Глава 5

ПОВЕЗАНОСТ

5.1 Коваријантни изводи

У циљу увођења кривине на псеудо-Римановим многострукостима неопходно је проучавати геодезијске, псеудо-Риманова уопштења правих линија. У оригиналном смислу, геодезијска је најкраћа рута између две тачке на површи, те делује примамљиво дефинисати геодезијске као криве које минимизују дужину, барем између блиских тачака. Међутим, псеудо-Риманове многострукости са недефинитном метриком нису метрички простори, те њихове геодезијске не минимизују растојања. Чак иако ограничимо посматрања само на Риманове многострукости, постављање минимизујућег својства за дефиницију има великих техничких потешкоћа.

Зато ћемо изабрати и уопштити неку другу особину правих линија. Добар кандидат је својство да су праве линије једине криве у еуклидском простору које имају параметризације са убрзањем нула, што преносимо на псеудо-Риманове многострукости.

Нека је $\gamma\colon I \to M$ крива на псеудо-Римановој многострукости (M, g). Вектор брзине у тренутку $t \in I$ представља извод $\gamma'(t)$, а нови извод $\gamma''(t)$ доводи нас до убрзања. Дакле, потребно је направити количник одузимањем вектора $\gamma'(t+h) \in T_{\gamma(t+h)}M$ и $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$, што није згодно јер они живе у различитим просторима. У случају апстрактне многострукости ова разлика нема смисла, те нам је потребан начин да упоредимо вредности векторског поља у различитим тачкама, односно да повежемо блиске тангентне просторе. Та повезаност је додатна информација на многострукости која омогућава диференцирање векторских поља као и интерпретацију убрзања криве.

Размотримо најпре дешавања у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$. Функцију $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ можемо диференцирати у тачки $p \in \mathbb{R}^n$ у правцу вектора $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$ са

$$D_{X_p} f = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tX_p) - f(p)}{t} = (f \circ \gamma)'(0) = \gamma'(0)f = X_p(f), \tag{5.1}$$

где је $\gamma(t) = p + tX_p$. На сличан начин векторско поље $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ диференцирамо са

$$\begin{aligned} D_{X_p} Y &= \lim_{t\to 0} \frac{Y(p+tX_p) - Y(p)}{t} = \sum_{i=1}^n \lim_{t\to 0} \frac{Y^i(p+tX_p)\partial_i - Y^i(p)\partial_i}{t} \\ &= \sum_{i=1}^n D_{X_p} Y^i \partial_i = \sum_{i=1}^n X_p(Y^i)\partial_i. \end{aligned} \tag{5.2}$$

У случају произвољне многострукости M, која није нужно смештена у неки еуклидски простор, можемо искористити резултат из (5.1) и диференцирати функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ у правцу вектора $X_p \in T_pM$ са $\nabla_{X_p} f = X_p(f)$. Међутим, у општем случају не постоји канонска база тангентног простора T_pM, те је резултат из (5.2) неупотребљив директно. Како не постоји канонски начин да дефинишемо диференцирање векторских поља на апстрактној многострукости, користимо формулу (5.2) да установимо особине које $D_{X_p}Y$ поседује у $\mathbb{R}^n$, да бисмо преко њих засновали општу теорију.

За векторско поље $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ дефинишемо $D_X Y$ са $(D_X Y)_p = D_{X_p} Y$ за свако $p \in \mathbb{R}^n$. Како смо из (5.2) установили $(D_X Y)_p = \sum_{i=1}^n X_p(Y^i)(\partial_i)_p$, то векторска поља X и Y доносе ново векторско поље

$$D_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i)\partial_i \tag{5.3}$$

и $\mathbb{R}$-билинеарну бинарну операцију $D\colon \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Очигледна је $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$-линеарност по првом аргументу, док по другом аргументу имамо Лајбницовост, јер за $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ важи

$$D_X(fY) = \sum_{i=1}^n X(fY^i)\partial_i = \sum_{i=1}^n (Xf)Y^i\partial_i + \sum_{i=1}^n fX(Y^i)\partial_i = (Xf)Y + fD_X Y.$$

Уочене особине нас мотивишу да на произвољној многострукости уведемо операцију повезаности.

Повезаност (***конексија***, *connection, affine connection, linear connection*) на многострукости M је $\mathbb{R}$-билинеарно пресликавање $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ са ознаком $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, које је $\mathfrak{F}(M)$-линеарно по првом аргументу, а Лајбниције по другом аргументу. Симбол ∇ читамо „набла“ или „дел“, док $\nabla_X Y$ зовемо ***коваријантни извод*** од Y у односу на X.

За произвољно $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ и $f, h \in \mathfrak{F}(M)$, можемо записати формуле коваријантног извода на следећи начин. Како је повезаност $\mathfrak{F}(M)$-линеарна по првом аргументу, то имамо

$$\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z. \tag{5.4}$$

Повезаност није $\mathfrak{F}(M)$-линеарна по другом аргументу, већ само $\mathbb{R}$-линеарна,

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \tag{5.5}$$

док одступање од $\mathfrak{F}(M)$-линеарности видимо кроз Лајбницово правило

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y. \tag{5.6}$$

Мотивациона операција D дефинисана са (5.3) свакако испуњава услове дефиниције и зовемо је ***стандардна повезаност*** на $\mathbb{R}^n$.

Коваријантни извод ∇_X у односу на векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ продужава се за произвољно тензорско поље на M. Природно имамо $\nabla_X f = Xf$ за $f \in \mathfrak{F}(M)$, док $\nabla_X Y$ формулама (5.5) и (5.6) комплетира услове Теореме 3.16, одакле постоји јединствен извод тензорског поља на M који уопштава коваријантни извод.

За произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ имамо $\nabla_X A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, те додатно дефинишемо пресликавање $\nabla A\colon \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^{s+1} \to \mathfrak{F}(M)$ са

$$\nabla A(\omega_1, \ldots, \omega_r, Y_1, \ldots, Y_s, X) = (\nabla_X A)(\omega_1, \ldots, \omega_r, Y_1, \ldots, Y_s).$$

Како је $\nabla_X A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ то ∇A јесте $\mathfrak{F}(M)$-мултилинеарно по првих $r + s$ аргумената, а из (5.4) је $\mathfrak{F}(M)$-линеарно по последњем аргументу. Ново тензорско поље $\nabla A \in \mathfrak{T}^r_{s+1}(M)$

добијено на овакав начин зовемо ***потпун коваријантни извод*** од A. Кажемо да је тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ ***паралелно*** ако је $\nabla A = 0$.

Пример 5.1. За $f \in \mathfrak{F}(M)$ имамо $(\nabla f)(X) = \nabla_X f = Xf = df(X)$, те је потпун коваријантни извод функције једнак њеном диференцијалу, $\nabla f = df$. Додатно, уколико је $\nabla f = 0$, то је $df = 0$, а како се диференцијал поистовећује са тангентним пресликавањем имамо $Tf = 0$, те из доказа Леме 2.20 видимо да је f локална константа. Дакле, ако је $\nabla f = 0$, то је f локално константно, а за повезану многострукост M и глобално константно. △

Пример 5.2. Коваријантни тензор реда два $\nabla^2 f = \nabla(\nabla f)$ зовемо ***Хесијан***[1] од f. Ако са C обележимо $(1,1)$ контракцију, рачун даје

$$\begin{aligned}\nabla_X(\nabla_Y f) &= \nabla_X(\nabla f(Y)) = \nabla_X(C(\nabla f \otimes Y)) = C(\nabla_X(\nabla f \otimes Y)) = C(\nabla_X \nabla f \otimes Y + \nabla f \otimes \nabla_X Y)\\ &= (\nabla_X \nabla f)(Y) + \nabla f(\nabla_X Y) = \nabla^2 f(Y,X) + \nabla_{\nabla_X Y} f,\end{aligned}$$

одакле следи $\nabla^2 f(Y,X) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$. △

Иако је повезаност дефинисана на глобалним векторским пољима, она је заправо локални оператор, о чему говори наредна теорема.

Теорема 5.1. *Нека је ∇ повезаност на многострукости M. Вредност векторског поља $\nabla_X Y$ у $p \in M$ зависи само од вредности за $Y \in \mathfrak{X}(M)$ у околини од p и вредности за $X \in \mathfrak{X}(M)$ у p.*

Доказ. Зависност по компоненти Y као извод тензора имамо у Теореми 3.15, док зависност по компоненти X видимо у Теореми 3.13 ако за фиксирано Y посматрамо $\mathfrak{T}^1_1(M) \ni T\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ дато са $T(X) = \nabla_X Y$. □

Нека је $V \in T_pM$ тангентни вектор у тачки $p = \pi(V) \in M$, а $Z \in \mathfrak{X}(U)$ векторско поље где је $U \subseteq M$ околина тачке p. Теорема 5.1 нам омогућава да добро дефинишемо $\nabla_V Z = (\nabla_X Y)_p$, где су $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ произвољна векторска поља за која важи $X_p = V$ и $Y\restriction_U = Z$.

Нека је ∇ повезаност на n-многострукости M, а $(E_1, \dots, E_n)$ локални покретни репер над отвореним подскупом $U \subseteq M$. Најчешће је то координатни покретни репер са $E_i = \partial_i$, али је корисно извести рачун у општем случају. За $1 \leqslant i,j \leqslant n$ коваријантни извод $\nabla_{E_i} E_j$ се може изразити у терминима тог покретног репера са

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} E_k.$$

На овај начин добијамо n^3 функција $\Gamma^k_{ij} \in \mathfrak{F}(U)$ које зовемо ***Кристофелови симболи***[2] од ∇ у односу на дати покретни репер. Ако је $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ и $Y = \sum_{j=1}^n Y^j E_j$, онда је

$$\begin{aligned}\nabla_X Y = \nabla_X\Big(\sum_j Y^j E_j\Big) &= \sum_j (XY^j) E_j + \sum_j Y^j \nabla_{\sum_i X^i E_i} E_j\\ &= \sum_j (XY^j) E_j + \sum_{i,j} X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j = \sum_k (XY^k) E_k + \sum_{i,j,k} X^i Y^j \Gamma^k_{ij} E_k,\end{aligned}$$

[1] Ludwig Otto Hesse (1811–1874), немачки математичар
[2] Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), немачки математичар и физичар

одакле следи

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(XY^k + \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) E_k,$$

што значи да је повезаност на U у потпуности одређена својим Кристофеловим симболима. У случају координатног покретног репера, претходна формула се своди на једнакост

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(X(Y(x_k)) + \sum_{i,j=1}^{n} X(x_i) Y(x_j) \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{5.7}$$

одакле се лако може закључити локалност повезаности из Теореме 5.1.

Штавише, у случају да се гладак атлас многострукости састоји од само једне карте, $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ је глобални покретни репер и испоставља се да произвољан избор n^3 глатких функција $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}(M)$ помоћу једнакости (5.7) дефинише повезаност ∇. Најпре видимо да за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ очигледно имамо $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$. Такође је очигледна $\mathbb{R}$-линеарност по Y и $\mathfrak{F}(M)$-линеарност по X. Преостаје још Лајбницовост по Y што је једноставан праволинијски рачун.

Пример 5.3. Ако све Кристофелове симболе поставимо да буду нула, из формуле (5.7) добијамо $\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} XY^k \partial_k$ што је стандардна повезаност $D_X Y$ за $M = \mathbb{R}^n$. △

Пример 5.4. Произвољан избор глатких функција $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}(U_\alpha)$ генерише повезаност ∇^α на свакој координатној околини U_α. За разбијање јединице ψ_α које је подређено атласу можемо поставити $\nabla_X Y = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y$, што нам омогућава да конструишемо приличан број повезаности на многострукости M. Глаткоћа се лако види, као и $\mathbb{R}$-линеарност по Y и $\mathfrak{F}(M)$-линеарност по X. Што се тиче Лајбницовости по Y, неће свака линеарна комбинација повезаности чинити повезаност, али због $\sum_\alpha \psi_\alpha = 1$ имамо $\nabla_X(fY) = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha(fY) = \sum_\alpha \psi_\alpha((Xf)Y + f\nabla_X^\alpha Y) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$. △

5.2 Леви-Чивита повезаност

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост и нека је ∇ повезаност на M. Кажемо да је повезаност ∇ ***метричка*** (или да чува метрику) ако је g паралелно тензорско поље, $\nabla g = 0$. За метричку повезаност за $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ имамо

$$0 = (\nabla g)(Y, Z, X) = (\nabla_X g)(Y, Z) = \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z),$$

што даје слагање метрике g и повезаности ∇,

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \tag{5.8}$$

Пресликавање $\tau \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ дефинисано са $\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ зовемо ***торзија***. Торзија је евидентно $\mathfrak{F}(M)$-билинеарно пресликавање и самим тим $\tau \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ (видети Пример 3.23). Кажемо да је повезаност ***симетрична*** уколико је без торзије, односно $\tau = 0$, што за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ даје једнакост

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \tag{5.9}$$

Како је комутатор координатних векторских поља једнак нули, то се симетричност повезаности огледа у једнакости $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$, односно у симетрији $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ између Кристофелових симбола у односу на координатни покретни репер.

Пример 5.5. У Примеру 5.2 смо са $\nabla^2 f(Y,X) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$ изразили Хесијан функције $f \in \mathfrak{F}(M)$, одакле следи $\nabla^2 f(X,Y) - \nabla^2 f(Y,X) = (\tau(X,Y))f$, те је симетричност повезаности еквивалентна симетричности Хесијана. △

Често захтевамо да повезаност задовољи последња два услова, што даје нови концепт повезаности у којем учествује метрика. ***Леви-Чивиша ӣовезаносш***[3] на псеудо-Римановој многострукости (M,g) је симетрична метричка повезаност. Другим речима, Леви-Чивита повезаност је пресликавање $\nabla\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ које задовољава формуле (5.4), (5.5), (5.6), (5.8) и (5.9) за свако $f,h\in\mathfrak{F}(M)$ и све $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$, а испоставља се да све њих можемо заменити једном општом једнакошћу. Посматрајмо следећи израз,

$$X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)).$$

Како је ∇ метричка, након три примене формуле (5.8) добијамо

$$g(X,\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - g(Y,\nabla_Z X - \nabla_X Z) + g(Z,\nabla_X Y + \nabla_Y X).$$

Како је ∇ симетрична, трострука примена формуле (5.9) даје

$$g(X,[Y,Z]) - g(Y,[Z,X]) - g(Z,[X,Y]) + 2g(\nabla_X Y, Z).$$

Одавде добијамо једнакост

$$2g(\nabla_X Y,Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]), \quad (5.10)$$

коју зовемо ***Косилова формула***[4], а која је веома корисна јер одређује Леви-Чивита повезаност.

Теорема 5.2. *Пресликавање $\nabla\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ је Леви-Чивиша ӣовезаносш ако и само ако за свако $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ важи Косилова формула* (5.10).

Доказ. Већ смо се уверили да Леви-Чивита повезаност ∇ задовољава Косилову формулу, јер је изведена из њених особина. Обратно, остаје нам да докажемо формуле (5.4), (5.5), (5.6), (5.8) и (5.9) под претпоставком да (5.10) важи за свако $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$.

Користићемо чињеницу да $g(V,X) = g(W,X)$ за свако $X\in\mathfrak{X}(M)$ повлачи $V^\flat = W^\flat$, те и $V=W$. У предстојећим рачунима функције $f\in\mathfrak{F}(M)$ аутоматски излазе испред тензорског поља g, док за комутатор можемо користити специјалне случајеве формуле (2.6). На пример, провера Лајбницовости (5.6), за свако $Z\in\mathfrak{X}(M)$ даје

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X fY,Z) =& X(g(fY,Z)) + fY(g(Z,X)) - Z(g(X,fY))\\
&- g(X,[fY,Z]) + g(fY,[Z,X]) + g(Z,[X,fY])\\
=& X(fg(Y,Z)) + fY(g(Z,X)) - Z(fg(X,Y))\\
&- g(X,f[Y,Z] - (Zf)Y) + fg(Y,[Z,X]) + g(Z,f[X,Y] + (Xf)Y)\\
=& 2fg(\nabla_X Y,Z) + (Xf)g(Y,Z) - (Zf)g(X,Y) + g(X,(Zf)Y) + g(Z,(Xf)Y)\\
=& 2fg(\nabla_X Y,Z) + 2g((Xf)Y,Z) = 2g(f\nabla_X Y + (Xf)Y,Z).
\end{aligned}$$

Симетрија (5.9) следи из једноставног рачуна,

$$\begin{aligned}
&2g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z)\\
&\quad= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\\
&\qquad - Y(g(X,Z)) - X(g(Z,Y)) + Z(g(Y,X)) + g(Y,[X,Z]) - g(X,[Z,Y]) - g(Z,[Y,X])\\
&\quad= g(Z,[X,Y]) - g(Z,[Y,X]) = 2g([X,Y],Z).
\end{aligned}$$

[3] Tullio Levi-Civita (1873–1941), италијански математичар
[4] Jean-Louis Koszul (1921–2018), француски математичар

На сличан начин доказујемо да (5.10) повлачи и преостале формуле (5.4), (5.5) и (5.8). □

Ако уведемо пресликавање $F(X,Y)\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ са

$$F(X,Y)\colon Z \mapsto X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]),$$

није тешко показати да је оно $\mathfrak{F}(M)$-линеарно, што даје $F(X,Y) \in \mathfrak{X}^*(M)$. По Теореми 5.2, ∇ је Леви-Чивита повезаност ако и само ако $2g(\nabla_X Y, Z) = F(X,Y)Z$ важи за свако $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Овај услов еквивалентан је са $2(\nabla_X Y)^\flat = F(X,Y) \in \mathfrak{X}^*(M)$, односно са

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} F(X,Y)^\sharp,$$

одакле следи егзистенција и јединственост Леви-Чивита повезаности.

Теорема 5.3. *Свака псеудо-Риманова многострукост дозвољава јединствену Леви--Чивита повезаност.*

Јединствену Леви-Чивита повезаност на псеудо-Римановој n-многострукости (M,g) можемо изразити тако што израчунамо Кристофелове симболе у произвољној карти (U,φ) на M. Применом Косилове формуле на координатна векторска поља добијамо

$$F(\partial_i, \partial_j) = \sum_{l=1}^{n} F(\partial_i, \partial_j)\partial_l \, dx_l = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right) dx_l,$$

одакле је

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \frac{1}{2} F(\partial_i, \partial_j)^\sharp = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} g^{lk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right) \partial_k,$$

што нам доноси експлицитну формулу

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right). \tag{5.11}$$

Размотримо понашање јединствене Леви-Чивита повезаности из Теореме 5.3 у случају изометрије $f\colon M \to N$. Како је f дифеоморфизам, то користећи формуле (2.9) и (2.10), за свако $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ добијамо

$$X(g_M(Y,Z)) = X((f^* g_N)(Y,Z)) = X(g_N(f_* Y, f_* Z) \circ f) = f_* X(g_N(f_* Y, f_* Z)) \circ f,$$
$$g_M(X,[Y,Z]) = (f^* g_N)(X,[Y,Z]) = g_N(f_* X, f_*[Y,Z]) \circ f = g_N(f_* X, [f_* Y, f_* Z]) \circ f.$$

У светлу тога, Косилова формула (5.10) даје

$$2g_N(f_*(\nabla_X Y), f_* Z) \circ f = 2g_M(\nabla_X Y, Z) = 2g_N(\nabla_{f_* X} f_* Y, f_* Z) \circ f,$$

одакле следи

$$f_*(\nabla_X Y) = \nabla_{f_* X} f_* Y, \tag{5.12}$$

што значи да се Леви-Чивита повезаност чува изометријама.

Лема 5.4. *Потпун коваријантни извод метричке повезаности комутира са музичким изоморфизмима.*

Доказ. Посматрајмо снизилицу, која спушта p-ти контраваријантни индекс, произвољног тензора $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, где за компоненте важи

$$(A^\flat)^{i_1\dots i_{p-1}i_{p+1}\dots i_r}_{j_1\dots j_s k} = \sum_l A^{i_1\dots i_{p-1}l i_{p+1}\dots i_r}_{j_1\dots j_s} g_{kl} = \sum_l (A\otimes g)^{i_1\dots i_{p-1}l i_{p+1}\dots i_r}_{j_1\dots j_s kl} = (C(A\otimes g))^{i_1\dots i_{p-1}i_{p+1}\dots i_r}_{j_1\dots j_s k},$$

одакле следи $A^\flat = C(A\otimes g)$, где је $C = C^p_{s+2}$ одговарајућа контракција. За $X \in \mathfrak{X}(M)$, како је $\nabla g = 0$, имамо

$$\nabla_X(A^\flat) = \nabla_X C(A\otimes g) = C\nabla_X(A\otimes g) = C(\nabla_X A\otimes g + A\otimes \nabla_X g) = C(\nabla_X A\otimes g) = (\nabla_X A)^\flat,$$

те добијамо

$$\nabla(A^\flat)(\dots,X) = \nabla_X(A^\flat)(\dots) = (\nabla_X A)^\flat(\dots) = (\nabla A)(\dots,Y^\flat,\dots,X) = (\nabla A)^\flat(\dots,X),$$

што значи да снизилица комутира са коваријантним изводом, $\nabla(A^\flat) = (\nabla A)^\flat$. Како су повисилица и снизилица једно другом инверз (кад се примењују на исту позицију индекса), то имамо

$$(\nabla A)^\sharp = (\nabla(A^{\sharp\flat}))^\sharp = (\nabla(A^\sharp))^{\flat\sharp} = \nabla(A^\sharp),$$

те и повисилица комутира са коваријантним изводом $\nabla(A^\sharp) = (\nabla A)^\sharp$. □

5.3 Паралелно померање

Нека је $\gamma\colon I\to M$ крива на многострукости M, а $\gamma'\colon I\to TM$ њена брзина. У оквиру неке карте (U,φ) у $\gamma(t)\in M$ са координатним функцијама $x_i = \pi_i\circ\varphi$, за функцију $f\in\mathfrak{F}(M)$ је

$$\gamma'(t)f = \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial\pi_i}(\varphi(\gamma(t)))\frac{d(\pi_i\circ\varphi\circ\gamma)}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\frac{d(x_i\circ\gamma)}{dt}(t).$$

Ако са $\gamma_i = x_i\circ\gamma$ за $1\leqslant i\leqslant n$ обележимо компоненте криве, тада се брзина у координатама изражава са

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(t)}. \tag{5.13}$$

Векторско поље дуж криве $\gamma\colon I\to M$ је глатко пресликавање $V\colon I\to TM$, такво да је $V(t)\in T_{\gamma(t)}M$ за свако $t\in I$, односно важи $\pi\circ V = \gamma$. Скуп свих векторских поља дуж криве γ означавамо са $\mathfrak{X}(\gamma)$ и он је један модул над $\mathfrak{F}(I)$. Основни пример векторског поља дуж криве γ је брзина те криве $\gamma'\in\mathfrak{X}(\gamma)$, што се у координатама изражава формулом (5.13).

Велику класу примера добијамо из произвољног векторског поља $X\in\mathfrak{X}(M)$, тако што за криву $\gamma\colon I\to M$ поставимо $X_\gamma = X\circ\gamma\in\mathfrak{X}(\gamma)$, односно важи $X_\gamma(t) = X_{\gamma(t)}$ за $t\in I$. За $V\in\mathfrak{X}(\gamma)$ кажемо да је ***продуживо*** ако постоји векторско поље X на околини слике од γ такво да имамо $V = X_\gamma$. Међутим, уколико је $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ и $\gamma'(t_1)\neq\gamma'(t_2)$ за неке $t_1,t_2\in I$, тада $\gamma'\in\mathfrak{X}(\gamma)$ очигледно није продуживо. Штавише, брзина инјективне имерзије $\gamma\colon(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin 2t,\sin t)$ из Примера 2.16 није продужива.

Повезаност ∇ на многострукости M доноси оператор $\nabla/dt\colon \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ чије су природне особине исказане једнакостима

$$\frac{\nabla}{dt}(V+W) = \frac{\nabla V}{dt} + \frac{\nabla W}{dt}, \tag{5.14}$$

$$\frac{\nabla}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{\nabla V}{dt}, \tag{5.15}$$

$$\frac{\nabla X_\gamma}{dt}(t) = \nabla_{\gamma'(t)}X, \tag{5.16}$$

за $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma), X \in \mathfrak{X}(M), f \in \mathfrak{F}(I)$.

Теорема 5.5. *Нека је ∇ повезаност на многострукости M, а $\gamma\colon I \to M$ крива. Тада постоји јединствен оператор $\nabla/dt\colon \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ који задовољава формуле* (5.14), (5.15) *и* (5.16) *за све $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(I)$.*

Доказ. Претпоставимо да оператор ∇/dt задовољава наметнуте особине. За произвољно $t_0 \in I$ посматрамо карту (U,φ) у $\gamma(t_0) \in M$ са $x_i = \pi_i \circ \varphi$. У околини I_0 тачке $t_0 \in I$ где је $\gamma(I_0) \subseteq U$ можемо локално изразити $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ са $V(t) = \sum_{j=1}^n v_j(t)(\partial_j)_{\gamma(t)}$, где је $v_j(t) = (V(t))(x_j)$. Применом формула (5.14) и (5.15) добијамо

$$\frac{\nabla V}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\nabla}{dt}\left(v_j(\partial_j)_\gamma\right) = \sum_{j=1}^n \left(v_j'(\partial_j)_\gamma + v_j\frac{\nabla}{dt}(\partial_j)_\gamma \right).$$

Из формуле (5.16) уз локално изражено $\gamma'(t)$ преко компоненти $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ из (5.13) имамо

$$\frac{\nabla(\partial_j)_\gamma}{dt}(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\partial_j = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t)(\nabla_{\partial_i}\partial_j)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t)\sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))(\partial_k)_{\gamma(t)},$$

одакле коначно добијамо

$$\frac{\nabla V}{dt}(t) = \sum_{k=1}^n \left(v_k'(t) + \sum_{i,j=1}^n v_j(t)\gamma_i'(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right)(\partial_k)_{\gamma(t)}. \tag{5.17}$$

Тражени оператор у тачки $t_0 \in I$ мора бити изражен формулом (5.17) одакле следи јединственост. Што се егзистенције тиче, у општем случају можемо покрити $\gamma(I)$ неким координатним околинама и дефинисати оператор са (5.17) у свакој карти понаособ, где већ доказана јединственост повлачи да се вишеструке дефиниције слажу кад год се координатне околине преклапају. Наравно, преостаје да се провери да овако дефинисан оператор заиста испуњава особине (5.14), (5.15) и (5.16). $\square$

Коваријантни извод од $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ***дуж криве*** $\gamma\colon I \to M$ је $V' = \nabla V/dt \in \mathfrak{X}(\gamma)$. За $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ кажемо да је ***паралелно дуж*** γ у односу на ∇ ако је $V' \equiv 0$. Испоставља се да је векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ паралелно ($\nabla X = 0$) ако је паралелно дуж сваке криве на M.

Пример 5.6. Посматрајмо стандардну повезаност $D_XY = \sum_{i=1}^n X(Y^i)\partial_i$ на $\mathbb{R}^n$ из формуле (5.3). За њу је $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$, те формула (5.17) даје $V'(t) = \sum_{k=1}^n v_k'(t)(\partial_k)_{\gamma(t)}$. Одавде је $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ паралелно дуж криве γ ако и само ако је $v_k' \equiv 0$ за свако $1 \leqslant k \leqslant n$, што значи да су све функције v_k константне, односно да је V константно векторско поље дуж криве. $\triangle$

Основна теорема о паралелним векторским пољима каже да се било који тангентни вектор у произвољној тачки са криве може јединствено продужити на паралелно векторско поље дуж целокупне криве.

Теорема 5.6. *За дату криву $\gamma\colon I \to M$, $t_0 \in I$ и вектор $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, постоји јединствено паралелно векторско поље V дуж γ такво да је $V(t_0) = V_0$.*

Доказ. Претпоставимо најпре да је $\gamma(I)$ садржано у једној карти. У координатама те карте користимо формулу (5.17), одакле је V паралелно дуж γ ако и само ако за свако $1 \leqslant k \leqslant n$ важи

$$v_k'(t) = -\sum_{i,j=1}^{n} v_j(t)\gamma_i'(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)).$$

Са друге стране, почетни услов $V(t_0) = V_0$ постаје $v_k(t_0) = V_0(x_k)$ за $1 \leqslant k \leqslant n$. Добијен је линеарни систем обичних диференцијалних једначина са почетним условом, одакле следи егзистенција и јединственост решења на целом I. Ако $\gamma(I)$ није садржано у једној карти посматрајмо a као супремум свих $b > t_0$ за које постоји јединствено тражено паралелно векторско поље на $[t_0, b]$. За b довољно близу t_0, слика $\gamma[t_0, b]$ упада у једну карту, тако да је $a > t_0$. Ако је $a \in I$ можемо изабрати координатну околину која садржи $\gamma(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ за неко $\varepsilon > 0$. Тада на $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ постоји паралелно векторско поље W са почетним условом $W(a-\varepsilon/2) = V(a-\varepsilon/2)$. Из јединствености на заједничком домену следи да је W продужење од V које прелази a, што је контрадикција. Сличан поступак примењујемо за вредности b мање од t_0. □

Векторско поље V дуж криве γ из претходне теореме зовемо ***паралелно померање*** од V_0 дуж γ. За $a, b \in I$ дефинишемо ***оператор паралелног померања*** $P_a^b\colon T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M$ са $P_a^b V_a = V(b)$, где је V паралелно померање од V_a дуж γ.

За повезаност ∇ на псеудо-Римановој многострукости (M, g) кажемо да је ***компатибилна*** са метриком g ако оператор паралелног померања чува метрику. Другим речима, компатибилност повезаности и метрике за сваку криву γ и паралелна векторска поља $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ доноси једнакост

$$g_{\gamma(t)}(V(t), W(t)) = g_{\gamma(t_0)}(V(t_0), W(t_0)) = \mathrm{Const},$$

која је очигледна последица општије једнакости

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{\nabla V}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{\nabla W}{dt}\right). \tag{5.18}$$

Лема 5.7. *Повезаност ∇ псеудо-Риманове многострукости (M, g) је компатибилна са g ако и само ако за свака два векторска поља V и W дуж криве $\gamma\colon I \to M$ важи* (5.18)*.*

Доказ. Ако изаберемо ортонормирану базу у $T_{\gamma(t_0)}M$, а затим Теоремом 5.6 продужимо базне векторе на одговарајућа паралелна $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\gamma)$, тада компатибилност ∇ и g за свако $t \in I$ даје ортонормирану базу $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ у $T_{\gamma(t)}M$. За произвољно $V = \sum_i v_i E_i$ и $W = \sum_j w_j E_j$ имамо $g(V, W) = \sum_{i,j} v_i w_j \delta_{ij}\varepsilon_i = \sum_i \varepsilon_i v_i w_i$. Са друге стране из $E_i' \equiv 0$ имамо $V' = \sum_i v_i' E_i$ и $W' = \sum_j w_j' E_j$, одакле је $g(V', W) + g(V, W') = \sum_i \varepsilon_i (v_i' w_i + v_i w_i')$, те добијамо (5.18). Напоменимо да је $\varepsilon_i = 1$ у Римановом случају. □

Теорема 5.8. *Повезаност ∇ псеудо-Риманове многострукости (M, g) је компатибилна са g ако и само ако је метричка.*

Доказ. Нека је ∇ компатибилна са g и $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. За произвољну криву γ за коју важи $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X_p$ и векторска поља $V = Y_\gamma$, $W = Z_\gamma$, из Леме 5.7 имамо $(g(Y_\gamma, Z_\gamma))' = g(Y'_\gamma, Z_\gamma) + g(Y_\gamma, Z'_\gamma)$. Како је

$$\frac{d}{dt} g(Y_\gamma, Z_\gamma) = \frac{d}{dt}(g(Y, Z) \circ \gamma) = \gamma_* \frac{d}{dt}(g(Y, Z)) = \gamma'(t)(g(Y, Z)), \tag{5.19}$$

то за $t = 0$ добијамо

$$X_p(g(Y, Z)) = g_p(\nabla_{X_p} Y, Z_p) + g_p(Y_p, \nabla_{X_p} Z),$$

што доказује формулу (5.8), у свакој тачки p понаособ, те је ∇ метричка.

Обратно, довољно је проверити тврђење за криве γ које у потпуности леже у некој координатној околини. Поставимо базна векторска поља дуж криве са $E_i = (\partial_i)_\gamma$ и изразимо $V = \sum_i v_i E_i$ и $W = \sum_j w_j E_j$. На левој страни је

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(v'_i w_j g(E_i, E_j) + v_i w'_j g(E_i, E_j) + v_i w_j \frac{d}{dt} g(E_i, E_j) \right),$$

док на десној имамо

$$g(V', W) + g(V, W') = \sum_{i,j=1}^{n} \left(v'_i w_j g(E_i, E_j) + v_i w_j g(E'_i, E_j) + v_i w'_j g(E_i, E_j) + v_i w_j g(E_i, E'_j) \right),$$

одакле се види да је довољно доказати тврђење за базна векторска поља $V = E_i$, $W = E_j$. Због (5.19) преостаје још да се докаже

$$\gamma'(t)(g(\partial_i, \partial_j)) = g_{\gamma(t)}(\nabla_{\gamma'(t)} \partial_i, (\partial_j)_{\gamma(t)}) + g_{\gamma(t)}((\partial_i)_{\gamma(t)}, \nabla_{\gamma'(t)} \partial_j).$$

Међутим, како је ∇ метричка тражена компатибилност следи из једнакости (5.8) за векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ такво да је $X_p = \gamma'(0)$ уз $Y = \partial_i$, $Z = \partial_j$. □

Нека су $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ паралелна и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Из $(\alpha V + \beta W)' = \alpha V' + \beta W' = 0$ имамо $P_a^b(\alpha V(a) + \beta W(a)) = \alpha V(b) + \beta W(b)$, што доказује да је P_a^b линеарно. Ако је $P_a^b(V(a)) = 0$ онда из јединствености имамо $V = 0$, што даје $V(a) = 0$, те је P_a^b инјективно и самим тим бијективно. Имајући у виду Теорему 5.8, долазимо до наредне кључне особине паралелног померања.

Теорема 5.9. *Паралелно померање је линеарна изометрија у случају Леви-Чивита повезаности.*

Коваријантни извод дуж криве може се реконструисати из паралелног померања. Пођимо од базних вектора у $T_{\gamma(a)}M$ и продужимо их Теоремом 5.6 на одговарајућа паралелна векторска поља $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(\gamma)$, где је $E'_j \equiv 0$ и $E_j(t) = P_a^t E_j(a)$ за $1 \leqslant j \leqslant n$. Из $V = \sum_j v_j E_j$ имамо

$$V'(a) = \sum_{j=1}^{n} (v_j E_j)'(a) = \sum_{j=1}^{n} v'_j(a) E_j(a) = \lim_{t \to a} \sum_{j=1}^{n} \frac{v_j(t) - v_j(a)}{t - a} E_j(a) = \lim_{t \to a} \frac{(P_a^t)^{-1} V(t) - V(a)}{t - a}.$$

Лема 5.10. *За векторско поље V дуж криве важи*

$$\frac{\nabla V}{dt}(a) = \lim_{t \to a} \frac{(P_a^t)^{-1} V(t) - V(a)}{t - a}.$$

5.4 Геодезијске криве

Нека је ∇ повезаност на многострукости M, а γ крива на M. Појам коваријантног извода дуж криве омогућава нам да дефинишемо ***убрзање*** криве γ са $(\gamma')' \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Кажемо да је крива γ ***геодезијска*** у односу на ∇ уколико нема убрзања, $(\gamma')' \equiv 0$. Другим речима, геодезијске можемо окарактерисати као криве чија је брзина паралелна дуж те криве.

Коваријантни извод дуж криве за $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ рачунамо у некој координатној околини по формули (5.17). Након замене $V = \gamma'$ имамо $v_j = \gamma_j'$ за $1 \leqslant j \leqslant n$, те добијамо

$$\frac{\nabla \gamma'}{dt}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_j'(t)\gamma_i'(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) (\partial_k)_{\gamma(t)}.$$

Геодезијски услов $(\gamma')' \equiv 0$ установљава систем обичних диференцијалних једначина другог реда,

$$\gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_j'(t)\gamma_i'(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0 \tag{5.20}$$

за свако $1 \leqslant k \leqslant n$, што су ***локалне геодезијске једначине***. За произвољно $t_0 \in I$, постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $\gamma(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ садржано у некој координатној околини, те је γ геодезијска ако и само ако одговарајућа рестрикција задовољава локалне геодезијске једначине у свакој карти чији домен сече слику од γ.

Теорема 5.11. *Нека је ∇ повезаност на многострукости M. За свако $p \in M$ и $V \in T_pM$ постоји отворен интервал $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ и геодезијска $\gamma\colon I \to M$ за коју је $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = V$. Сваке две такве геодезијске се слажу на њиховом заједничком домену.*

Доказ. Уобичајен трик је увођење помоћних функција $\xi_k = \gamma_k'$ које преводе локалне геодезијске једначине (5.20) у еквивалентан систем првог реда,

$$\begin{aligned} \gamma_k'(t) &= \xi_k(t), \\ \xi_k'(t) &= -\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(t)\xi_j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)), \end{aligned}$$

са дупло већим бројем променљивих и једначина. По Пикар[5]–Линделоф[6] теореми (за систем обичних диференцијалних једначина првог реда са почетним условом) за неко $\varepsilon > 0$ постоји јединствено решење

$$\zeta\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \times \mathbb{R}^n, \quad \zeta(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$$

са почетним условом $\zeta(0) = (p, V)$, где је тражена геодезијска $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$.

Што се јединствености тиче, нека су $\gamma_1, \gamma_2\colon I \to M$ две геодезијске које задовољавају $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$. За $a = \inf\{t \in I : t > 0,\ \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\} > 0$ је $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)$ на $(0, a)$, одакле из непрекидности имамо $\gamma_1'(a) = \gamma_2'(a)$. Сада су $t \mapsto \gamma_1(a + t)$ и $t \mapsto \gamma_2(a + t)$ геодезијске са почетном брзином $\gamma_1'(a) = \gamma_2'(a)$, те се γ_1 и γ_2 слажу на неком отвореном интервалу који садржи a, што је контрадикција. Сличне аргументе користимо за вредности $t < 0$, што комплетира доказ. □

[5] Charles Émile Picard (1856–1941), француски математичар

[6] Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946), фински математичар

Геодезијска $\gamma \colon I \to M$ је ***максимална*** ако не постоји друга геодезијска са отвореним доменом који строго садржи I, таква да се са γ слаже на I. Из Теореме 5.11 директно следи да за свако $V \in TM$ постоји јединствена максимална геодезијска γ_V са $\gamma_V'(0) = V$.

Уколико је домен сваке максималне геодезијске која пролази кроз тачку $p \in M$ целокупно $\mathbb{R}$, кажемо да је M ***геодезијски комплетна у тачки*** p. За псеудо-Риманову многострукост кажемо да је ***геодезијски комплетна*** ако и само ако је геодезијски комплетна у свакој својој тачки. Пример 4.23 показује да постоје многострукости које нису геодезијски комплетне.

Пример 5.7. Посматрајмо псеудо-еуклидски простор $\mathbb{R}^n_\nu$ индекса ν. Кристофелове симболе Леви-Чивита повезаности рачунамо по формули (5.11), али како су коефицијенти метрике константни, то је $\Gamma^k_{ij} \equiv 0$. За геодезијске γ имамо $\sum_k \gamma_k''(t)(\partial_k)_{\gamma(t)} = 0$, одакле је $\gamma_k'' \equiv 0$ за свако $1 \leqslant k \leqslant n$. Дакле, геодезијске су облика $t \mapsto p + tV$ за неке $p, V \in \mathbb{R}^n_\nu$. △

Пример 5.8. Посматрајмо хиперболичку полураван $\mathbf{HU}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ са Римановом метриком $g = (dx_1^2 + dx_2^2)/x_2^2$ из Примера 4.21. Компоненте Риманове метрике виде се из наведених матрица,

$$g = \begin{pmatrix} 1/x_2^2 & 0 \\ 0 & 1/x_2^2 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} x_2^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Прво рачунамо Кристофелове симболе Леви-Чивита повезаности по формули (5.11), одакле због $g^{ab} = x_2^2 \delta_{ab}$ имамо

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) = \frac{1}{2} x_2^2 \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right).$$

Како је

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x_c} = \delta_{ab} \delta_{c2} \frac{\partial (1/x_2^2)}{\partial x_2} = -\frac{2}{x_2^3} \delta_{ab} \delta_{c2},$$

то добијамо

$$\Gamma^k_{ij} = -\frac{1}{x_2} (\delta_{jk} \delta_{i2} + \delta_{ki} \delta_{j2} - \delta_{ij} \delta_{k2}),$$

одакле следи

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{11} = -\Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{22} = \frac{1}{x_2}. \tag{5.21}$$

Геодезијске $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ тражимо преко локалних геодезијских једначина (5.20),

$$\gamma_1''(t) + \sum_{i,j} \gamma_j'(t) \gamma_i'(t) \Gamma^1_{ij}(\gamma(t)) = 0, \quad \gamma_2''(t) + \sum_{i,j} \gamma_j'(t) \gamma_i'(t) \Gamma^2_{ij}(\gamma(t)) = 0,$$

које заменом (5.21) постају

$$\gamma_1'' - 2\gamma_1' \gamma_2' \frac{1}{\gamma_2} = 0, \quad \gamma_2'' + ((\gamma_1')^2 - (\gamma_2')^2) \frac{1}{\gamma_2} = 0. \tag{5.22}$$

Једначине (5.22) решавамо тумачећи два случаја, где је једноставнији $\gamma_1' = 0$, односно $\gamma_1 = C = \mathrm{Const}$. То задовољава прву једначину, а друга постаје $\gamma_2'' - (\gamma_2')^2 / \gamma_2 = 0$, те након дељења са $\gamma_2 > 0$ добијамо

$$\frac{\gamma_2'' \gamma_2 - \gamma_2' \gamma_2'}{(\gamma_2)^2} = \left(\frac{\gamma_2'}{\gamma_2} \right)' = 0.$$

Одавде је $\gamma_2'/\gamma_2 = (\ln\gamma_2)' = D$, те $\ln\gamma_2 = Dt + E$ и коначно $\gamma_2 = e^{Dt+E}$. Дакле, први тип геодезијских су криве облика

$$\gamma(t) = (C, e^{Dt+E}),$$

што представља отворене полуправе нормалне на x_1-осу.

У другом случају имамо $\gamma_1' \neq 0$, где из прве једначине формуле (5.22) следи

$$\frac{\gamma_1''}{\gamma_1'} - 2\frac{\gamma_2'}{\gamma_2} = (\ln|\gamma_1'| - 2\ln\gamma_2)' = \left(\ln\frac{|\gamma_1'|}{\gamma_2^2}\right)' = 0,$$

одакле је $\gamma_1' = C\gamma_2^2$. Када то заменимо у другу једначину, после дељења са $\gamma_2 > 0$ имамо

$$\frac{\gamma_2''\gamma_2 - \gamma_2'\gamma_2'}{(\gamma_2)^2} + C^2\gamma_2^2 = \left(\frac{\gamma_2'}{\gamma_2}\right)' + C^2\gamma_2^2 = 0.$$

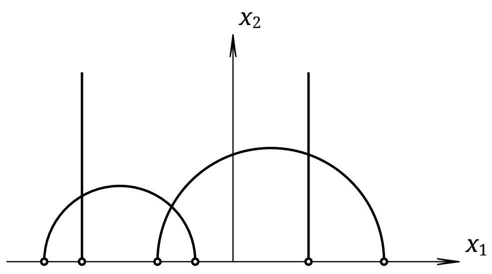
Увођењем смене $f = \gamma_2'/\gamma_2 = (\ln\gamma_2)'$, једначина постаје $f' + C^2\gamma_2^2 = 0$, одакле следи $f' < 0$. Диференцирањем добијамо $f'' + 2C^2\gamma_2\gamma_2' = f'' - 2f'f = (f' - f^2)' = 0$, што даје $f' = f^2 - A^2$ за неку константу $A > 0$. Раздвајањем променљивих и интеграцијом имамо,

$$B + \int dt = \int \frac{df}{f^2 - A^2} = -\frac{1}{A}\int \frac{d(f/A)}{1 - (f/A)^2} = -\frac{1}{A}\operatorname{arth}\left(\frac{f}{A}\right),$$

одакле је $f = -A\operatorname{th}(A(t+B)) = (\ln\gamma_2)'$. Даље је $\gamma_2 = r/(\operatorname{ch}(A(t+B)))$, где из $f' + C^2\gamma_2^2 = 0$ добијамо $A^2 = C^2r^2$. Повратком на $\gamma_1' = C\gamma_2^2$ добијамо $\gamma_1 = (Cr^2/A)\operatorname{th}(A(t+B)) + l$. Дакле, други тип геодезијских су криве облика

$$\gamma(t) = \left(\pm r\operatorname{th}(A(t+B)) + l, \frac{r}{\operatorname{ch}(A(t+B))}\right),$$

за које важи $(\gamma_1 - l)^2 + \gamma_2^2 = r^2$, што су полукругови са центром $(l, 0)$ полупречника r.



△

5.5 Експоненцијално пресликавање

Нека је ∇ произвољна повезаност на многострукости M. По Теореми 5.11 почетни вектор брзине $V \in TM$ одређује јединствену максималну геодезијску γ_V са $\gamma_V'(0) = V$ и $\gamma_V(0) = \pi V$. За дубље разумевање геодезијских неопходно је да одгонетнемо како се оне мењају кад варирамо почетни тангентни вектор. Геодезијске са пропорционалним почетним брзинама су блиско повезане, о чему говори наредна лема о рескалирању.

Лема 5.12. *За свако $V \in TM$ и $c, t \in \mathbb{R}$ важи $\gamma_{cV}(t) = \gamma_V(ct)$, кад год је нека од страна те једнакости дефинисана.*

Доказ. Претпоставимо $c \neq 0$ јер за $c = 0$ обе стране једнакости су једнаке πV. Довољно је доказати лему у случају да је дефинисана десна страна једнакости, јер обрат добијамо када параметре V, t, c заменимо редом са $cV, ct, 1/c$. За $\gamma = \gamma_V \colon I \to M$ дефинишемо нову криву $\psi \colon (1/c)I \to M$ са $\psi(t) = \gamma(ct)$, при чему одмах важи $\psi(0) = \gamma(0) = \pi V$. У некој карти (U, φ) са $x_i = \pi_i \circ \varphi$ поставимо компоненте $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ и $\psi_i = x_i \circ \psi$. Тада је $\psi_i'(t) = (d/dt)\gamma_i(ct) = c\gamma_i'(ct)$, те посебно важи $\psi'(0) = c\gamma'(0) = cV$. Како је $(\gamma')'(ct) = 0$, то имамо

$$\psi_k''(t) + \sum_{i,j} \psi_j'(t)\psi_i'(t)\Gamma_{ij}^k(\psi(t)) = c^2\gamma_k''(ct) + c^2 \sum_{i,j} \gamma_j'(ct)\gamma_i'(ct)\Gamma_{ij}^k(\gamma(ct)) = 0,$$

те је ψ геодезијска са почетним условом $\psi'(0) = cV$ и јединственост даје $\psi = \gamma_{cV}$. □

Нека је $\mathcal{E} \subseteq TM$ скуп свих тангентних вектора $V \in TM$ таквих да је геодезијска γ_V дефинисана на интервалу који садржи $[0, 1]$. Пресликавање $\exp \colon \mathcal{E} \to M$ дефинисано са $\exp V = \gamma_V(1)$ зовемо ***експоненцијално пресликавање***, а исто име користимо за његову рестрикцију $\exp_p \colon \mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_pM \to M$ за тачку $p \in M$.

Лема 5.12 нам омогућава да од постојеће максималне геодезијске добијемо нову геодезијску чији ће домен интервал бити произвољно велики, тако што довољно смањимо почетни вектор. Ако је $tV \in \mathcal{E}$, тада је $\gamma_{tV}(1)$ дефинисано, одакле следи да геодезијска γ_V има облик

$$\gamma_V(t) = \gamma_{tV}(1) = \exp(tV).$$

Дакле, максимална геодезијска која пролази кроз $p \in M$ са почетним вектором $V \in T_pM$ је облика $t \mapsto \exp_p tV$. Одавде следи да се праве линије тангентног простора T_pM које пролазе кроз координатни почетак $0_p \in T_pM$ са $\exp_p$ сликају на геодезијске. За ове геодезијске кажемо да су ***радијалне геодезијске*** кроз p, а аналогно можемо говорити о радијалним геодезијским сегментима и радијалним геодезијским полуправама које извиру из p.

Стандардни резултати за решења обичних диференцијалних једначина гарантују да $\exp_p(V)$ глатко зависи и од V и од p, тако да је $\exp_p$ добро дефинисано и глатко у некој околини координатног почетка $0_p \in T_pM$.

Нека је $\tau \colon I \to T_pM$ крива на тангентном простору дефинисана са $\tau(t) = tV$. Лако је приметити да за $V_{0_p} = \tau'(0) \in T_{0_p}(T_pM)$ имамо

$$(T_{0_p}\exp_p)(V_{0_p}) = (T_{0_p}\exp_p)(\tau'(0)) = (\exp_p \circ \tau)'(0) = \gamma_V'(0) = V,$$

одакле се види да је $T_{0_p}\exp_p \colon T_{0_p}(T_pM) \to T_pM$ канонско пресликавање $V_{0_p} \mapsto V$, што је идентичко пресликавање при идентификацији $T_{0_p}(T_pM) \cong T_pM$.

Лема 5.13. *Нека је p произвољна тачка псеудо-Риманове многострукости M. Тангентно пресликавање експоненцијалног пресликавања $\exp_p$ у координатном почетку $0_p \in T_pM$ је идентичко пресликавање при канонској идентификацији.*

Како је тангентно пресликавање $T_{0_p}\exp_p$ изоморфизам, то теорема о инверзној функцији (Теорема 2.8) повлачи да је $\exp_p$ локални дифеоморфизам у координатном почетку 0_p.

Теорема 5.14. *Нека је ∇ повезаност на многострукости M и $p \in M$. Тада постоји околина $0_p \in \mathcal{U} \subseteq T_pM$ и околина $p \in U \subseteq M$, тако да је $\exp_p\restriction_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{U} \to U$ дифеоморфизам.*

За подскуп $\mathcal{U} \ni 0$ векторског простора $\mathcal{V}$ кажемо да је ***звездастог облика*** око 0 ако $V \in \mathcal{U}$ повлачи да $tV \in \mathcal{U}$ важи за свако $t \in [0,1]$. Приметимо да је $\mathcal{E}_p$ звездастог облика око $0_p \in T_pM$. Уколико је домен $\mathcal{U}$ дифеоморфизма из Теореме 5.14 звездастог облика око 0_p онда се његова слика $U = \exp_p(\mathcal{U})$ зове ***нормална околина*** од p.

Нека је (M,g) псеудо-Риманова многострукост димензије n и $p \in M$ произвољна тачка. Избор ортонормиране базе $(E_1,\dots E_n)$ квадратног векторског простора (T_pM, g_p) еквивалентан је изометрији $L\colon T_pM \to \mathbb{R}^n_\nu$ датој са $L(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Ако је U нормална околина од $p \in M$, тада је $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ дато са $\varphi = L \circ \exp_p^{-1}\restriction_U$ карта у $p \in M$. За координате $x_i = \pi_i \circ \varphi$ кажемо да су ***нормалне координате*** центриране у $p \in M$. Нормалне координате су веома корисне јер доносе веома једноставну репрезентацију геодезијских.

Теорема 5.15. *Нека је (M,g) псеудо-Риманова n-многострукост, ∇ њена Леви-Чивита повезаност, а (U,φ) карта са нормалним координатама центрираним у $p \in M$. Тада за свако $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$ важи*

$$\Gamma^k_{ij}(p) = 0, \quad g_{ij}(p) = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \partial_k g_{ij}(p) = 0.$$

Доказ. Сваки вектор $0 \neq V = \sum_{i=1}^n v_i E_i \in T_pM$ одређује радијалну геодезијску γ_V кроз p која је облика $\gamma_V(t) = \exp_p(tV)$ за $t \in I$ где је $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ неки отворен интервал. У нормалним координатама центрираним у p је $\varphi \circ \gamma_V(t) = L(tV) = (tv_1,\dots tv_n)$, одакле добијамо $\gamma_i(t) = x_i \circ \gamma_V(t) = tv_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, што мора задовољити локалне геодезијске једначине (5.20), те важи $\sum_{i,j} v_i v_j \Gamma^k_{ij}(\gamma_V(t)) = 0$ за $1 \leqslant k \leqslant n$. То свакако ради за $t = 0$ где је $\gamma_V(0) = p$, одакле произвољан избор вектора $(v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n$ доноси

$$\sum_{i,j=1}^n v_i v_j \Gamma^k_{ij}(p) = 0$$

за све $1 \leqslant k \leqslant n$. Погодан избор је $V = E_i$ одакле добијамо $\Gamma^k_{ii}(p) = 0$, а након тога за $V = E_i + E_j$ имамо $\Gamma^k_{ii}(p) + \Gamma^k_{ij}(p) + \Gamma^k_{ji}(p) + \Gamma^k_{jj}(p) = 0$, одакле следи $\Gamma^k_{ij}(p) + \Gamma^k_{ji}(p) = 0$, те како је ∇ симетрична добијамо $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$, што доказује да се сви Кристофелови симболи анулирају у тачки p.

Преостале особине је лако видети. Из $V(x_i) = (\gamma_V'(0))(x_i) = (x_i \circ \gamma_V)'(0) = \gamma_i'(0) = v_i$ имамо $V = \sum_{i=1}^n v_i(\partial_i)_p$, што за $V = E_i = (\partial_i)_p$ доноси $g_p(\partial_i, \partial_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$. Како је повезаност метричка, то важи $\partial_k g_{ij} = g(\nabla_{\partial_k}\partial_i, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_k}\partial_j) = \sum_l (\Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il})$, те и $\partial_k g_{ij}(p) = 0$ јер је ∇ симетрична. □

У Теореми 5.14 смо показали да свака тачка псеудо-Риманове многострукости има нормалну околину. За нормалну околину кажемо да је ***потпуно нормална*** ако је она нормална околина сваке своје тачке. Важи наредна теорема која се користи у наредним секцијама које не радимо.

Теорема 5.16. *Свака тачка псеудо-Риманове многострукости има потпуно нормалну околину.*

5.6 Геодезијске и минимизујуће криве

Ако не урадимо суштину Секције 4.7, што је Теорема 4.20, онда не можемо радити ни ову секцију. Није лоше да знамо да важе следеће теореме.

Теорема 5.19. *Свака геодезијска на Римановој многострукости је локално минимизујућа.*

Теорема 5.20. *Свака минимизујућа крива на Римановој многострукости је до на репараметризацију геодезијска.*

5.7 Комплетност

Ову секцију не можемо изучавати ако нисмо изучили неке претходне. Ако је многострукост геодезијски комплетна у некој тачки, онда се може доказати наредна лема.

Лема 5.21. *Ако је $p \in M$ тачка повезане Риманове многострукости M таква да је* $\exp_p$ *дефинисано на целокупном T_pM, онда за свако $q \in M$ постоји минимизујућа геодезијска из p у q.*

Основни резултат ове секције је да су геодезијска комплетност и метричка комплетност еквивалентни појмови, што је познато као Хопф[7]–Ринов[8] теорема из 1931. године [67].

Теорема 5.22. *Повезана Риманова многострукост је геодезијски комплетна ако и само ако је комплетна као метрички простор.*

5.8 Задаци

Задатак 5.1. Нека је (M, g) Риманова многострукост, а $P, Q \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ паралелна тензорска поља. Ако је $T \in \mathfrak{T}^0_4(M)$ дефинисано са $T(X, Y, Z, W) = P(X, Y)Q(Z, W)$ за свако $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, доказати да је и T паралелно.

Задатак 5.2. На $\mathbb{R}^3$ са уобичајеном еуклидском метриком уводимо повезаност ∇ која је у стандардним координатама дата са $\Gamma^3_{12} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{31} = 1$ и $\Gamma^3_{21} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{13} = -1$, док су сви остали Кристофелови симболи једнаки нули. Да ли је ∇ компатибилна са еуклидском метриком? Одредити геодезијске у односу на ∇. Да ли је ∇ Леви-Чивита повезаност?

Задатак 5.3. Одредити геодезијске у Белтрами-Клајновом диск моделу (M, g), где је $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$,

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2} + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}.$$

[7]Heinz Hopf (1894–1971), немачки математичар

[8]Willi Ludwig August Rinow (1907–1979), немачки математичар