \\ 0 & -2a_{22} & 4a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a_{12} \\ a_{12} - 4a_{22} \\ 8_{22} \end{pmatrix} = 4a_{12} + 16a_{22},$$

одакле је $a_{12} = -4a_{22}$. За рецимо $a_{22} = 1$ је $a_{23} = -2$, $a_{33} = 4$, $a_{12} = -4$ и коника има једначину $0x_1^2 + 1x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_2 + 0x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$.

$\boxed{8.}$ $\boxed{1}$ Нека је $p'$ пројекција праве $p$, а $t$ траг равни $\tau$. Ако је $p' \perp t$ које су везе између $\tau$ и $p$ могуће?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\tau \parallel p$ | $\tau \nparallel p$ | $\tau \perp p$ | $\tau \not\perp p$ |

$\boxed{9.}$ $\boxed{1}$ Нека је $p'$ пројекција праве $p$, а $t$ траг равни $\tau$. Ако је $\tau \perp p$ које су везе између $t$ и $p'$ могуће?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cancel{t \parallel p'}$ | $t \nparallel p'$ | $t \perp p'$ | $\cancel{t \not\perp p'}$ |

$\boxed{10.}$ $\boxed{2}$ Нека раван $\tau$ са пројекцијском равни $\pi$ заклапа угао од $\frac{\pi}{4}$ и нека $\tau$ садржи праву $p$. Ако је $p'$ пројекција праве $p$, а $t$ траг равни $\tau$ који су углови могући?

| | | |
|---|---|---|
| $\cancel{\measuredangle(p,\pi) = \frac{\pi}{3}}$ | $\measuredangle(p,t) = \frac{\pi}{3}$ | $\cancel{\measuredangle(p',\tau) = \frac{\pi}{3}}$ |
| $\measuredangle(p,\pi) = \frac{\pi}{4}$ | $\measuredangle(p,t) = \frac{\pi}{4}$ | $\measuredangle(p',\tau) = \frac{\pi}{4}$ |
| $\measuredangle(p,\pi) = \frac{\pi}{6}$ | $\measuredangle(p,t) = \frac{\pi}{6}$ | $\measuredangle(p',\tau) = \frac{\pi}{6}$ |