Глава 6

КРИВИНА

6.1 Тензор кривине

Важно питање псеудо-Риманове геометрије је да ли постоје локалне инваријанте које се чувају изометријама. Неке корисне структуре у диференцијалној геометрији немају локалне инваријанте. На пример, свако свуда ненула векторско поље може се локално записати као парцијални извод, те су сва она локално еквивалентна. Такође, Риманове 1-многострукости су све међусобно локално изометричне са $\mathbb{R}$. Међутим, сфера $\mathbf{S}^2$ и раван $\mathbb{R}^2$ нису локално изометрични, што видимо у наредном примеру.

Пример 6.1. Ако на сфери $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ без затвореног скупа $\{(x,y,z) : x \leqslant 0, y = 0\}$ уведемо сферне координате са

$$x = \sin\varphi\cos\theta, \quad y = \sin\varphi\sin\theta, \quad z = \cos\varphi,$$

за инклинацију $0 < \varphi < \pi$ и азимут $-\pi < \theta < \pi$, њена метрика наслеђена из $\mathbb{R}^3$ је

$$\mathring{g} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\theta^2.$$

Рачун за Кристофелове симболе Леви-Чивита повезаности доноси

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = 0, \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = \operatorname{ctg}\varphi, \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} = -\sin\varphi\cos\varphi,$$

одакле се види да су меридијани $\theta = \mathrm{Const}$ геодезијске на сфери, јер је очигледно да криве облика $\gamma(t) = (t, \theta)$ задовољавају геодезијске једначине. Како за коваријантне изводе координатног векторског поља ∂_φ важи

$$\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi = 0, \quad \nabla_{\partial_\theta}\partial_\varphi = \operatorname{ctg}\varphi\,\partial_\theta,$$

то је оно паралелно дуж сваког меридијана, али и дуж екватора ($\varphi = \pi/2$). Посматрајмо тачку p са координатама $(\varphi, \theta) = (\pi/2, 0)$ и вектор $(\partial_\varphi)_p$. Ако постоји паралелно продужење тог вектора на неку околину тачке p то једино може бити ∂_φ (паралелно померање дуж екватора, а затим дуж одговарајућег меридијана), али $\nabla\partial_\varphi \not\equiv 0$. У еуклидском простору, сваки тангентни вектор има паралелно продужење на цео простор, што не важи за сферу, те сфера и раван нису локално изометрични. $\triangle$

За псеудо-Риманову 2-многострукост (M, g) постоји очигледан покушај да задати вектор $Z_p \in T_pM$ продужимо на паралелно векторско поље $Z \in \mathfrak{X}(M)$. У локалним координатама (x_1, x_2) неке карте центриране у p можемо поставити паралелно векторско поље дуж x_1-осе, а онда добијене векторе паралелно померити дуж координатних линија које чувају x_1 координату. Тако конструисано векторско поље Z је паралелно дуж сваке x_2-координатне линије, као и дуж x_1-осе. Поставља се питање да ли је $\nabla_{\partial_1} Z \equiv 0$, односно да ли је Z паралелно дуж x_1-координатних линија које нису сама x_1-оса. Услов $\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1} Z \equiv 0$ одређује јединствено паралелно померање $\nabla_{\partial_1} Z$ дуж x_2-координатних линија за неки почетни вектор, али како се $\nabla_{\partial_1} Z$ поништава у тачкама $x_2 = 0$, то следи $\nabla_{\partial_1} Z \equiv 0$. Са друге стране је $\nabla_{\partial_2} Z \equiv 0$, те и $\nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2} Z \equiv 0$, што решава проблем уколико ∇_{∂_1} и ∇_{∂_2} комутирају.

Директан рачун даје $D_{\partial_2} D_{\partial_1} Z = D_{\partial_2}(\sum_i \partial_1 Z^i \partial_i) = \sum_i \partial_2\partial_1 Z^i \partial_i$, за стандардну повезаност $\nabla = D$ у $\mathbb{R}^2$, те како парцијални изводи комутирају следи $D_{\partial_2} D_{\partial_1} Z = D_{\partial_1} D_{\partial_2} Z$. Међутим, то не важи у општем случају, јер та некомутативност коваријантних извода омогућава локално разликовање сфере од равни из Примера 6.1. Да бисмо изразили некомутативност на координатно инваријантан начин можемо посматрати $\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z$, где у $\mathbb{R}^n$ имамо $D_X D_Y Z = D_X(\sum_i YZ^i\partial_i) = \sum_i XYZ^i\partial_i$, одакле добијамо да важи $D_X D_Y Z - D_Y D_X Z = \sum_i (XY - YX)Z^i\partial_i = D_{[X,Y]} Z$.

Претходна анализа нас мотивише да на псеудо-Римановој многострукости (M, g) дефинишемо ***оператор кривине*** $\mathcal{R}\colon \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ са

$$\mathcal{R}(X, Y)(Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

за $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, где је ∇ одговарајућа Леви-Чивита повезаност. Другим речима, оператор кривине је пресликавање $\mathcal{R}(X, Y)\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ задато као разлика комутатора набли и набле комутатора, $\mathcal{R}(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$. Напоменимо да неки аутори дефинишу оператор кривине са супротним знаком, што је разлика која суштински није битна, али свакако треба бити пажљив.

Из саме дефиниције очигледна је антисиметрија

$$\mathcal{R}(Y, X) = -\mathcal{R}(X, Y), \tag{6.1}$$

као и њен специјални случај $\mathcal{R}(X, X) = 0$. Повезаност и комутатор су $\mathbb{R}$-билинеарни, те је такав и оператор кривине $\mathcal{R}$, одакле следи адитивност по сва три аргумента. Штавише, $\mathcal{R}$ је $\mathfrak{F}(M)$-мултилинеарно. За $\mathfrak{F}(M)$-линеарност по првом аргументу имамо,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(fX, Y) &= [\nabla_{fX}, \nabla_Y] - \nabla_{[fX,Y]} = [f\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{f[X,Y]-(Yf)X}\\ &= f[\nabla_X, \nabla_Y] - (Yf)\nabla_X - f\nabla_{[X,Y]} + (Yf)\nabla_X = f\mathcal{R}(X, Y),\end{aligned}$$

што због (6.1) ради и по другом аргументу. За трећи аргумент користимо особине (5.6) и (5.5), одакле добијамо

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X, Y)(fZ) =& \nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ)\\ =& \nabla_X(f\nabla_Y Z + (Yf)Z) - \nabla_Y(f\nabla_X Z + (Xf)Z) - (f\nabla_{[X,Y]}Z + ([X, Y]f)Z)\\ =& f\nabla_X\nabla_Y Z + (Xf)\nabla_Y Z + (Yf)\nabla_X Z + (XYf)Z - f\nabla_Y\nabla_X Z\\ &- (Yf)\nabla_X Z - (Xf)\nabla_Y Z - (YXf)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z - ([X, Y]f)Z\\ =& f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z = f\mathcal{R}(X, Y)Z.\end{aligned}$$

Дакле, оператор кривине $\mathcal{R}\colon \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ је $\mathfrak{F}(M)$-мултилинеаран, те га уобичајено третирамо као тензорско поље $\mathcal{R} \in \mathfrak{T}^1_3(M)$. Вишеструком применом симетричности повезаности (5.9) добијамо

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}(X,Y)Z+\mathcal{R}(Y,Z)X+\mathcal{R}(Z,X)Y\\
&=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Y\nabla_ZX-\nabla_Z\nabla_YX-\nabla_{[Y,Z]}X+\nabla_Z\nabla_XY-\nabla_X\nabla_ZY-\nabla_{[Z,X]}Y\\
&=\nabla_X[Y,Z]+\nabla_Y[Z,X]+\nabla_Z[X,Y]-\nabla_{[X,Y]}Z-\nabla_{[Y,Z]}X-\nabla_{[Z,X]}Y\\
&=[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]],
\end{aligned}$$

те из Јакобијевог идентитета (2.7) следи

$$\mathcal{R}(X,Y)Z+\mathcal{R}(Y,Z)X+\mathcal{R}(Z,X)Y=0, \tag{6.2}$$

што је формула позната као ***Бјанкијев идентитет***[1].

Теорема 6.1. *За оператор кривине $\mathcal{R}\in\mathfrak{T}^1_3(M)$ псеудо-Риманове многострукости M, формуле* (6.1) *и* (6.2) *важе за свако $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$.*

У локалним координатама имамо $\mathcal{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k=\sum_l \mathcal{R}^l_{ijk}\partial_l$ (видети Пример 3.25), те компоненте оператора кривине можемо изразити преко Кристофелових симбола. Из

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k&=\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k-\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k-\nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k\\
&=\nabla_{\partial_i}\sum_m\Gamma^m_{jk}\partial_m-\nabla_{\partial_j}\sum_m\Gamma^m_{ik}\partial_m\\
&=\sum_m(\partial_i\Gamma^m_{jk})\partial_m+\sum_m\Gamma^m_{jk}\nabla_{\partial_i}\partial_m-\sum_m(\partial_j\Gamma^m_{ik})\partial_m-\sum_m\Gamma^m_{ik}\nabla_{\partial_j}\partial_m\\
&=\sum_m(\partial_i\Gamma^m_{jk}-\partial_j\Gamma^m_{ik})\partial_m+\sum_{m,l}(\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}-\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm})\partial_l,
\end{aligned}$$

добијамо

$$\mathcal{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k=\sum_l\left(\left(\partial_i\Gamma^l_{jk}-\partial_j\Gamma^l_{ik}\right)+\sum_m(\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}-\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm})\right)\partial_l,$$

одакле важи

$$\mathcal{R}^l_{ijk}=\partial_i\Gamma^l_{jk}-\partial_j\Gamma^l_{ik}+\sum_m(\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}-\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}). \tag{6.3}$$

Спуштањем индекса добијамо ***тензор кривине*** $R=\mathcal{R}^\flat\in\mathfrak{T}^0_4(M)$, што је коваријантно тензорско поље

$$R=\sum_{i,j,k,l}R_{ijkl}\,dx_i\otimes dx_j\otimes dx_k\otimes dx_l$$

са компонентама $R_{ijkl}=\sum_m g_{lm}\mathcal{R}^m_{ijk}$, при чему за свако $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$ важи

$$R(X,Y,Z,W)=g(\mathcal{R}(X,Y)Z,W).$$

Из (6.1) директно следи идентитет

$$R(X,Y,Z,W)=-R(Y,X,Z,W), \tag{6.4}$$

док као последицу од (6.2) имамо ***први Бјанкијев идентитет***,

$$R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)=0. \tag{6.5}$$

[1]Luigi Bianchi (1856–1928), италијански математичар

Како је Леви-Чивита повезаност метричка, из (5.8) следи

$$\begin{aligned} g(\nabla_X\nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) &= Xg(\nabla_Y Z, Z), \\ g(\nabla_Y\nabla_X Z, Z) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) &= Yg(\nabla_X Z, Z), \\ 2g(\nabla_W Z, Z) = g(\nabla_W Z, Z) + g(Z, \nabla_W Z) &= Wg(Z, Z), \end{aligned}$$

где нас у последњој једнакости занимају случајеви $W \in \{Y, X, [X, Y]\}$. Одавде имамо

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, Z) \\ &= Xg(\nabla_Y Z, Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) - g(\nabla_{[X,Y]}Z, Z) \\ &= \frac{1}{2}XYg(Z, Z) - \frac{1}{2}YXg(Z, Z) - \frac{1}{2}[X, Y]g(Z, Z) = 0, \end{aligned}$$

те поларизацијом из

$$R(X, Y, Z + W, Z + W) = R(X, Y, Z, Z) + R(X, Y, Z, W) + R(X, Y, W, Z) + R(X, Y, W, W)$$

добијамо

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z). \tag{6.6}$$

Теорема 6.2. *За тензор кривине $R \in \mathfrak{T}^0_4(M)$ псеудо-Риманове многострукости M, формуле* (6.4)*,* (6.6) *и* (6.5) *важе за свако $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.*

Сличне особине изводимо за потпун коваријантни извод тензора кривине ∇R. Како је

$$\begin{aligned} \nabla R(X, Y, Z, W, V) =& V(R(X, Y, Z, W)) - R(\nabla_V X, Y, Z, W) - R(X, \nabla_V Y, Z, W) \\ & - R(X, Y, \nabla_V Z, W) - R(X, Y, Z, \nabla_V W), \end{aligned}$$

то особина (6.4) одмах даје

$$\nabla R(X, Y, Z, W, V) = -\nabla R(Y, X, Z, W, V), \tag{6.7}$$

док је

$$\nabla R(X, Y, Z, W, V) = -\nabla R(X, Y, W, Z, V) \tag{6.8}$$

директна последица од (6.6). Из вишеструке примене (6.2) и (6.5) следи

$$\begin{aligned} &\nabla R(X, Y, Z, W, V) + \nabla R(Y, Z, X, W, V) + \nabla R(Z, X, Y, W, V) \\ = \;& V(R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W)) \\ & - g(\mathcal{R}(\nabla_V X, Y)Z + \mathcal{R}(Z, \nabla_V X)Y + \mathcal{R}(Y, Z)\nabla_V X, W) \\ & - g(\mathcal{R}(\nabla_V Y, Z)X + \mathcal{R}(X, \nabla_V Y)Z + \mathcal{R}(Z, X)\nabla_V Y, W) \\ & - g(\mathcal{R}(\nabla_V Z, X)Y + \mathcal{R}(Y, \nabla_V Z)X + \mathcal{R}(X, Y)\nabla_V Z, W) \\ & - g(\mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(Y, Z)X + \mathcal{R}(Z, X)Y, \nabla_V W) = 0, \end{aligned}$$

те добијамо коваријантни извод првог Бјанкијевог идентитета

$$\nabla R(X, Y, Z, W, V) + \nabla R(Y, Z, X, W, V) + \nabla R(Z, X, Y, W, V) = 0. \tag{6.9}$$

Важно је приметити да претходну формулу није неопходно рачунати по дефиницији, јер ствари почињу да се компликују. Како је у питању тензорска једнакост, по Теореми 3.13 довољно је показати тврђење у произвољној тачки $p \in M$. Приде, због мултилинеарности тензора довољно је формулу показати за базне елементе у односу на неки покретни репер. Ако по Теореми 5.14 уведемо нормалне координате центриране у p, осим стандардног $[\partial_i, \partial_j] \equiv 0$, по Теореми 5.15 додатно имамо и

$$(\nabla_{\partial_i}\partial_j)_p = \sum_k \Gamma_{ij}^k(p)(\partial_k)_p = 0.$$

На пример, у нормалним координатама центрираним у p за координатна векторска поља X, Y, Z, W, V у некој околини од p, за (6.9) имамо аутоматски

$$\begin{aligned}(\nabla R(X,Y,Z,W,V) &+ \nabla R(Y,Z,X,W,V) + \nabla R(Z,X,Y,W,V))(p)\\ &= V_p(R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W)) = 0.\end{aligned}$$

Сасвим слично имамо следећи рачун,

$$\begin{aligned}(\nabla R(X,Y,Z,W,V))(p) &= (V(R(X,Y,Z,W)))(p)\\ &= g(\nabla_V(\mathcal{R}(X,Y)Z), W)(p) + g(\mathcal{R}(X,Y)Z, \nabla_V W)(p)\\ &= g(\nabla_V\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_V\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_V\nabla_{[X,Y]}Z, W)(p)\\ &= g(\nabla_V\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_V\nabla_Y\nabla_X Z, W)(p),\end{aligned}$$

одакле следи

$$\begin{aligned}&(\nabla R(X,Y,Z,W,V) + \nabla R(Y,V,Z,W,X) + \nabla R(V,X,Z,W,Y))(p)\\ &\quad= g((\nabla_V\nabla_X\nabla_Y - \nabla_V\nabla_Y\nabla_X + \nabla_X\nabla_Y\nabla_V - \nabla_X\nabla_V\nabla_Y + \nabla_Y\nabla_V\nabla_X - \nabla_Y\nabla_X\nabla_V)Z, W)(p)\\ &\quad= R(V,X,\nabla_Y Z, W)(p) + R(X,Y,\nabla_V Z, W)(p) + R(Y,V,\nabla_X Z, W)(p) = 0.\end{aligned}$$

одакле следи формула (коју сам у Књизи израчунао и пешке уз дуг и мучан рачун) позната као ***други Бјанкијев идентитет***,

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) + \nabla R(Y,V,Z,W,X) + \nabla R(V,X,Z,W,Y) = 0. \tag{6.10}$$

Теорема 6.3. *За потпун коваријантни извод тензора кривине $\nabla R \in \mathfrak{T}_5^0(M)$ псеудо-Риманове многострукости M, формуле* (6.7), (6.8), (6.9) *и* (6.10) *важе за свако $X, Y, Z, W, V \in \mathfrak{X}(M)$.*

Нека је $f\colon M \to N$ изометрија између псеудо-Риманових многострукости. Како се Леви-Чивита повезаност чува у смислу формуле (5.12), то се чува и кривина коју она индукује,

$$f_*(\mathcal{R}(X,Y)Z) = \mathcal{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z.$$

Веома је важно разумети понашање изометрија и локалних изометрија. Разни концепти псеудо-Риманове геометрије које смо до сада дефинисали се изометријама чувају у одговарајућем смислу. Како смо конструисали концепте из метричког тензора употребом алата теорије многострукости, док изометрије чувају и алате и тензор, природно је очекивати да су у питању изометријске инваријанте.

Пример 6.2. Нека је $f\colon M \to N$ локална изометрија између псеудо-Риманових многострукости. Коваријантни извод дуж криве γ се чува са

$$T_{\gamma(t)}f\frac{\nabla V}{dt} = \frac{\nabla f_* V}{dt}$$

за $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ где је $(f_*V)(t) = T_{\gamma(t)}f(V(t))$ за свако t. Због тога, паралелно померање дуж криве се чува са

$$T_{\gamma(b)}f \circ P_\gamma = P_{f\circ\gamma} \circ T_{\gamma(a)}f,$$

где $P_\gamma = P_{ab}$ означава паралелно померање из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$ дуж γ у M, а $P_{f\circ\gamma}$ означава паралелно померање из $f(\gamma(a))$ у $f(\gamma(b))$ дуж $f\circ\gamma$ у N. Зато, ако је γ геодезијска у M, онда је $f\circ\gamma$ геодезијска у N, или конкретније, геодезијске се чувају са

$$f\circ\gamma_V = \gamma_{T_pf(V)}, \tag{6.11}$$

кад год су обе стране дефинисане (домен за $\gamma_{(T_pf)V}$ може бити већи од домена за γ_V), где је $\gamma_V(0) = p$ и $\gamma_V'(0) = V$. Експоненцијално пресликавање се чува са

$$f\circ\exp_p = \exp_{f(p)}\circ T_pf, \tag{6.12}$$

кад год су обе стране дефинисане. $\triangle$

6.2 Алгебарски тензор кривине

У теорији псеудо-Риманових многострукости, згодно је радити у чисто алгебарском окружењу. Редукцијом псеудо-Риманове многострукости (M,g) на произвољну тачку $p\in M$ добијамо векторски простор $\mathcal{V} = T_pM$ са скаларним производом g_p, а природни тензори доводе нас до концепта алгебарског тензора кривине. За тензор $R\in\mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ на квадратном векторском простору $(\mathcal{V},g)$ кажемо да је ***алīебарски шензор кривине*** ако за свако $X,Y,Z,W\in\mathcal{V}$ задовољава симетрије

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W), \tag{6.4 поновљено}$$
$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z), \tag{6.6 поновљено}$$
$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0. \tag{6.5 поновљено}$$

Важно је напоменути да се ова дефиниција лепо слаже са Теоремом 6.2. Тензор кривине псеудо-Риманове многострукости, редукован на произвољну тачку јесте алгебарски тензор кривине. Због тога, сваки резултат који важи за алгебарски тензор кривине може се пренети на тензор кривине псеудо-Риманове многострукости.

Ако применимо (6.6), затим (6.5) и коначно (6.4) и (6.6), имамо

$$\begin{aligned}
2R(X,Y,Z,W) &- 2R(Z,W,X,Y)\\
&= R(X,Y,Z,W) - R(X,Y,W,Z) - R(Z,W,X,Y) + R(Z,W,Y,X)\\
&= (-R(Y,Z,X,W) - R(Z,X,Y,W)) - (-R(Y,W,X,Z) - R(W,X,Y,Z))\\
&\quad - (-R(W,X,Z,Y) - R(X,Z,W,Y)) + (-R(W,Y,Z,X) - R(Y,Z,W,X))\\
&= -R(Y,Z,X,W) - R(Y,Z,W,X) - R(Z,X,Y,W) + R(X,Z,W,Y)\\
&\quad + R(Y,W,X,Z) - R(W,Y,Z,X) + R(W,X,Y,Z) + R(W,X,Z,Y) = 0,
\end{aligned}$$

одакле добијемо симетрију по паровима

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y), \tag{6.13}$$

која важи за свако $X,Y,Z,W\in\mathcal{V}$ и која се последично преноси и за тензор кривине на многострукости. Имајући ово у виду, једнакост (6.6) из дефиниције алгебарског тензора кривине можемо заменити са (6.13), јер (6.6) је директна последица (6.4) и (6.13).

Нека је R алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V},g)$ димензије n. Ради једноставнијег изражавања, особине скаларног производа преносимо на сам тензор. Тако можемо рећи да је R Риманов или позитивно дефинитан (ако је $\operatorname{Ind} g = 0$), дефинитан ($\operatorname{Ind} g = 0$ или $\operatorname{Ind} g = n$), недефинитан ($1\leqslant \operatorname{Ind} g\leqslant n-1$), Лоренцов ($\operatorname{Ind} g = 1$), n-димензион ($\dim\mathcal{V} = n$), и тако даље.

Пример 6.3. Основни пример алгебарског тензора кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ је свакако $R^1 \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ дат са

$$R^1(X, Y, Z, W) = g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) \tag{6.14}$$

за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$. Лако је видети да R^1 задовољава $\mathbb{Z}_2$ симетрије (6.4) и (6.6), као и први Бјанкијев идентитет (6.5). $\triangle$

Нека је $J\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ линеарни оператор на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. За J кажемо да је ***самоадјунгован*** или ***симетричан*** ако $g(JX, Y) = g(X, JY)$ важи за свако $X, Y \in \mathcal{V}$. Сасвим слично, J је ***косоадјунгован*** или ***кососиметричан*** ако $g(JX, Y) = -g(X, JY)$ важи за свако $X, Y \in \mathcal{V}$. Самоадјунговани и косоадјунговани ендоморфизми нам омогућавају да добијемо нове примере алгебарских тензора кривине.

Пример 6.4. Самоадјунгован ендоморфизам $J\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$ генерише алгебарски тензор кривине $R^J \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ дефинисан са

$$R^J(X, Y, Z, W) = g(JX, W)g(JY, Z) - g(JX, Z)g(JY, W),$$

за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$, што се лако проверава. Приметимо да је R^1 специјални случај за $J = 1 \cdot \mathbb{1}$. $\triangle$

Пример 6.5. Косоадјунгован ендоморфизам $J\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$ генерише алгебарски тензор кривине $R^J \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ дефинисан са

$$R^J(X, Y, Z, W) = g(JX, Z)g(JY, W) - g(JY, Z)g(JX, W) + 2g(JX, Y)g(JZ, W), \tag{6.15}$$

за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$, што се лако проверава. $\triangle$

Пример 6.6. Нека су $R_1, \ldots, R_k \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ алгебарски тензори кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Тада је

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i R_i \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$$

такође алгебарски тензор кривине, јер очигледно задовољава једнакости (6.4), (6.6) и (6.5). На овај начин, нови алгебарски тензор кривине може се направити као линеарна комбинација постојећих тензора. Посебно, kR^1 је алгебарски тензор кривине за свако $k \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Дизањем последњег индекса добијамо ***афини оператор кривине*** $\mathcal{R} = R^\sharp \in \mathfrak{T}^1_3(\mathcal{V})$ за који једнакост

$$R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W),$$

важи за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$. Намерно смо кроз рестрикцију задржали нотацију са многострукости, R за тензор кривине и $\mathcal{R}$ за оператор кривине, што нам омогућава да преузмемо глобалну терминологију.

Чест начин да се изрази алгебарски тензор кривине R је преко компоненти тензора кривине $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l)$ у односу на неку базу $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ у $\mathcal{V}$. Испоставља се да нам је потребно само $n^2(n^2 - 1)/12$ компоненти, што се види из наредне теореме (видети Вајнберг[2] [111, стр.142–143]).

[2]Steven Weinberg (1933), амерички теоријски физичар

Теорема 6.4. *Димензија простора алгебарских тензора кривине на квадратном векторском простору димензије n једнака је $n^2(n^2-1)/12$.*

Доказ. Посматрајмо компоненте R_{ijkl} као парове (i,j) и (k,l). Како важи (6.4) имамо $\binom{n}{2}$ независних парова на првом месту. Како важи (6.6) имамо исто то и на другом месту. Међутим, парови су повезани са (6.13), што даје $\binom{n}{2}+\cdots+2+1$ могућности. Први Бјанкијев идентитет (6.5) додаје $\binom{n}{4}$ зависних компоненти, на пример то су R_{ijkl} за $i<j<k<l$. Зато преостају R_{ijkl} чији је број независних компоненти једнак

$$\begin{aligned}\binom{n}{2}+\cdots+2+1-\binom{n}{4} &= \frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2}+1\right)-\binom{n}{4}\\ &= \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=\frac{n^2(n^2-1)}{12}.\end{aligned}$$

□

Јакобијев оператор и сродни оператори играју значајне улоге у нашој теорији. ***Поларизован Јакобијев оператор*** је линеарно пресликавање $\mathcal{J}\colon \mathcal{V}^3\to\mathcal{V}$ дефинисано са

$$\mathcal{J}(X,Y)(Z)=\frac{1}{2}\left(\mathcal{R}(Z,X)Y+\mathcal{R}(Z,Y)X\right), \tag{6.16}$$

за све $X,Y,Z\in\mathcal{V}$. ***Јакобијев оператор*** за $X\in\mathcal{V}$ је линеарно пресликавање $\mathcal{J}_X\colon\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ дефинисано са $\mathcal{J}_X=\mathcal{J}(X,X)$, а често га изражавамо са

$$\mathcal{J}_X(Y)=\mathcal{R}(Y,X)X. \tag{6.17}$$

Како (6.6) повлачи $g(\mathcal{J}_X(Y),X)=R(Y,X,X,X)=0$ имамо $\mathcal{J}_X(Y)\perp X$, те је $X^\perp$ кодомен Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$. У случају дефинитног X ($\varepsilon_X\neq0$), ортогонал $X^\perp$ је недегенерисана хиперповрш у $\mathcal{V}$, док (6.4) даје $\mathcal{J}_X(X)=\mathcal{R}(X,X)X=0$. Зато је Јакобијев оператор за дефинитно $X\in\mathcal{V}$ потпуно одређен својом рестрикцијом

$$\tilde{\mathcal{J}}_X=\mathcal{J}_X\restriction_{X^\perp}\colon X^\perp\to X^\perp,$$

коју зовемо ***редукован Јакобијев оператор***.

Из (6.13), (6.4) и (6.6) следи $R(Y,X,X,Z)=R(Z,X,X,Y)$, те је Јакобијев оператор самоадјунгован,

$$g(\mathcal{J}_X(Y),Z)=g(\mathcal{J}_X(Z),Y).$$

Слично, из (6.4) и (6.6) имамо $R(Y,X,X,Y)=R(X,Y,Y,X)$, одакле добијамо ***компатибилност*** Јакобијевих оператора,

$$g(\mathcal{J}_X(Y),Y)=g(\mathcal{J}_Y(X),X). \tag{6.18}$$

Дакле, Јакобијеви оператори су самоадјунговани ендоморфизми на $\mathcal{V}$ за које важи компатибилност (6.18).

Нека је $(E_1,\dots,E_n)$ нека ортонормирана база квадратног векторског простора $(\mathcal{V},g)$ димензије n. За сваки вектор $X=\sum_{i=1}^n x_iE_i$ имамо $\mathcal{J}_X(E_j)=\sum_{i=1}^n\varepsilon_{E_i}g(\mathcal{J}_X(E_j),E_i)E_i$, те можемо израчунати улазе матрице од $\mathcal{J}_X$ у односу на дату базу,

$$(\mathcal{J}_X)_{ij}=\varepsilon_{E_i}g(\mathcal{J}_X(E_j),E_i)=\varepsilon_{E_i}R(E_j,X,X,E_i)=\varepsilon_{E_i}\sum_{p,q=1}^n R_{jpqi}x_px_q,$$

одакле се јасно види да су они хомогени полиноми степена 2 (квадратне форме) са n променљивих $x_1,\dots,x_n$. Наравно, то такође важи и у односу на базе које нису ортонормиране, јер је $M^{-1}\mathcal{J}_XM$ нова матрица од $\mathcal{J}_X$, где је M матрица преласка.

Лема 6.5. *Улази матрице од $\mathcal{J}_X$ су хомогени полиноми степена 2 у коефицијентима од X.*

Иако смо Јакобијев оператор дефинисали користећи квадратни векторски простор $\mathcal{V}$, важно је напоменути да увек можемо заменити $\mathcal{V} = T_pM$, где је p нека тачка псеудо-Риманове многострукости M. Такође, можемо продужити појам Јакобијевог оператора на целокупно $\mathfrak{X}(M)$ (или барем на тангентно раслојење TM) и задржати терминологију.

6.3 Секциона кривина

Тензор кривине R псеудо-Риманове многострукости (M, g) је прилично компликован, те уводимо често коришћену једноставнију величину коју зовемо секциона кривина. ***Тангентна раван*** σ на M у тачки $p \in M$ је дводимензиони потпростор тангентног простора T_pM. ***Секциона кривина*** κ недегенерисане тангентне равни $\sigma = \mathrm{Span}\{X, Y\}$ у T_pM је дата са

$$\kappa(\sigma) = \kappa(X, Y) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{\varepsilon_X \varepsilon_Y - (g(X, Y))^2}.$$

Приметимо да је именилац $\varepsilon_X\varepsilon_Y - (g(X, Y))^2 = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)g(Y, X)$ заправо детерминанта Грамове матрице за $g\restriction_\sigma$ у односу на базу $X, Y \in T_pM$ у $\sigma = \mathrm{Span}\{X, Y\}$. Како по дефиницији посматрамо само недегенерисане σ, наш именилац по Леми 4.1 није нула. Међутим, не желим да вас превише оптерећујем псеудо-Римановим случајевима, те се можемо фокусирати само на Риманове многострукости. Тада је свака тангентна раван σ на M у тачки $p \in M$ недегенерисана, јер је наш именилац свакако позитиван као детерминанта позитивно дефинитне матрице, а интуитивно он представља квадрат површине паралелограма одређеног паром вектора $X, Y \in T_pM$.

Потребно је проверити да вредност $\kappa(X, Y)$ зависи само од (недегенерисане) равни разапнуте векторима X и Y. Нека $X_1 = \alpha X + \beta Y$ и $Y_1 = \gamma X + \delta Y$ чине другу базу у σ. Промена базе за билинеарну форму g даје

$$\begin{pmatrix} g(X_1, X_1) & g(X_1, Y_1) \\ g(Y_1, X_1) & g(Y_1, Y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(X, X) & g(X, Y) \\ g(Y, X) & g(Y, Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix},$$

те је зато $\varepsilon_{X_1}\varepsilon_{Y_1} - (g(X_1, Y_1))^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \left(\varepsilon_X\varepsilon_Y - (g(X, Y))^2\right)$. Са друге стране, користимо симетрије од R, те добијамо

$$\begin{aligned} R(X_1, Y_1, Y_1, X_1) &= R(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y, Y_1, X_1) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma) R(X, Y, \gamma X + \delta Y, \alpha X + \beta Y), \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 R(X, Y, Y, X). \end{aligned}$$

Како детерминанта матрице преласка није нула имамо $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, одакле добијамо $\kappa(X_1, Y_1) = \kappa(X, Y)$, што значи да је секциона кривина добро дефинисана.

Напоменимо да за дводимензиону Риманову многострукост, постоји само једна секциона кривина у свакој тачки, што је добро позната Гаусова кривина. Секциона кривина је реално-вредносна функција дефинисана на 2-Грасманијан раслојењу над M. Међутим, иако секциона кривина делује једноставније од тензора кривине R, она ипак садржи комплетну информацију.

Најпре можемо видети да оператор кривине зависи само од Јакобијевих оператора, јер користећи (6.1) и (6.2) имамо

$$\begin{aligned}3\mathcal{R}(X,Y)Z &= \mathcal{R}(X,Y)Z + (-\mathcal{R}(Y,X)Z) + (-\mathcal{R}(Y,Z)X - \mathcal{R}(Z,X)Y)\\ &= (\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(X,Z)Y) - (\mathcal{R}(Y,X)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X)\\ &= \mathcal{R}(X,Y+Z)(Y+Z) - \mathcal{R}(X,Y)Y - \mathcal{R}(X,Z)Z\\ &\quad - \mathcal{R}(Y,X+Z)(X+Z) + \mathcal{R}(Y,X)X + \mathcal{R}(Y,Z)Z\\ &= \mathcal{J}_{Y+Z}X - \mathcal{J}_Y X - \mathcal{J}_Z X - \mathcal{J}_{X+Z}Y + \mathcal{J}_X Y + \mathcal{J}_Z Y.\end{aligned}$$

Како је $R(W,Z,Y,X) = R(X,Y,Z,W) = g(\mathcal{R}(X,Y)Z,W)$, имамо

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{3}g((\mathcal{J}_{Y+Z} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z)W - (\mathcal{J}_{Y+W} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_W)Z, X), \tag{6.19}$$

што показује да Јакобијеви оператори у потпуности одређују тензор кривине.

Такође, тензор кривине се да изразити само преко вредности $\mu(X,Y) = R(X,Y,Y,X)$. Како из поларизације

$$2R(Y,X,X,W) = R(Y+W,X,X,Y+W) - R(Y,X,X,Y) - R(W,X,X,W)$$

следи

$$2g(\mathcal{J}_X Y, W) = \mu(Y+W,X) - \mu(Y,X) - \mu(W,X),$$

то се $R(X,Y,Z,W) = g(\mathcal{R}(X,Y)Z,W)$ може расписати помоћу 18 чланова

$$\begin{aligned}6R(X,Y,Z,W) = \;& \mu(X+W,Y+Z) - \mu(X,Y+Z) - \mu(W,Y+Z)\\ &- \mu(X+W,Y) + \mu(X,Y) + \mu(W,Y)\\ &- \mu(X+W,Z) + \mu(X,Z) + \mu(W,Z)\\ &- \mu(Y+W,X+Z) + \mu(Y,X+Z) + \mu(W,X+Z)\\ &+ \mu(Y+W,X) - \mu(Y,X) - \mu(W,X)\\ &+ \mu(Y+W,Z) - \mu(Y,Z) - \mu(W,Z),\end{aligned}$$

где се 4 члана поништавају у паровима за коначан резултат,

$$\begin{aligned}6R(X,Y,Z,W) = \;& \mu(X+W,Y+Z) - \mu(X,Y+Z) - \mu(W,Y+Z)\\ &- \mu(X+W,Y) + \mu(W,Y) - \mu(X+W,Z) + \mu(X,Z)\\ &- \mu(Y+W,X+Z) + \mu(Y,X+Z) + \mu(W,X+Z)\\ &+ \mu(Y+W,X) - \mu(W,X) + \mu(Y+W,Z) - \mu(Y,Z).\end{aligned} \tag{6.20}$$

Алтернативно, можемо израчунати (што сам и урадио у Књизи) да важи

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=0,t=0}\big(\mu(X+sW,Y+tZ) - \mu(X+sZ,Y+tW)\big). \tag{6.21}$$

Овим смо (на два начина) показали да свеукупне вредности за μ у потпуности одређују тензор кривине. У случају недегенерисане равни $\mathrm{Span}\{X,Y\}$ (што је у Римановом случају увек), њена секциона кривина одређује $\mu(X,Y) = R(X,Y,Y,X) = (\varepsilon_X\varepsilon_Y - (g(X,Y))^2)\kappa(X,Y)$, док за дегенерисане равни (у псеудо-Римановом случају) можемо вредности μ извући из непрекидности, као што је урађено у Књизи. Дакле, два алгебарска тензора кривине који имају једнаке секционе кривине морају и сами бити једнаки.

Теорема 6.6. *Вредности $\mu(X,Y) = R(X,Y,Y,X)$ у потпуности одређују тензор кривине. Секциона кривина у потпуности одређује тензор кривине у тачкама где је скаларни производ познат.*

Иако секциона кривина изгледа једноставније од тензора кривине, њена важност произлази из чињенице да познавање свих секционих кривина у потпуности одређује тензор кривине (у тачкама где је скаларни производ познат). Ово се односи и на Јакобијеве операторе, који такође садрже исте информације као и тензор кривине. Ови добро познати резултати дају јединственост тензора кривине и чисто су алгебарске природе.

Природно се поставља питање егзистенције тензора кривине за дате Јакобијеве операторе. Овај проблем је посматрао и решио Андрејић 2022. године [11, Теорема 1], а у Књизи су дати аргументи из [13], где су исправљени пропусти из оригиналног рада, а сама теорема је уопштена на псеудо-Риманов случај и гласи на следећи начин.

Теорема 6.7. *Нека је $\mathcal{K}_X$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ компатибилна фамилија самоаджунгованих ендоморфизама на квадратном векторском простору $\mathcal{V}$ која задовољава $\mathcal{K}_X X = 0$. Тада постоји јединствен алгебарски тензор кривине на $\mathcal{V}$ такав да су $\mathcal{K}_X$ његови Јакобијеви оператори.*

6.4 Константна секциона кривина

Најједноставнији случај псеудо-Риманових многострукости представља простор константне секционе кривине. Нека је (M,g) псеудо-Риманова многострукост таква да је $\kappa(\sigma) = k(p)$ за сваку недегенерисану тангентну раван $\sigma \leqslant T_pM$ и неко фиксирано $k(p) \in \mathbb{R}$. На основу Теореме 6.6 то једнозначно одређује тензор кривине R. Рестрикција на тачку $p \in M$ даје квадратни векторски простор $\mathcal{V} = T_pM$, као и одговарајући алгебарски тензор кривине. Нека је $R = kR^1 \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ алгебарски тензор кривине из Примера 6.6, где је R^1 дефинисано у (6.14). Како је $R(X,Y,Y,X) = k(\varepsilon_X\varepsilon_Y - (g(X,Y)^2)$, имамо $\kappa(X,Y) = k$, те тензор кривине на (M,g) има облик

$$R(X,Y,Z,W) = k\big(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\big),$$

где је $k \in \mathfrak{F}(M)$. Штавише, у димензији $n \geqslant 3$, имамо следећу занимљиву теорему коју је поставио Шур[3] [100].

Теорема 6.8. *Нека је (M,g) повезана псеудо-Риманова многострукост димензије $n \geqslant 3$. Ако секциона кривина $\kappa(\sigma)$ не зависи од равни $\sigma \leqslant T_pM$, већ само од тачке $p \in M$, онда је κ константно.*

Доказ. Секциона кривина у свакој тачки $p \in M$ је константа $k(p)$, те тензор кривине мора бити $R = kR^1$. Како је ∇ метричка повезаност, из $\nabla g = 0$ имамо

$$\begin{aligned}(\nabla_V R^1)(X,Y,Z,W) = \;& V(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)) \\ & - (g(Y,Z)g(\nabla_V X,W) - g(\nabla_V X,Z)g(Y,W)) \\ & - (g(\nabla_V Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(\nabla_V Y,W)) \\ & - (g(Y,\nabla_V Z)g(X,W) - g(X,\nabla_V Z)g(Y,W)) \\ & - (g(Y,Z)g(X,\nabla_V W) - g(X,Z)g(Y,\nabla_V W)) = 0,\end{aligned}$$

[3] Friedrich Heinrich Schur (1856–1932), немачки математичар

те је R^1 паралелно тензорско поље, $\nabla_V R^1 = 0$. Одавде следи

$$\nabla_V R = \nabla_V(k \otimes R^1) = \nabla_V k \cdot R^1 + k \cdot \nabla_V R^1 = (Vk)R^1,$$

те важи

$$\begin{aligned}
(\nabla_V R)(X,Y,Z,W) &= (Vk)(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)),\\
(\nabla_X R)(Y,V,Z,W) &= (Xk)(g(V,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(V,W)),\\
(\nabla_Y R)(V,X,Z,W) &= (Yk)(g(X,Z)g(V,W) - g(V,Z)g(X,W)).
\end{aligned}$$

Сума претходних једнакости се анулира по другом Бјанкијевом идентитету (6.10), те је

$$\begin{aligned}
g(((Vk)g(Y,Z) - (Yk)g(V,Z))X + ((Xk)g(V,Z) - (Vk)g(X,Z))Y&\\
+ ((Yk)g(X,Z) - (Xk)g(Y,Z))V, W) &= 0
\end{aligned}$$

за свако W, док из недегенерисаности метрике

$$((Vk)g(Y,Z) - (Yk)g(V,Z))X + ((Xk)g(V,Z) - (Vk)g(X,Z))Y + ((Yk)g(X,Z) - (Xk)g(Y,Z))V = 0$$

важи за свако $X,Y,Z,V \in \mathfrak{X}(M)$. Рестрикцијом претходне једнакости на тачку $p \in M$, захваљујући Примеру 2.24 добијамо да

$$g_p((V_pk)Y_p - (Y_pk)V_p, Z_p)X_p + g_p((X_pk)V_p - (V_pk)X_p, Z_p)Y_p + g_p((Y_pk)X_p - (X_pk)Y_p, Z_p)V_p = 0$$

важи за све $X_p, Y_p, Z_p, V_p \in T_pM$. Фиксирајмо $X_p \in T_pM$, те како је $n \geqslant 3$, можемо пронаћи $Y_p, V_p \in T_pM$ такве да су вектори X_p, Y_p, V_p линеарно независни. Та линеарна независност доноси нула коефицијенте у претходној једнакости, што даје

$$g_p((Y_pk)X_p - (X_pk)Y_p, Z_p) = 0.$$

Ова једнакост важи за свако Z_p, те недегенерисаност од g_p даје $(Y_pk)X_p - (X_pk)Y_p = 0$, док линеарна независност повлачи $X_pk = 0$. Како то важи за свако $p \in M$ имамо $Xk = 0$ за $X \in \mathfrak{X}(M)$, те је по Примеру 5.1 k локално константно. Како је многострукост M повезана, k је константно. □

Простор константне секционе кривине је псеудо-Риманова многострукост (M,g) за коју је секциона кривина $\kappa(\sigma)$ константна, што је еквивалентно томе да је $\mathcal{R} = \kappa\mathcal{R}^1$ за $\kappa \in \mathbb{R}$. Под скалирањем подразумевамо процес у којем метрику g мењамо метриком $\widetilde{g} = \lambda g$ за неку константу $\lambda > 0$ (множење метрике негативним бројем није захвално јер окреће сигнатуру и тако есенцијално мења многострукост). Након скалирања добијамо $\widetilde{\mathcal{R}}^1(X,Y)Z = \lambda\mathcal{R}^1(X,Y)Z$, док су одговарајуће везе

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}, \quad \widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y, \quad \widetilde{\mathcal{R}}(X,Y)Z = \mathcal{R}(X,Y)Z, \quad \widetilde{\kappa} = \kappa/\lambda.$$

Дакле, постоје три суштинска случаја за тензор кривине простора константне секционе кривине, $R = R^1$ (са $\kappa = 1$), $R = 0$ (са $\kappa = 0$) и $R = -R^1$ (са $\kappa = -1$). Одговарајући модел простори за Риманове многострукости су, редом, сфера $\mathbf{S}^n$, еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ и хиперболички простор $\mathbf{H}^n$.

Пример 6.7. За хиперболичку полураван $\mathbf{HU}^2$ из Примера 5.8 имали смо израчунато $g_{11} = g_{22} = 1/(x_2)^2$, као и $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0$, $\Gamma^2_{11} = -\Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{22} = 1/x_2$. Из формуле (6.3) имамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^1_{121} &= \partial_1\Gamma^1_{21} - \partial_2\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} = 0,\\
\mathcal{R}^2_{121} &= \partial_1\Gamma^2_{21} - \partial_2\Gamma^2_{11} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} = (1-1+1)/(x_2)^2 = 1/(x_2)^2,
\end{aligned}$$

односно $\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_1 = (1/(x_2)^2)\partial_2$. Важи $R(\partial_1,\partial_2,\partial_1,\partial_2) = 1/(x_2)^4$, те је $\kappa = -1$. △

У Римановој геометрији, секциона кривина κ може се видети као непрекидна реална функција на Грасмановом раслојењу дводимензионих равни Риманове многострукости M. Одатле следи да је κ на компактном подскупу од M ограничено, односно κ достиже своје минималне и максималне вредности [21, Секција 9.3]. Због тога су доње и горње границе секционе кривине интензивно проучаване у Римановој геометрији.

Међутим, у псеудо-Римановој геометрији, нека ограничења за κ уобичајено повлаче да је κ константно. У Књизи сам доказао две такве теореме, прву је 1979. поставио Кулкарни [72], а другу су 1980. поставили Дахцер и Номицу[4] [39].

Теорема 6.9. *Нека је κ функција секционе кривине недефинитног алгебарског тензора кривине. Ако је κ ограничено одозго или ограничено одоздо, тада је κ константно.*

Теорема 6.10. *Нека је κ функција секционе кривине недефинитног алгебарског тензора кривине. Ако је κ на недефинитним равнима ограничено и одозго и одоздо, тада је κ константно.*

Наравно, као и раније, ако је функција секционе кривине на недефинитним равнима повезане недефинитне многострукости M димензије $n \geqslant 3$ ограничена и одозго и одоздо, тада је M простор константне секционе кривине. Међутим, ограничење само са једне стране на недефинитним равнима не повлачи да је κ константна функција.

6.5 Ричијев тензор

Контракција је важна операција која нам омогућава да од постојећих тензора добијемо нове тензоре. Како често имамо потребу да вредност новог тензора у некој тачки многострукости запишемо што једноставније, користићемо локални ортонормирани покретни репер $(E_1, \ldots, E_n)$ из Теореме 4.13. Њему дуални покретни корепер обележимо са $(E_1^*, \ldots, E_n^*)$, а лако се проверава да важи $E_i^* = \varepsilon_{E_i} E_i^\flat$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. Напоменимо да је ова секција писана у псеудо-Римановом случају, а како нас занима само Риманов случај, слободно можете игнорисати епсилоне за векторе из ортонормиране базе, јер је онда $\varepsilon_{E_i} = 1$.

За неко тензорско поље A, контракција новог коваријантног аргумента потпуног коваријантног извода ∇A са неким од оригиналних аргумената зове се ***дивергенција*** и обележава са $\operatorname{div} A$. Углавном се употребљава у два специјална случаја у којима постоји јединствена дивергенција.

У првом случају посматрамо произвољно векторско поље $V \in \mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}_0^1(M)$, где постављамо

$$\operatorname{div} V = C(\nabla V) \in \mathfrak{F}(M).$$

У ортонормираном покретном реперу за $V = \sum_j V^j E_j$ имамо

$$\begin{aligned}\operatorname{div} V &= \sum_i (\nabla V)_i^i = \sum_i (\nabla_{E_i} V)(E_i^*) = \sum_i E_i^*(\nabla_{E_i} V) = \sum_i \varepsilon_{E_i} g(\nabla_{E_i} V, E_i) \\ &= \sum_i \varepsilon_{E_i} g\left(E_i, \sum_j E_i(V^j) E_j + \sum_j V^j \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k\right) = \sum_i E_i(V^i) + \sum_{i,j} V^j \Gamma_{ij}^i.\end{aligned}$$

У природним координатама на $\mathbb{R}_\nu^n$ важи $\operatorname{div} V = \sum_i \partial V^i / \partial \pi_i$, што је уобичајена формула на $\mathbb{R}^3$.

[4] Katsumi Nomizu (1924–2008), јапанско-амерички матемаричар

Пример 6.8. Дивергенција градијента глатке функције $f \in \mathfrak{F}(M)$ назива се ***Лапласијан***[5], $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \in \mathfrak{F}(M)$. По Леми 5.4 повисилица комутира са коваријантним изводом, те је

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = C(\nabla(df^\sharp)) = C((\nabla df)^\sharp) = C((\nabla\nabla f)^\sharp) = \operatorname{tr}_g(\nabla^2 f),$$

одакле следи да је Лапласијан заправо траг Хесијана. У ортонормираном покретном реперу имамо

$$\begin{aligned}\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) &= \sum_i \varepsilon_{E_i} E_i E_i f + \sum_{i,j} \varepsilon_{E_j}(E_j f)\Gamma^i_{ij} \\ = \operatorname{tr}_g(\nabla^2 f) &= \sum_i \varepsilon_{E_i} E_i E_i f - \sum_{i,j} \varepsilon_{E_i}(E_j f)\Gamma^j_{ii},\end{aligned}$$

одакле у природним координатама на $\mathbb{R}^n_\nu$ имамо $\Delta f = \sum_i \varepsilon_{E_i} \partial^2 f/\partial \pi_i^2$, што се редукује на уобичајену формулу за $\mathbb{R}^3$. △

У другом случају посматрамо симетрично коваријантно тензорско поље A реда 2, где дефинишемо

$$\operatorname{div} A = C((\nabla A)^\sharp) \in \mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M),$$

што у ортонормираном покретном реперу рачунамо са

$$(\operatorname{div} A)(X) = \sum_i ((\nabla A)^\sharp)(E_i^*, X, E_i) = \sum_{i,j} g^{ij}(\nabla A)(X, E_j, E_i) = \sum_i \varepsilon_{E_i}(\nabla_{E_i} A)(X, E_i).$$

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост, $\operatorname{Sym} A = A \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ и $f \in \mathfrak{F}(M)$. Тада је у ортонормираном покретном реперу

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} fA)(X) &= \sum_i \varepsilon_{E_i}(\nabla_{E_i} fA)(X, E_i) = \sum_i \varepsilon_{E_i}\big((\nabla_{E_i} f)A(X, E_i) + f(\nabla_{E_i} A)(X, E_i)\big) \\ &= A\left(X, \sum_i \varepsilon_{E_i}(E_i f)E_i\right) + f\sum_i \varepsilon_{E_i}(\nabla_{E_i} A)(X, E_i) = A(\operatorname{grad} f, X) + f(\operatorname{div} A)(X).\end{aligned}$$

Посебно, у случају $A = g$ за $f \in \mathfrak{F}(M)$ добијамо $(\operatorname{div}(fg))(X) = g(\operatorname{grad} f, X) = df(X)$, што даје корисну формулу

$$\operatorname{div}(fg) = df. \tag{6.30}$$

Како су коваријантни тензори вишег реда прилично компликовани, често је корисно конструисати једноставније тензоре који сажимају неке информације. Ако пођемо од коваријантних тензора, попут тензора кривине R, можемо посматрати траг, односно контракцију повисилице. Већ смо имали $R = \mathcal{R}^\flat$, те нам је потребно $\operatorname{tr}_g R = C(R^\sharp) = C\mathcal{R}$. Међутим, неопходно је нагласити који коваријантни индекс ћемо упарити са контраваријантним индексом. Ако покушамо са трећим коваријантним индексом имамо

$$\sum_k \mathcal{R}^k_{ijk} = \sum_k \sum_l g^{kl} R_{ijkl} = -\sum_l \sum_k g^{lk} R_{ijlk} = -\sum_l \mathcal{R}^l_{ijl},$$

што је могуће само ако је $\sum_k \mathcal{R}^k_{ijk} = 0$, те трећи индекс није погодан за контракцију. Преостаје избор између првог и другог индекса, али из симетрије $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ важи

[5] Pierre-Simon Laplace (1749–1827), француски математичар, физичар и астроном

$\sum_i \mathcal{R}^i_{jik} = -\sum_i \mathcal{R}^i_{ijk}$, те се ове могућности ненула контракције разликују у знаку. Ако се определимо за први индекс, добијамо ***Ричијев тензор***[6], $\mathrm{Ric} = \mathrm{tr}_g R = C\mathcal{R} \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ за који важи

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Tr}(Z \mapsto \mathcal{R}(Z,X)Y) = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}(X,Y)).$$

Ричијев тензор је очигледно симетричан, $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$, а ако са

$$R_{ij} = \sum_l \mathcal{R}^l_{lij} = \sum_{l,k} g^{lk} R_{lijk},$$

обележимо његове компоненте, имамо $\mathrm{Ric} = \sum_{i,j} R_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$, што у ортонормираном покретном реперу даје

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_i \varepsilon_{E_i} g(\mathcal{R}(E_i,X)Y, E_i) = \sum_i \varepsilon_{E_i} R(E_i,X,Y,E_i). \tag{6.31}$$

Скаларна кривина је траг Ричијевог тензора, $\mathrm{Sc} = \mathrm{tr}_g \mathrm{Ric} = C(\mathrm{Ric}^\sharp) \in \mathfrak{F}(M)$, те за њу важи $\mathrm{Sc} = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,k,l} g^{ij} g^{lk} R_{lijk}$, што у ортонормираном покретном реперу гласи

$$\mathrm{Sc} = \sum_{i,j} \varepsilon_{E_i}\varepsilon_{E_j} R_{ijji}.$$

Ако посматрамо локални ортонормирани покретни репер у тачки $p \in M$, односно ортонормирану базу $(E_1,\dots,E_n)$ у T_pM, можемо употребити секциону кривину да опишемо Ричијев тензор и скаларну кривину,

$$\varepsilon_{E_k}\,\mathrm{Ric}_p(E_k,E_k) = \varepsilon_{E_k}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} R_p(E_i,E_k,E_k,E_i) = \sum_{i}^{i\neq k} \kappa(E_i,E_k),$$
$$\mathrm{Sc}(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{E_i}\varepsilon_{E_j} R_p(E_i,E_j,E_j,E_i) = \sum_{i,j}^{i\neq j} \kappa(E_i,E_j).$$

Пример 6.9. Ричијев тензор је одређен секционим кривинама, али у општем случају садржи мање информација. Међутим, у малим димензијама ($n = 2,3$) Ричијев тензор у потпуности одређује тензор кривине. У димензији $n = 3$ за недегенерисану раван σ поставимо ортонормирану базу (E_1,E_2,E_3) такву да је $\sigma = \mathrm{Span}\{E_1,E_2\}$. Тада је $\varepsilon_k R_{kk} = \sum_{i\neq k} \kappa(E_k,E_i)$, одакле следи $\kappa(\sigma) = \kappa(E_1,E_2) = (\varepsilon_1 R_{11} + \varepsilon_2 R_{22} - \varepsilon_3 R_{33})/2$. △

Поћимо од другог Бјанкијевог идентитета који се може изразити кроз компоненте новог коваријантног тензора $T \in \mathfrak{T}^0_5(M)$ са

$$T_{ijklm} = \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0,$$

где је $\nabla_i R_{jklm} = (\nabla R)_{jklmi}$. Након двоструке контракције, користећи траг по индексима i и m и траг по индексима j и l, важи $\sum_{i,m} g^{im} \sum_{j,l} g^{jl} T_{ijklm} = 0$. Рачун у некој тачки $p \in M$ изводимо преко нормалних координата центрираних у тој тачки. Како је $\nabla g = 0$, траг комутира са коваријантним изводом,

$$\sum_{i,m} g^{im} \nabla_{E_i} \sum_{j,l} g^{jl} R_{jklm} + \sum_{j,l} g^{jl} \nabla_{E_j} \sum_{i,m} g^{im} R_{kilm} + \nabla_{E_k} \sum_{i,m} g^{im} \sum_{j,l} g^{jl} R_{ijlm} = 0,$$

[6] Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), италијански математичар

и зато
$$\nabla_{E_k}\operatorname{Sc} = 2\sum_{i,m} g^{im}\nabla_{E_i}R_{km}.$$
Међутим, имамо
$$\operatorname{div}\operatorname{Ric}(E_k) = \sum_{i,m} g^{im}(\nabla_{E_i}\operatorname{Ric})(E_k, E_m) = \sum_{i,m} g^{im}\nabla_{E_i}(\operatorname{Ric}(E_k, E_m)),$$
што нас доводи до једнакости $\nabla_{E_k}\operatorname{Sc} = 2\operatorname{div}\operatorname{Ric}(E_k)$. Одавде идентитет $2\operatorname{div}\operatorname{Ric} = \nabla\operatorname{Sc}$ важи у нормалним координатама, али како је у питању тензорска једнакост важиће у било којој бази. У питању је идентитет који лежи у основама опште теорије релативитета, а који зовемо ***контракован Бјанкијев идентитет***.

Теорема 6.11. *За псеудо-Риманову многострукост важи* $2\operatorname{div}\operatorname{Ric} = d\operatorname{Sc}$.

За псеудо-Риманову многострукост (M, g) кажемо да је ***Ајнштајнова***[7] уколико је њен Ричијев тензор пропорционалан метрици, односно уколико је $\operatorname{Ric} = \lambda g$ за неку константу $\lambda \in \mathbb{R}$. Уколико извучемо трагове, $\operatorname{Sc} = \operatorname{tr}_g \operatorname{Ric} = \operatorname{tr}_g(\lambda g) = \lambda \operatorname{tr}_g g = \lambda n$, видимо да Ајнштајнова многострукост има константну скаларну кривину.

Пример 6.10. Уколико је (M, g) простор константне секционе кривине κ, тада имамо
$$R_{ij} = \sum_{l,k} g^{lk}R_{lijk} = \sum_{l,k} \kappa g^{lk}(g_{lk}g_{ij} - g_{lj}g_{ik}) = (n-1)\kappa g_{ij},$$
односно $\operatorname{Ric} = (n-1)\kappa g$, те је (M, g) Ајнштајнова и важи $\operatorname{Sc} = n(n-1)\kappa$. △

Релаксираније, можемо рећи да је (M, g) Ајнштајнова у тачки $p \in M$ уколико је одговарајући алгебарски тензор кривине у тој тачки Ајнштајнов, односно уколико је Ричијев тензор скаларни умножак метрике у p. При овим дефиницијама имамо наредно добро познато тврђење за Ајнштајнове многострукости (видети Бесе[8] [19, Теорема 1.97]).

Теорема 6.12. *Ако је повезана псеудо-Риманова многострукост димензије* $n \geqslant 3$ *Ајнштајнова у свакој тачки онда је она Ајнштајнова.*

Доказ. Како је (M, g) Ајнштајнова у свакој тачки, то важи $\operatorname{Ric} = \lambda g$ за неку функцију $\lambda \in \mathfrak{F}(M)$, те узимајући трагове у односу на g имамо $\operatorname{Sc} = n\lambda$. Из Теореме 6.11 и формуле (6.30) добијамо
$$n\nabla\lambda = \nabla\operatorname{Sc} = 2\operatorname{div}\operatorname{Ric} = 2\operatorname{div}(\lambda g) = 2\nabla\lambda.$$
Дакле, за $n \neq 2$ важи $\nabla\lambda = 0$, одакле је λ локална константа на повезаној многострукости, те је зато и глобална константа, што такође важи за Sc. □

Пример 6.11. У претходном доказу можемо избећи коришћење Теореме 6.11 и директно рачунати у ортонормираном покретном реперу ($g_{ij} = g^{ij} = \varepsilon_i\delta_{ij}$),
$$\begin{aligned}\nabla_{E_k}\operatorname{Sc} &= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j\nabla_k R_{ijji} = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j(-\nabla_i R_{jkji} - \nabla_j R_{kiji}) = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j\nabla_i R_{jkij} + \sum_{j,i=1}^{n} \varepsilon_j\varepsilon_i\nabla_j R_{ikji}\\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\nabla_i R_{jkij} = 2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}\nabla_i R_{jkil} = 2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\nabla_{E_i}R_{ki} = 2\nabla_{E_k}\lambda,\end{aligned}$$
те је зато $n\nabla\lambda = \nabla\operatorname{Sc} = 2\nabla\lambda$. △

[7] Albert Einstein (1879–1955), немачки теоријски физичар
[8] Arthur Besse, псеудоним групе француских геометричара коју је предводио Марсел Берже

По Теореми 6.4 алгебарски тензор кривине у димензији $n = 3$ има свега шест независних компоненти, док за $n = 2$ постоји само једна. Због тога у малим димензијама можемо добити занимљиве резултате.

Пример 6.12. Сваки дводимензиони алгебарски тензор кривине је Ајнштајнов. Како је $n = 2$, све компоненте тензора кривине $R_{ij} = \sum_{k,l} g^{kl} R_{kijl}$ могу се изразити само преко R_{1221}. Имамо $R_{11} = g^{22} R_{1221}$, $R_{12} = -g^{12} R_{1221}$, $R_{22} = g^{11} R_{1221}$, што заправо даје $\mathrm{Ric} = (R_{1221}/\det g) g$. △

Пример 6.13. Из Примера 6.9, Ричијев тензор за $n = 3$ у потпуности одређује секциону кривину, а самим тим и тензор кривине. Посебно, ако је алгебарски тензор кривине Ајнштајнов, онда има константну секциону кривину. Ако је додатно многострукост повезана, онда имамо простор константне секционе кривине. △