Геометрија 4 - 2014 - Тест (10.05.2014)

Тест се попуњава тако што се у празне кућице уписују реални бројеви, док се попуњене кућице или заокруже или прецртају у зависности од тога шта може бити решење...

Скраћенице које користимо су:

$\mathbb{RP}^2$ - реална пројективна раван
$\mathbb{QP}^2$ - рационална пројективна раван
$\mathbb{CP}^2$ - комплексна пројективна раван
$\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$ - Фаноова раван
$\mathbb{EP}^2$ - проширена еуклидска раван

1. $\boxed{4}$ У некој пројективној равни постоји тачка која је инцидентна са тачно 4 праве. Ако укупан број тачака те пројективне равни означимо са t, колика је минимална, а колика максимална вредност за t?

$$\boxed{13} \leq t \leq \boxed{13}$$

Како постоји тачка инцидентна са коначно много правих у питању је коначна пројективна раван. За коначну пројективну раван постоји константа r, таква да је свака права инцидентна са тачно $r+1$ тачака, док је свака тачка инцидентна са тачно $r+1$ правих. Број r зове се ред коначне пројективне равни, а у нашем конкретном задатку је $r = 3$. Број тачака коначне пројективне равни једнак је $r^2 + r + 1 = 13$.

2. $\boxed{3}$ У пројективној равни упоредити тврђења.

Основна теорема пројективитета	~~$\Leftarrow$~~	$\Rightarrow$	Обрнута Дезаргова теорема
Теорема о перспективитету	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	Папосова теорема
Дезаргова теорема	~~$\Leftarrow$~~	~~$\Rightarrow$~~	Фаноова аксиома

Основна теорема пројективитета је еквивалентна са Папосовом теоремом која повлачи Дезаргову теорему, а она повлачи Обрнуту Дезаргову теорему. Аналитичке пројективне равни $\mathbb{FP}^2$ где је $\mathbb{F}$ тело које није поље јесу Дезаргове, али не и Папосове, а како је Основна теорема пројективитета еквивалентна са Папосовом, а Обрнута Дезаргова теорема са Дезарговом то обрат не важи. Теорема о перспективитету и Папосова теорема су еквивалентне. У Фаноовој равни важи Дезаргова теорема, али не и Фаноова аксиома. У Молтоновој равни важи Фаноова аксиома, али не и Дезаргова теорема.

$\boxed{3.}$ $\boxed{2}$ У којим од наведених пројективних равни свака колинеација је пројективна колинеација?

$\boxed{\mathbb{RP}^2}$ $\boxed{\mathbb{QP}^2}$ $\boxed{\cancel{\mathbb{CP}^2}}$ $\boxed{\mathbb{EP}^2}$

Уколико је идентитет једини аутоморфизам поља $\mathbb{F}$ онда је свака колинеација у $\mathbb{FP}^2$ пројективна колинеација. За $\mathbb{QP}^2$ то је очигледно, док смо захваљујући поретку то проширили и на $\mathbb{RP}^2$ што је исто што и $\mathbb{EP}^2$. Конјугат је аутоморфизам $\mathbb{CP}^2$ који није идентитет!

$\boxed{4.}$ $\boxed{2}$ У којим од наведених пројективних равни свака перспективна колинеација је пројективна колинеација?

$\boxed{\mathbb{RP}^2}$ $\boxed{\mathbb{QP}^2}$ $\boxed{\mathbb{CP}^2}$ $\boxed{\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2}$ $\boxed{\mathbb{EP}^2}$

Ако је рестрикција колинеације f пројективне равни на неку праву пројективитет, онда је f пројективна колинеација. Како свака перспективна колинеација f има осу s, а рестрикција $f\restriction_s = \mathrm{Id}$ је пројективитет, то је она пројективна колинеација.

$\boxed{5.}$ $\boxed{5}$ У $\mathbb{RP}^2$ дате су тачке $A(1:2:3)$ и $B(0:2:1)$ својим хомогеним координатама. Одредити једначину спојнице $p = A \vee B$. Ако је q права дата једначином $x_1 + 2x_2 = 0$, одредити хомогене координате пресека $C = p \wedge q$. Одредити координате тачке D за коју је $\mathcal{H}(AB;CD)$.

$$p : x_1 + \boxed{\tfrac{1}{4}}\, x_2 + \boxed{-\tfrac{1}{2}}\, x_3 = 0 \qquad C(\boxed{-2} : 1 : \boxed{-\tfrac{7}{2}}) \qquad D(5 : \boxed{\tfrac{45}{2}} : \boxed{\tfrac{85}{4}})$$

$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{A \vee B} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (1,2,3) \times (0,2,1) = (-4,-1,2) \Rightarrow p = [-4:-1:2] = [1 : \frac{1}{4} : -\frac{1}{2}]$

$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{p \wedge q} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} = (-4,-1,2) \times (1,2,0) = (-4,2,-7) \Rightarrow C = (-4:2:7) = (-2:1:-\frac{7}{2})$

$\mathcal{H}(AB;CD) \Rightarrow (ABCD) = -1$, одакле $\overrightarrow{C} = -4\overrightarrow{A} + 5\overrightarrow{B} \Rightarrow \overrightarrow{D} = 4\overrightarrow{A} + 5\overrightarrow{B} = (4,18,17)$.

$D = (4:18:17) = (5 : \frac{45}{2} : \frac{85}{4})$

$\boxed{6.}$ $\boxed{5}$ Хомологија је задата формулама $\lambda x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$. Одредити осу s, противосу u и центар S те хомологије.

$$s : x_1 + \boxed{1}\, x_2 + \boxed{1}\, x_3 = 0 \quad u : x_1 + \boxed{1}\, x_2 + \boxed{\tfrac{2}{3}}\, x_3 = 0 \quad S(1 : \boxed{-1} : \boxed{-3})$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

$$(A + 1\mathrm{Id})X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow s = [1:1:1]$$

$$(A - 2\mathrm{Id})X = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1 : x_2 : x_3) = (1 : -1 : -3) = S$$

Противосу представља последња врста од A, те је $u = [3:3:2] = [1:1:\frac{2}{3}]$

$\boxed{7.}$ $\boxed{5}$ У $\mathbb{RP}^2$ дата је коника једначином $3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$. Одредити тангенте из тачке $A(1:1:1)$ на ту конику. Тангенте су

$$x_1 + \boxed{0}\, x_2 + \boxed{-1}\, x_3 = 0 \qquad\qquad x_1 + \boxed{-1}\, x_2 + \boxed{0}\, x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \mathrm{pol}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Полару $x_1 = x_2 + x_3$ мењамо у криву $3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ и добијамо пресек за који важи $4x_2x_3 = 0$, односно $x_2 = 0$ или $x_3 = 0$, што са $x_1 = x_2 + x_3$ даје додирне тачке $(1:0:1)$ и $(1:1:0)$. Њихове спојнице са $A(1:1:1)$ су тангенте $x_1 = x_3$ и $x_1 = x_2$, односно $[1:0:-1]$ и $[1:-1:0]$

$\boxed{8.}$ $\boxed{1}$ Ако су a и b различите паралелне праве које нису нормалне на π, које су везе између њихових нормалних пројекција могуће?

$\boxed{a' \parallel b'}$ $\boxed{\cancel{a' \nparallel b'}}$ $\boxed{a' = b'}$ $\boxed{\cancel{a' \perp b'}}$

$\boxed{9.}$ $\boxed{1}$ Ако су a и b мимоилазне праве које нису нормалне на π, које су везе између њихових нормалних пројекција могуће?

$\boxed{a' \parallel b'}$ $\boxed{a' \nparallel b'}$ $\boxed{\cancel{a' = b'}}$ $\boxed{a' \perp b'}$

$\boxed{10.}$ $\boxed{1}$ Ако су праве a и b трагови равни α и β и важи $a \perp b$, које су везе између равни могуће?

$\boxed{\cancel{\alpha \parallel \beta}}$ $\boxed{\alpha \nparallel \beta}$ $\boxed{\alpha \perp \beta}$ $\boxed{\alpha \pm \beta}$

$\boxed{11.}$ $\boxed{1}$ Ако су праве a и b трагови равни α и β и важи $a \parallel b$, које су везе између равни могуће?

$\boxed{\alpha \parallel \beta}$ $\boxed{\alpha \nparallel \beta}$ $\boxed{\alpha \perp \beta}$ $\boxed{\alpha \pm \beta}$