Глава 4

ПСЕУДО-РИМАНОВА МЕТРИКА

4.1 Скаларни производ

Нека је $\mathcal{V}$ векторски простор над $\mathbb{R}$ коначне димензије. ***Билинеарна форма*** на $\mathcal{V}$ је $\mathbb{R}$-билинеарна функција $g\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$. За билинеарну форму g на $\mathcal{V}$ кажемо да је ***симетрична*** ако $g(X,Y)=g(Y,X)$ важи за свако $X,Y\in\mathcal{V}$. Другим речима, симетрична билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ је симетричан коваријантни тензор реда два на $\mathcal{V}$. Она је јединствено одређена одговарајућом квадратном формом $\varepsilon\colon\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ која је дата са

$$\varepsilon_X = g(X,X), \tag{4.1}$$

јер је можемо реконструисати користећи поларизациони идентитет

$$g(X,Y)=\frac{1}{4}(\varepsilon_{X+Y}-\varepsilon_{X-Y}), \tag{4.2}$$

или еквивалентно $g(X,Y)=(\varepsilon_{X+Y}-\varepsilon_X-\varepsilon_Y)/2$.

Кажемо да је симетрична билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ ***недегенерисана*** ако услов да $g(X,Y)=0$ важи за свако $Y\in\mathcal{V}$ повлачи $X=0$. Додатно, ако за свако $X\neq 0$ важи $g(X,X)>0$ онда је g ***позитивно дефинитно***. Слично, ако за свако $X\neq 0$ важи $g(X,X)<0$ онда је g ***негативно дефинитно***. Ако је g позитивно дефинитно или негативно дефинитно кажемо да је g ***дефинитно***, док је у супротном ***недефинитно***. Евидентно, ако је g дефинитно онда је и недегенерисано, док обрат не важи.

Скаларни производ g на $\mathcal{V}$ је недегенерисана симетрична билинеарна форма на $\mathcal{V}$. Коначнодимензиони реални векторски простор $\mathcal{V}$ опремљен скаларним производом g на $\mathcal{V}$ зовемо ***простор са скаларним производом*** $(\mathcal{V},g)$. Како скаларни производ g и одговарајућа квадратна форма ε због (4.1) и (4.2) носе једнаке информације, ради једноставности кажемо да је $(\mathcal{V},g)$ ***квадратни векторски простор***. Посебно, ***унутрашњи производ*** је позитивно дефинитан скаларни производ, док је у том случају $(\mathcal{V},g)$ ***простор са унутрашњим производом***.

У присуству неке базе $(E_1,\dots,E_n)$ од $\mathcal{V}$, свака билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ има одговарајућу ***Грамову матрицу*** G са елементима $g_{ij}=g(E_i,E_j)$ за $1\leqslant i,j\leqslant n$. Грамова матрица садржи комплетну информацију од g јер из билинеарности добијамо $g(\sum_{i=1}^n\alpha_iE_i,\sum_{j=1}^n\beta_jE_j)=\sum_{i,j=1}^n\alpha_i\beta_jg_{ij}$, што се у матричној нотацији може записати са $g(X,Y)=X^\intercal GY$, где $X,Y\in\mathcal{V}$ доживљавамо као колона матрице. Симетричност од g очигледно је еквивалентна симетричности одговарајуће Грамове матрице, $G^\intercal=G$. Коначно, услов недегенерисаности повлачи $\det G\neq 0$, што значи да је Грамова матрица инвертибилна, о чему говори наредна лема

Лема 4.1. *Симетрична билинеарна форма на $\mathcal{V}$ је недегенерисана ако и само ако је њена Грамова матрица у односу на било коју базу од $\mathcal{V}$ инвертибилна.*

Доказ. Нека је G Грамова матрица за g у односу на базу $(E_1, \dots, E_n)$. Ако је $\det G = 0$, тада постоји вектор $Y \neq 0$ такав да је $GY = 0$, што повлачи $g(X,Y) = X^{\intercal}GY = 0$ за свако $X \in \mathcal{V}$ и нарушава недегенерисаност. Обратно, ако је $\det G \neq 0$, тада $GY \neq 0$ важи за свако $Y \neq 0$, те постоји $1 \leqslant i \leqslant n$ такво да је $g(E_i, Y) = E_i^{\intercal}GY \neq 0$, одакле је g недегенерисано. □

Пример 4.1. Основни пример унутрашњег производа је стандардни скаларни производ еуклидског простора $\mathbb{R}^n$ дат са $g(X,Y) = X^{\intercal}Y = \sum_i x_i y_i$, а његова Грамова матрица у односу на канонску базу је јединична. Најједноставнији пример недефинитног скаларног производа је дат са $g(X,Y) = x_1y_1 - x_2y_2$ на $\mathbb{R}^2$. Овако дефинисано g је очигледно билинеарно, његова Грамова матрица G у односу на канонску базу је дијагонална са 1 и -1 на дијагонали, те је G симетрична и инвертибилна. △

Нека је $(\mathcal{V}, g)$ квадратни векторски простор. ***Норма*** или ***дужина*** вектора $X \in \mathcal{V}$ је ненегативан број $\|X\| = \sqrt{|g(X,X)|}$, док је његова ***квадратна норма*** $\varepsilon_X = g(X,X)$, те је зато $|\varepsilon_X| = \|X\|^2$. Знак од ε_X разврстава све ненула векторе $X \in \mathcal{V}$ у три различите класе, што указује на ***узрочни карактер*** вектора. Ненула вектор $X \in \mathcal{V}$ је ***просторан*** (*spacelike*) ако $\varepsilon_X > 0$; ***временски*** (*timelike*) ако $\varepsilon_X < 0$; ***изотропан*** (***светлосни***, *null*) ако $\varepsilon_X = 0$. Посебно, вектор $X \in \mathcal{V}$ је ***дефинитан*** (*nonnull*) за $\varepsilon_X \neq 0$, а уколико је $\varepsilon_X \in \{-1, 1\}$ ($\|X\| = 1$) онда је он ***јединичан*** (*unit*).

Напоменимо да смо узрочни карактер нула вектора оставили неодређеним. Природно, нула вектор се може сматрати изотропним, али кад кажемо да је вектор изотропан подразумеваћемо да он није нула. Неки аутори, посебно они који често раде у Лоренцовој геометрији (на пример О'Нил [92]), сматрају да је нула вектор просторан. Последња могућност је да нула вектор у себи има сва три узрочна карактера (видети Ли [73]).

Кажемо да су два вектора $X, Y \in \mathcal{V}$ ***међусобно ортогонална*** ако је $g(X,Y) = 0$, што обележавамо са $X \perp Y$. Слично, за подскупове $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$, који су најчешће потпростори, кажемо да су ***ортогонални*** и пишемо $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ ако $g(X,Y) = 0$ важи за све $X \in \mathcal{A}$ и $Y \in \mathcal{B}$, а природно можемо писати и $X \perp \mathcal{A}$ ако је $\operatorname{Span}\{X\} \perp \mathcal{A}$. ***Ортогонални потпростор*** (или ***нормалан потпростор***) неког потпростора $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ дефинишемо са $\mathcal{W}^{\perp} = \{X \in \mathcal{V} : X \perp \mathcal{W}\} \leqslant \mathcal{V}$, што је максимални потпростор од $\mathcal{V}$ који је ортогоналан на $\mathcal{W}$.

У дефинитном случају, ортогонални потпростор $\mathcal{W}^{\perp}$ је познат као ***ортогонални комплемент*** од $\mathcal{W}$, јер тада важи $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{W}^{\perp}$. Међутим, за недефинитно g у општем случају $\mathcal{W} + \mathcal{W}^{\perp}$ није целокупно $\mathcal{V}$, тако да ортогонал $\mathcal{W}^{\perp}$ некад није комплемент од $\mathcal{W}$. У сваком случају, ортогонал има неке добро познате особине које истичемо у наредне две леме.

Лема 4.2. *За произвољан потпростор $\mathcal{W}$ квадратног векторског простора $\mathcal{V}$ важи* $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^{\perp} = \dim \mathcal{V}$.

Доказ. Продужимо базу $(E_1, \dots, E_k)$ за $\mathcal{W}$ до базе $(E_1, \dots, E_n)$ за $\mathcal{V}$. Вектор $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i$ припада $\mathcal{W}^{\perp}$ ако и само ако важи $0 = g(X, E_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_{ij}$ за свако $1 \leqslant j \leqslant k$. Добијен је хомоген систем од $k = \dim \mathcal{W}$ линеарних једначина са $n = \dim \mathcal{V}$ непознатих, али по Леми 4.1 врсте од матрице коефицијената су линеарно независне, тако да је систем ранга k, што повлачи да скуп решења има димензију $n - k$. Међутим, скуп решења $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ по конструкцији даје тачно све $X \in \mathcal{W}^{\perp}$, те је зато $\dim \mathcal{W}^{\perp} = n - k$. □

Лема 4.3. *За потпростор $\mathcal{W}$ квадратног векторског простора $\mathcal{V}$ важи $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.*

Доказ. Како је $\mathcal{W} \perp \mathcal{W}^\perp$, то свакако важи $\mathcal{W} \leqslant (\mathcal{W}^\perp)^\perp$. Са друге стране, по Леми 4.2 имамо $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}^\perp + \dim(\mathcal{W}^\perp)^\perp$, те $\dim(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \dim \mathcal{W}$, одакле следи $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$. □

За потпростор $\mathcal{W}$ квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$, рестрикција скаларног производа $g\restriction_{\mathcal{W}} = g\restriction_{\mathcal{W}\times\mathcal{W}}$ је симетрична билинеарна форма на $\mathcal{W}$. Штавише, ако је g позитивно дефинитно, онда је $g\restriction_{\mathcal{W}}$ позитивно дефинитан скаларни производ на $\mathcal{W}$. Међутим, ако је g недефинитно онда $g\restriction_{\mathcal{W}}$ не мора бити недегенерисано.

Пример 4.2. Ако је $S \in \mathcal{V}$ просторни, а $T \in \mathcal{V}$ временски вектор, онда лако можемо конструисати изотропан вектор са

$$N = S + \frac{-g(S,T) \pm \sqrt{(g(S,T))^2 - \varepsilon_S \varepsilon_T}}{\varepsilon_S} T,$$

јер је коефицијент уз T решење квадратне једначине $\varepsilon_{S+xT} = \varepsilon_S + 2xg(S,T) + x^2\varepsilon_T = 0$. Ако је g недефинитно онда постоје и просторни и временски вектори, а самим тим и изотропно N, те за $\mathcal{W} = \operatorname{Span}\{N\} \leqslant \mathcal{V}$ рестрикција $g\restriction_{\mathcal{W}}$ није недегенерисана. △

Особине рестрикције скаларног производа квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$ преносимо на потпростор $\mathcal{W}$, за који кажемо да је ***недегенерисан***, ***позитивно дефинитан*** или ***негативно дефинитан***, ако је таква његова рестрикција $g\restriction_{\mathcal{W}}$. ***Радикал*** од $\mathcal{W}$ је потпростор $\operatorname{rad}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp$ и може нам послужити за карактеризацију недегенерисаних потпростора.

Лема 4.4. *Нека је $\mathcal{W}$ потпростор квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$. Тада су еквивалентни искази:* $\operatorname{rad}(\mathcal{W})$ *је тривијалан, $\mathcal{W}$ је недегенерисан, $\mathcal{W}^\perp$ је недегенерисан, $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$.*

Доказ. По дефиницији, $\mathcal{W}$ је недегенерисан ако је 0 једини вектор из $\mathcal{W}$ ортогоналан на $\mathcal{W}$, односно за $\operatorname{rad}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$. Из Леме 4.3 је $\operatorname{rad}(\mathcal{W}) = \operatorname{rad}(\mathcal{W}^\perp)$, те су недегенерисаности од $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}^\perp$ еквивалентне. Из Грасманове[1] формуле имамо једнакост између $\dim(\mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp) + \dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp)$ и $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp$, што је $\dim \mathcal{V}$ по Леми 4.2. Одавде следи да је $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$ еквивалентно са $\operatorname{rad}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$. □

Наравно, како је скаларни производ недегенерисан, то је $\operatorname{rad}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}^\perp = \{0\}$. Ортогоналну директну суму обележавамо са $\oplus$, те за недегенерисан $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ можемо писати $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$.

Скаларни производ g на $\mathcal{V}$ се дијагонализује једноставном применом Леме 4.4. Као и обично, за скуп међусобно ортогоналних јединичних вектора кажемо да је ***ортонормиран***. Сваки скуп који се састоји од $\dim \mathcal{V}$ ортонормираних вектора у $\mathcal{V}$ свакако чини базу у $\mathcal{V}$ и таква база увек постоји.

Лема 4.5. *Сваки квадратни векторски простор има ортонормирану базу.*

Доказ. Доказ иде индукцијом по $n = \dim \mathcal{V}$, док је случај $\dim \mathcal{V} = 1$ очигледан. За $n > 1$ можемо изабрати дефинитан вектор $X \in \mathcal{V}$ (иначе $\varepsilon_X = 0$ важи за све $X \in \mathcal{V}$, те је $g = 0$ дегенерисано), а његовим скалирањем добијамо јединично $E_1 = (1/\sqrt{|\varepsilon_X|})X$. Једнодимензиони потпростор $\operatorname{Span}\{E_1\}$ је недегенерисан, те је по Леми 4.4 то и $\operatorname{Span}\{E_1\}^\perp$. По индукцијској хипотези, постоји ортонормирана база $(E_2, \ldots, E_n)$ од $\operatorname{Span}\{E_1\}^\perp$. Како важи $\mathcal{V} = \operatorname{Span}\{E_1\} + \operatorname{Span}\{E_1\}^\perp$, то је $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ тражена ортонормирана база. □

[1] Hermann Günther Graßmann (1809–1877), немачки физичар, математичар и лингвиста

Недефинитан скаларни производ често има додатно појављивање $\varepsilon_{E_i} \in \{-1, 1\}$ за векторе из ортонормиране базе $(E_1, \dots, E_n)$ у формулама које одговарају онима за позитивно дефинитан случај. Ако је $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i$ тада је $g(X, E_j) = \alpha_j g(E_j, E_j)$, те $\alpha_j = g(X, E_j)/g(E_j, E_j) = \varepsilon_{E_j} g(X, E_j)$, одакле добијамо

$$X = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} g(X, E_i) E_i. \tag{4.3}$$

Лема 4.6. *Ако је $(E_1, \dots, E_n)$ ортонормирана база квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$, тада се свако $X \in \mathcal{V}$ јединствено изражава формулом* (4.3).

Грамова матрица скаларног производа g у односу на ортонормирану базу $(E_1, \dots, E_n)$ од $\mathcal{V}$ је дијагонална матрица јер важи $g_{ij} = g(E_i, E_j) = \delta_{ij}\varepsilon_{E_i}$. Кад год је то згодно, векторе у ортонормираној бази уређујемо тако да се најпре појаве негативни знаци, $\varepsilon_{E_i} = -1$ за $1 \leqslant i \leqslant \nu$, а затим позитивни, $\varepsilon_{E_i} = 1$ за $\nu < i \leqslant n$. Ортонормирана допуна базе и даље је могућа узимајући ове знаке у обзир.

Индекс скаларног производа g на $\mathcal{V}$ је највећи број $\operatorname{Ind}(g) \in \mathbb{N}_0$ који је димензија негативно дефинитног потпростора од $\mathcal{V}$. Број негативних ε_{E_i} једнак је индексу од g што успоставља следећу теорему познату као ***Силвестеров закон инерције***[2].

Теорема 4.7. *Број негативних ε_{E_i} не зависи од избора ортонормиране базе $(E_1, \dots, E_n)$ у квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ и једнак је индексу од g.*

Доказ. Ако је $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{V}$ негативно дефинитан, а $\mathcal{S} \leqslant \mathcal{V}$ позитивно дефинитан, имамо $\mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \{0\}$, одакле Грасманова формула даје $\dim \mathcal{T} + \dim \mathcal{S} = \dim(\mathcal{T} + \mathcal{S}) \leqslant \dim \mathcal{V} = n$. Потпростор $\mathcal{S} = \operatorname{Span}\{E_{\nu+1}, \dots, E_n\}$ је позитивно дефинитан, што даје $\dim \mathcal{T} \leqslant \nu$, док је $\dim \mathcal{T} = \nu$ за негативно дефинитан $\mathcal{T} = \operatorname{Span}\{E_1, \dots, E_\nu\}$, те добијамо $\operatorname{Ind}(g) = \nu$. $\square$

Индекс квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$ димензије n је индекс његовог скаларног производа $\nu = \operatorname{Ind}(\mathcal{V}) = \operatorname{Ind}(g)$, док је ***сигнатура*** уређен пар (p, q) који представља број негативних ε_{E_i} и број позитивних ε_{E_i}. По Теореми 4.7, бројеви $0 \leqslant p, q \leqslant n$ не зависе од избора ортонормиране базе и важи $p = \nu$, $q = n - \nu$.

Вреди напоменути да је $(\mathcal{V}, -g)$ такође квадратни векторски простор, а за њега важи $\operatorname{Ind}(-g) = n - \operatorname{Ind}(g)$. Квадратни векторски простори $(\mathcal{V}, g)$ и $(\mathcal{V}, -g)$ размењују бројеве у сигнатури (сигнатура првог је $(\operatorname{Ind}(g), \operatorname{Ind}(-g))$), али разлика између њих није суштинска, те је уобичајено да се индекс нормира са $\nu \leqslant n/2$, што би значило да временских координата нема више од просторних.

Нека су $(\mathcal{V}, g^{\mathcal{V}})$ и $(\mathcal{W}, g^{\mathcal{W}})$ квадратни векторски простори. Кажемо да линарно пресликавање $L\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ чува скаларни производ ако $g^{\mathcal{W}}(LX, LY) = g^{\mathcal{V}}(X, Y)$ важи за све $X, Y \in \mathcal{V}$. Такво пресликавање L је обавезно инјективно јер $LX = 0$ повлачи $g^{\mathcal{V}}(X, Y) = 0$ за све $Y \in \mathcal{V}$ одакле следи $X = 0$. Наравно, ако L чува скаларни производ онда чува и одговарајуће квадратне форме, док обрат следи из поларизације. ***Линеарна изометрија*** је линеарно бијективно пресликавање које чува скаларни производ.

Лема 4.8. *Линеарна изометрија $L\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ постоји ако и само ако квадратни векторски простори $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ имају исту димензију и индекс.*

Доказ. Ако је L линеарна изометрија онда је $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ и L пресликава ортонормирану базу од $\mathcal{V}$ у ортонормирану базу од $\mathcal{W}$, те Теорема 4.7 даје $\operatorname{Ind} \mathcal{V} = \operatorname{Ind} \mathcal{W}$. Обратно, можемо преуредити ортонормиране базе $(E_1, \dots, E_n)$ од $\mathcal{V}$ и $(F_1, \dots, F_n)$ од $\mathcal{W}$ тако да је $g^{\mathcal{V}}(E_i, E_i) = g^{\mathcal{W}}(F_i, F_i)$, те дефинисати линеарну изометрију са $L(E_i) = F_i$. $\square$

[2] James Joseph Sylvester (1814–1897), енглески математичар

Ово је почетна секција Главе 4 из Књиге, јер је важно да знате дефиниције и имате основно знање да бисте могли да читате Књигу. Ми ћемо се фокусирати на унутрашњи производ, дакле на позитивно дефинитан скаларни производ (на који сте навикли). У том случају не постоје ни временски ни изотропни вектори, индекс је нула, $\varepsilon_{E_i} = 1$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, а формула (4.3) је добро познато $X = \sum_{i=1}^{n} g(X, E_i)E_i$.

4.2 Изотропни вектори

Како се фокусирамо на унутрашњи производ, изотропни вектори не постоје, те нам ова секција није неопходна. Ко жели да побољша општу културу може да је научи из Књиге.

4.3 Псеудо-Риманове многострукости

Метрички тензор или ***метрика*** на многострукости M је симетрично коваријантно тензорско поље реда два на M које је недегенерисано у свакој тачки и има константан индекс. Другим речима, метрика је пресликавање $g \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ које свакој тачки $p \in M$ глатко додељује скаларни производ $g_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ на тангентном простору T_pM, тако да индекс $\mathrm{Ind}(g_p)$ не зависи од p. ***Псеудо-Риманова многострукост*** (*pseudo-Riemannian manifold*, *semi-Riemannian manifold*) је многострукост M опремљена метриком g.

Строго говорећи, псеудо-Риманова многострукост је уређен пар (M, g). Две различите метрике на истој многострукости успостављају различите псеудо-Риманове многострукости. Често се дешава да псеудо-Риманова многострукост има подразумевану конкретну метрику, те је тада обележавамо исто као и саму глатку многострукост.

Заједнички индекс $0 \leqslant \nu = \mathrm{Ind}(g_p) = \mathrm{Ind}(g) = \mathrm{Ind}(M) \leqslant \dim M = n$ свих скаларних производа g_p зовемо ***индекс*** псеудо-Риманове многострукости (M, g). Како разлика између g и $-g$ у псеудо-Римановој многострукости није суштинска, не умањујући општост можемо претпоставити да индекс задовољава $\nu \leqslant n/2$.

Занимљиво је посматрати неке специјалне случајеве у зависности од индекса. Најчешће се изучава случај $\nu = 0$, где за M кажемо да је ***Риманова многострукост***. У овом случају g је ***Риманова метрика***, а карактерише је то да је g_p позитивно дефинитан скаларни производ на T_pM за свако $p \in M$. Ако је $\nu = 1 \neq n$ онда је M ***Лоренцова многострукост***[3], а одговарајућа метрика је ***Лоренцова***. Псеудо-Риманова многострукост сигнатуре (ν, ν) је ***Клајнова многострукост***[4], она је обавезно парне димензије, док за њену метрику кажемо да је ***Клајнова*** или ***неутрална***.

Ми ћемо се фокусирати на Риманову геометрију! Риманова метрика за глатку многострукост M је симетричано коваријантно тензорско поље реда два, $g \in \mathfrak{X}(M)$, такво да се у свакој тачки $p \in M$ рестрикује на унутрашњи производ (позитивно дефинитан скаларни производ) g_p. Риманова многострукост је многострукост опремљена Римановом метриком.

Нека је (U, φ) карта на псеудо-Римановој n-многострукости (M, g), где су $x_i = \pi_i \circ \varphi$ њене координатне функције. Компоненте метричког тензора g на U су $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$

[3] Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), холандски физичар
[4] Felix Klein (1849–1925), немачки математичар

за $1 \leqslant i,j \leqslant n$, те за векторска поља $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ важи

$$g(X,Y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} X(x_i)\partial_i, \sum_{j=1}^{n} Y(x_j)\partial_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} g(\partial_i,\partial_j)X(x_i)Y(x_j) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i(X)\, dx_j(Y),$$

одакле метрички тензор можемо изразити са

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

где је $dx_i\, dx_j = (dx_i \otimes dx_j + dx_j \otimes dx_i)/2$ симетричан производ ковекторских поља.

Пример 4.6. Најједноставнији и најважнији пример Риманове многострукости је еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ са ***еуклидском метриком*** $\bar{g}$ која представља класичан унутрашњи производ на сваком тангентном простору под природном идентификацијом $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. У стандардним координатама можемо записати

$$\bar{g} = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2, \tag{4.5}$$

односно $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$, што даје јединичну Грамову матрицу $G = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Убудуће у било ком геометријском контексту ***еуклидски простор*** $\mathbb{R}^n$ означава Риманову многострукост $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$. $\triangle$

Пример 4.7. У стандардној метрици $\bar{g}$ из (4.5) за $\mathbb{R}^n$, за било које $1 \leqslant \nu \leqslant n$ можемо променити првих ν знакова из плуса у минус, што нас доводи до метричког тензора $g = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, (dx_i)^2$ где имамо $\varepsilon_i = -1$ за $1 \leqslant i \leqslant \nu$ и $\varepsilon_i = +1$ за $\nu + 1 \leqslant i \leqslant n$. Резултујућа псеудо-Риманова многострукост $\mathbb{R}^n_\nu = (\mathbb{R}^n, g)$ је ***псеудо-еуклидски простор*** индекса ν. Посебно, Лоренцову многострукост $\mathbb{R}^n_1$ за $n \geqslant 2$ зовемо ***простор Минковског***[5], а специјално $\mathbb{R}^4_1$ представља најједноставнији пример релативистичког простор-времена. $\triangle$

Често се уместо метричког тензора g посматра одговарајућа квадратна норма $\varepsilon_X = g(X,X)$ за $X \in TM$ која по (4.2) у потпуности одређује метрички тензор. Ова квадратна форма ε зове се ***дужински елемент*** (*line element*) од M и обележавамо је са ds^2. У терминима координатног система имамо $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i\, dx_j$, односно

$$\varepsilon_X = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i(X)\, dx_j(X) = \sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j.$$

Ако су p и p' блиске тачке са координатама $(x_1, \dots, x_n)$ и $(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n)$ у некој карти, тада тангентни вектор $\Delta p = \sum_i \Delta x_i \partial_i$ у p показује апроксимативно ка p'. Због тога очекујемо да квадрат растојања ds од p до p' буде апроксимативно $|\Delta p|^2 = g(\Delta p, \Delta p) = \sum_{i,j} g_{ij}(p)\Delta x_i\, \Delta x_j$, као што се дешава у формули за ds^2, што оправдава ту неуобичајену ознаку.

У присуству метричког тензора можемо говорити о ортонормираним векторским пољима. Нека је U отворен подскуп псеудо-Риманове n-многострукости (M, g). ***Локални ортонормирани покретни репер*** за M над U је локални покретни репер $(E_1, \dots, E_n)$ за M над U који у свакој тачки $p \in U$ формира ортонормирану базу тангентног простора T_pM. На пример, координатни покретни репер $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ је глобални ортонормирани покретни репер за $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$.

[5]Hermann Minkowski (1864–1909), немачки математичар

Пример 4.9. Посматрајмо отворен подскуп $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Поставимо јединично векторско поље E_1 тангентно на радијалне линије и јединично векторско поље E_2 тангентно на кругове центриране у координатном почетку. Тада векторска поља

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad E_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

чине локални ортонормирани покретни репер над U (видети Пример 2.29 за рачуне). Међутим, (E_1, E_2) не може бити координатни покретни репер у односу на неки избор локалних координата јер важи $[E_1, E_2] = -(\partial/\partial\theta)/r^2 \neq 0$. △

Ортонормирани покретни репери су веома корисни у изучавању Риманових и псеудо-Риманових многострукости. У општем случају важи следећа теорема.

Теорема 4.13. *Постоји локални ортонормирани покретни репер над околином сваке тачке псеудо-Риманове многострукости.*

У случају недефинитне метрике доказ ове теореме је незгодан. Међутим, за Риманову многострукост доказ је једноставан јер Грам–Шмитов поступак глатко конструише локални ортонормирани покретни репер почевши од произвољног локалног покретног репера. Риманов случај је лаган јер вектори чије се норме јављају у имениоцима нигде нису нула (што није тачно за изотропне векторе у општем случају).

4.4 Повлачење метричких тензора

Кад правимо нове многострукости од старих, често постоји одговарајући начин да се на новој многострукости изведе метрика из старе метрике. У ту сврху потребно нам је повлачење коваријантног тензорског поља. Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости M и псеудо-Риманове многострукости (N, g). Повлачење метрике $g \in \mathfrak{T}^0_2(N)$ је $f^*g \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ тако да у свакој тачки $p \in M$ за $X_p, Y_p \in T_pM$ имамо

$$(f^*g)_p(X_p, Y_p) = g_{f(p)}(f_*(X_p), f_*(Y_p)),$$

а како је g симетрично то је такво и f^*g. Међутим, ако f није имерзија онда f_* није инјективно и за неку тачку $p \in M$ постоји $0 \neq X_p \in T_pM$ такво да је $f_*(X_p) = 0$, што даје $(f^*g)_p(X_p, Y_p) = 0$ за свако $Y_p \in T_pM$, те $(f^*g)_p$ није недегенерисано. Због тога f^*g може бити метрика само уколико је f имерзија, али то у општем случају није довољно.

Пример 4.10. Посматрајмо јединични круг $\mathbf{S}^1$ који је смештен у $\mathbb{R}^2_1$ природним смештањем $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, где је θ локална координата. Повлачење метричког тензора гласи $f^*g = f^*(-dx^2 + dy^2) = -(-\sin\theta\, d\theta)^2 + (\cos\theta\, d\theta)^2 = \cos 2\theta\, d\theta^2$, што је дегенерисано за $\theta \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$, а ту мења и индекс. △

Међутим, у Римановом случају имерзија јесте и довољан услов. Ако је f_* инјективно, онда позитивно дефинитно g повлачи позитивно дефинитно f^*g, те је f^*g Риманова метрика.

Теорема 4.14. *Ако је (N, g) Риманова многострукост, а $f\colon M \to N$ имерзија, тада је (M, f^*g) Риманова многострукост.*

Нека је P подмногострукост псеудо-Риманове многострукости (M, g), а $\imath\colon P \hookrightarrow M$ одговарајућа инклузија. Уколико је $\imath^* g$ метрика на P тада кажемо да је $(P, \imath^* g)$ ***псеудо-Риманова подмногострукост*** од (M, g). Тангентни простор T_pP може се видети као потпростор од T_pM, али нема неког разлога зашто би он морао бити недегенерисан у односу на g_p, као што нам нико не гарантује да уколико је то испуњено имамо константан $\mathrm{Ind}(g_p)$.

Захваљујући Теореми 4.14 ствари су доста једноставније у Римановом случају. Ако је P подмногострукост Риманове многострукости (M, g) са инклузијом $\imath\colon P \hookrightarrow M$, онда је $(P, \imath^* g)$ ***Риманова подмногострукост*** од (M, g). Како у сваком $p \in P$ важи $T_pP \leqslant T_pM$, Риманову метрику $\imath^* g$ на P добијамо једноставном применом метричког тензора g.

Ако знамо координатну репрезентацију имерзије, онда се индукована Риманова метрика може лако израчунати. У некој карти са координатним функцијама x_i важи

$$f^* g = f^* \left(\sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i\, dx_j \right) = \sum_{i,j} f^*(g_{ij}) f^*(dx_i) f^*(dx_j) = \sum_{i,j} (g_{ij} \circ f)\, d(x_i \circ f)\, d(x_j \circ f),$$

што примењујемо на наредним конкретним примерима.

Пример 4.11. Нека је $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ дато са $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, што је имерзија чија је слика хеликоид. Индуковану метрику $f^* \bar{g}$ рачунамо са

$$\begin{aligned} f^* \bar{g} &= f^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) = d(u \cos v)^2 + d(u \sin v)^2 + d(v)^2 \\ &= (\cos v\, du - u \sin v\, dv)^2 + (\sin v\, du + u \cos v\, dv)^2 + dv^2 = du^2 + (u^2 + 1)\, dv^2. \end{aligned}$$

△

Трансформација Риманове метрике под променом координата може се посматрати као идентичко пресликавање са различитим координатама у домену и кодомену.

Пример 4.12. Еуклидска метрика $\bar{g} = dx^2 + dy^2$ на $\mathbb{R}^2$ у поларним координатама се рачуна као повлачење идентичког пресликавања. Како је $x = r \cos \theta$ и $y = r \sin \theta$, то имамо

$$\begin{aligned} \bar{g} &= dx^2 + dy^2 = d(r \cos \theta)^2 + d(r \sin \theta)^2 \\ &= (\cos \theta\, dr - r \sin \theta\, d\theta)^2 + (\sin \theta\, dr + r \cos \theta\, d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \end{aligned}$$

△

Риманова метрика подразумева позитивну дефинитност и она је најчешће изучавана метрика. Једна лепа особина Риманових метрика је да их има у изобиљу.

Теорема 4.15. *Свака многострукост дозвољава Риманову метрику.*

Доказ. Нека је M многострукост са глатким атласом $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$. По Теореми 1.20 постоји разбијање јединице $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ подређено отвореном покривачу $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. У свакој карти постоји Риманова метрика $g_\alpha = \varphi_\alpha^* \bar{g}$ индукована стандардном еуклидском метриком из (4.5). Због локалне коначности постоји коначно много ненула чланова у околини сваке тачке, те $g = \sum_{\alpha \in \Lambda} \psi_\alpha g_\alpha$ дефинише симетрично коваријантно тензорско поље реда два. За $0 \neq X \in T_pM$ имамо $g_p(X, X) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \psi_\alpha(p)(g_\alpha)_p(X, X)$. Како је сваки члан ненегативан, сума је ненегативна, а због $\sum_{\alpha \in \Lambda} \psi_\alpha(p) = 1$, бар један од $\alpha \in \Lambda$ има $\psi_\alpha(p) > 0$. Зато важи $g_p(X, X) > 0$, те је g позитивно дефинитна метрика. □

Важно је приметити да постоји огроман избор у конструкцији метрике g за дату многострукост. Конкретно, разне метрике на истој многострукости могу имати прилично различите геометријске особине. Међутим, исти поступак не ради у недефинитном случају, иако можемо конструисати метрику индекса ν на свакој координатној околини за свако $0 < \nu < n$. Разлог је тај што збир две метрике индекса ν може бити дегенерисан, те не мора да буде метрика.

Пример 4.13. Нека су (M, g_M) и (N, g_N) псеудо-Риманове многострукости, те нека су $\pi_M \colon M \times N \to M$ и $\pi_N \colon M \times N \to N$ природне пројекције. На производ многострукости $M \times N$ можемо дефинисати ***производ метрику*** са $g_M \times g_N = \pi_M^*(g_M) + \pi_N^*(g_N)$. Ако искористимо природан изоморфизам $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \times T_qN$ из Примера 2.2 добијамо да је одговарајућа Грамова матрица блок дијагонална где су блокови појединачне Грамове матрице. Псеудо-Риманову многострукост $(M \times N, g_M \times g_N)$ зовемо ***псеудо-Риманов производ*** од (M, g_M) и (N, g_N). △

Пример 4.14. Општије од претходног примера, за сваку строго позитивну функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ можемо поставити

$$g_M \times_f g_N = \pi_M^*(g_M) + (f \circ \pi_M)\pi_N^*(g_N).$$

Овог пута Грамова матрица у тачки (p, q) је блок дијагонална матрица где је први блок Грамова матрица за g_M у тачки p, а други Грамова матрица од g_N у тачки q множена позитивном константом $c = f(p) > 0$. Очигледно важе симетричност и недегенерисаност, док из $\mathrm{Ind}(cg_N) = \mathrm{Ind}(g_N)$ следи $\mathrm{Ind}(g) = \mathrm{Ind}(g_M) + \mathrm{Ind}(g_N)$. Псеудо-Риманову многострукост $M \times_f N = (M \times N, g_M \times_f g_N)$ зовемо ***уврнути производ*** (*warped product*), што се у случају $f = 1$ своди на стандардни псеудо-Риманов производ. △

Нека су (M, g_M) и (N, g_N) две псеудо-Риманове многострукости. Глатко пресликавање $f \colon M \to N$ између одговарајућих многострукости је ***псеудо-Риманова имерзија*** уколико чува метричке тензоре, $f^*(g_N) = g_M$, што можемо експлицитно записати са

$$(g_M)_p(X_p, Y_p) = (g_N)_{f(p)}(T_pf(X_p), T_pf(Y_p))$$

за свако $p \in M$ и $X_p, Y_p \in T_pM$. Свако такво пресликавање је имерзија, што оправдава име и доноси неједнакости $\dim M \leqslant \dim N$ и $\mathrm{Ind}\, g_M \leqslant \mathrm{Ind}\, g_N$.

Изометрија из (M, g_M) у (N, g_N) је псеудо-Риманова имерзија $f \colon M \to N$ која је такође дифеоморфизам. Кажемо да су псеудо-Риманове многострукости ***изометричне*** уколико постоји изометрија између њих. Ако је псеудо-Риманова имерзија f само локални дифеоморфизам онда кажемо да је у питању ***локална изометрија***. Како је такво f већ имерзија, за локалну изометрију по Теореми 2.9 додатно важи још само то да је $\dim M = \dim N$.

Лако је увидети да су композиција две изометрије и инверз изометрије такође изометрије, као што је то и идентичко пресликавање. Бити изометричан је зато релација еквиваленције, те можемо рећи да је изометрија нарочита врста пресликавања која омогућава појам изоморфизма у категорији псеудо-Риманових многострукости. ***Псеудо-Риманова геометрија*** представља изучавање особина псеудо-Риманових многострукости које су инваријантне у односу на локалне или глобалне изометрије.

За фиксирану псеудо-Риманову многострукост M, изометрија $f \colon M \to M$ се зове ***изометрија од*** M. Скуп свих изометрија од M чини групу $\mathcal{I}(M)$, коју зовемо ***група изометрија*** од M. Значајна јака теорема тврди да група изометрија $\mathcal{I}(M)$ псеудо-Риманове многострукости M има структуру Лијеве групе у односу на компактно-

-отворену топологију [77, Последица 2]. За Риманове многострукости ову теорему су установили Мајерс[6] и Стинрод 1939. године [83].

Пример 4.15. Нека је $f\colon \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ дато са $f(z) = z^2$, где је $\imath\colon \mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$, те $\mathbf{S}^1$ има Риманову метрику $g = \imath^*\bar{g}$. Како је f имерзија, по Теореми 4.14 је f^*g Риманова метрика. Дакле, f је Риманова имерзија, али како f није дифеоморфизам то она није изометрија. $\triangle$

Пример 4.16. Нека је $(\mathcal{V}, g)$ квадратни векторски простор димензије n. Избор базе на $\mathcal{V}$ индукује бијективно линеарно пресликавање што је хомеоморфизам између $\mathcal{V}$ и $\mathbb{R}^n$, те је $\mathcal{V}$ многострукост. Постоји канонски линеарни изоморфизам $X \mapsto X_Z$ из $\mathcal{V}$ на сваки тангентни простор $T_Z\mathcal{V}$ који је дат као извод по правцу

$$X_Z h = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h(Z + tX),$$

где нас $g_Z(X_Z, Y_Z) = g(X, Y)$ доводи до метричког тензора на многострукости $\mathcal{V}$ која тако постаје псеудо-Риманова многострукост. Ако је $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ линеарна изометрија на квадратним векторским просторима $(\mathcal{V}, g^{\mathcal{V}})$ и $(\mathcal{W}, g^{\mathcal{W}})$, тада је

$$T_Z f(X_Z)(h) = X_Z(h \circ f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h(f(Z) + tf(X)) = f(X)_{f(Z)} h,$$

што даје $T_Z f(X_Z) = f(X)_{f(Z)}$, одакле следи

$$\begin{aligned}(f^* g^{\mathcal{W}})_Z(X_Z, Y_Z) &= g^{\mathcal{W}}_{f(Z)}(f_* X_Z, f_* Y_Z) = g^{\mathcal{W}}_{f(Z)}(f(X)_{f(Z)}, f(Y)_{f(Z)}) \\ &= g^{\mathcal{W}}(f(X), f(Y)) = g^{\mathcal{V}}(X, Y) = g^{\mathcal{V}}_Z(X_Z, Y_Z),\end{aligned}$$

те је f псеудо-Риманова имерзија. Како је линеарно пресликавање глатко, линеарни изоморфизам f је дифеоморфизам, те је f изометрија између псеудо-Риманових многострукости $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$. Одавде следи да је квадратни векторски простор $\mathcal{V}$ димензије n и индекса ν као псеудо-Риманова многострукост изометрична са $\mathbb{R}^n_\nu$. Заправо, координатни изоморфизам било које ортонормиране базе у $\mathcal{V}$ је изометрија. $\triangle$

4.5 Музички изоморфизми

Није лоше имати у виду да псеудо-Риманова метрика индукује изоморфизам између векторских и ковекторских поља. За дату псеудо-Риманову многострукост (M, g) можемо дефинисати пресликавање $\flat\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ које зовемо ***снизилица*** (*flat*), а које векторском пољу $X \in \mathfrak{X}(M)$ додељује ковекторско поље $X^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$ дефинисано са $X^\flat(Y) = g(X, Y)$ за свако $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

За произвољну тачку $p \in M$ можемо рестриковати снизилицу и добити пресликавање $\flat\colon TM \to T^*M$, односно $\flat_p\colon T_pM \to T_p^*M$, које вектор $X_p \in T_pM$ шаље у ковектор $X_p^\flat \in T_p^*M$ дат са $X_p^\flat(Y_p) = g_p(X_p, Y_p)$ за свако $Y_p \in T_pM$.

Услов недегенерисаности симетричне билинеарне форме $g_p \in \mathfrak{T}^0_2(T_pM)$ еквивалентан је услову $\operatorname{Ker}(\flat_p) = 0$, односно томе да је $\flat_p$ инјективно. Како радимо само са коначним димензијама то имамо $\dim T_pM = \dim T_p^*M = \dim M$, те је недегенерисаност еквивалентна услову да је $\flat_p$ изоморфизам. Како је метрика увек недегенерисана, то је снизилица изоморфизам између одговарајућих тангентних и котангентних простора, односно између векторских и ковекторских поља.

[6] Sumner Byron Myers (1910–1955), амерички математичар

Погледајмо шта се дешава у карти (U,φ) са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Ако је $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$, тада имамо

$$X^\flat = \sum_{j=1}^n X^\flat\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_j = \sum_{j=1}^n g\left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_j = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i \, dx_j = \sum_{j=1}^n X_j \, dx_j,$$

где је $X_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} X^i$. Можемо рећи да је $X^\flat$ добијено од X спуштањем индекса, што је и разлог зашто операцију зовемо снизилица. Матрица снизилице у терминима координатне базе је заправо Грамова матрица од g.

Са друге стране, инверзни изоморфизам $\sharp = \flat^{-1}\colon \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$ зовемо ***повисилица*** (*sharp*). Повисилица ковекторско поље $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ шаље у векторско поље $\omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ такво да $\omega(X) = g(\omega^\sharp, X)$ важи за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$. У координатама матрица повисилице је инверзна матрици снизилице.

Како је g недегенерисано, Грамова матрица са улазима g_{ij} је инвертибилна у свакој тачки, те постоји њој инверзна матрица са улазима g^{jk}, где је $\sum_{j=1}^n g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik}$. Компоненте инверзне матрице глатко зависе од почетних компоненти, те су и функције g^{ij} глатке на U. Како је g симетрично, имамо

$$g^{jk} = \sum_{i=1}^n g^{ik} \delta_{ij} = \sum_{i,l=1}^n g^{ik}(g_{il} g^{lj}) = \sum_{i,l=1}^n (g^{ik} g_{li}) g^{lj} = \sum_{l=1}^n \delta_{kl} g^{lj} = g^{kj},$$

те је инверз такође симетричан, $g^{jk} = g^{kj}$. Сада за $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \, dx_i$ имамо $\omega^\sharp = \sum_{j=1}^n \omega^j \partial_j$, где је $\omega^j = \sum_{i=1}^n g^{ij} \omega_i$ и кажемо да је $\omega^\sharp$ добијено од ω дизањем индекса.

Пресликавања $\flat\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ и $\sharp\colon \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$ су ***музички изоморфизми***, симпатично име које је пропагирао (и вероватно сковао) Берже[7] [17].

Вероватно најважнија примена повисилице је проширење класичног градијента на псеудо-Риманове многострукости. Ако је (M,g) псеудо-Риманова многострукост и $f \in \mathfrak{F}(M)$, онда је ***градијент*** од f векторско поље $\operatorname{grad} f = df^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ добијено из диференцијала $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ дизањем индекса. Градијент можемо изразити формулом

$$g(\operatorname{grad} f, X) = df(X) = Xf,$$

која важи за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$, док у локалним координатама имамо

$$\operatorname{grad} f = df^\sharp = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n g^{ij} \, df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Посебно, за природне координате псеудо-еуклидског простора $\mathbb{R}^n_\nu$ координатни покретни репер је ортонормиран, те се формула своди на $\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \partial_i f \partial_i$, што даје уобичајену формулу за еуклидски простор у којем градијент има исте компоненте као и df.

Снизилица и повисилица се могу применити на тензоре произвољног типа и на било којој позицији индекса. На тај начин се контраваријантни тензор преводи у коваријантни или обратно. На пример, у случају тензора $A \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ можемо снизити горњи индекс тако да добијемо коваријантни тензор $A^\flat \in \mathfrak{T}^0_3(M)$ чије су компоненте $A_{ijk} = (A^\flat)_{ijk} = \sum_{l=1}^n g_{il} A^l_{jk}$.

[7] Marcel Berger (1927–2016), француски математичар

У општем случају снизилица може прећи на одговарајући аргумент јер из једнакости (3.6) имамо

$$A^\flat(\dots,X,\dots) = \sum_i \sum \cdots X^i \cdots (A^\flat)_{\dots i}^{\dots} = \sum_i \sum \cdots X^i \cdots \sum_j g_{ji} A_{\dots}^{\dots j}$$
$$A(\dots,X^\flat,\dots) = \sum_j \sum \cdots (X^\flat)_j \cdots A_{\dots}^{\dots j} = \sum_j \sum \cdots \sum_i g_{ji} X^i \cdots A_{\dots}^{\dots j},$$

што аналогно важи и за повисилицу. Конкретно, $A^\flat(X,Y,Z) = A(X^\flat,Y,Z)$ за $A \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ и $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Снизилице и повисилице такође имају важну примену да продуже контракцију. На пример, за симетричан коваријантни тензор $A \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ дизањем једног индекса (свеједно којег јер је A симетричан) имамо $A^\sharp \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, одакле применом контракције добијамо $\mathrm{tr}_g(A) = C(A^\sharp) \in \mathfrak{F}(M)$, што је ***траг*** од A у односу на g. У координатама то је $\mathrm{tr}_g(A) = C(A^\sharp) = \sum_{i=1}^n A_i{}^i = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} A_{ij}$, што се у случају ортонормиране базе своди на обичан траг матрице.

4.6 Модел простори

Ово је корисна секција, развија интуицију везану за Риманове многострукости, а добро је видети и конкретне рачуне који се тамо спроводе. Међутим, у случају да немам довољно времена, склон сам да то жртвујем. У сваком случају, секцију можете прочитати у Књизи.

4.7 Дужина и растојање

На еуклидским просторима одмах имамо концепт растојања између тачака, тако да дефиницију дужине криве оправдава сума растојања за добру полигоналну апроксимацију. Риманове многострукости нису унапред метрички простори, док псеудо-Риманове многострукости (са недефинитном метриком) уопште нису метрички простори. Међутим, позитивно дефинитан скаларни производ на тангентном простору Риманове многострукости доноси концепт дужине тангентних вектора. Одатле природно добијамо могућност да меримо дужину криве, што нам омогућава да дефинишемо растојање између тачака на повезаној Римановој многострукости која постаје метрички простор.

Нека је M глатка многострукост. ***Крива*** (или ***глатка параметарска крива***) на M је глатко пресликавање $\gamma\colon I \to M$, где је $I \subseteq \mathbb{R}$ неки отворен интервал. Како је I отворена подмногострукост реалне праве $\mathbb{R}^1$, то има идентичку карту која се састоји од једне координатне функције $u = \mathbb{1}_I$. ***Брзина*** криве $\gamma\colon I \to M$ дефинисана је као гурање координатног векторског поља, $\gamma' = T\gamma \circ (d/du)\colon I \to TM$. Прецизније, крива γ сваком $t \in I$ додељује ***вектор брзине*** $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ дефинисан са

$$\gamma'(t) = (T_t\gamma)\left(\frac{d}{du}\right)_t = \gamma_*\left(\frac{d}{du}\right)_t,$$

где је $(d/du)_t \in T_t I$ канонски базни вектор у t који пресликава $f \in \mathfrak{F}(I)$ у стари добри извод $f'(t)$ у смислу анализе.

Кажемо да је крива γ ***регуларна*** ако $\gamma'(t) \neq 0$ важи за све $t \in I$, што повлачи да је γ имерзија. Концепт регуларних кривих може се продужити на затворене ограничене интервале $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Пресликавање $\gamma\colon [a,b] \to M$ је ***регуларни сегмент криве*** ако се продужава на регуларну криву која је дефинисана на неком отвореном интервалу који садржи $[a,b]$. Општије, непрекидно пресликавање $\gamma\colon [a,b] \to M$ је ***допуштена крива*** (или ***део по део регуларни сегмент криве***) из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$ уколико постоји коначан низ $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ бројева $t_i \in \mathbb{R}$, који зовемо ***разбијање*** од $[a,b]$, тако да је рестрикција $\gamma\restriction_{[t_{i-1},t_i]}$ регуларни сегмент криве за свако $1 \leqslant i \leqslant k$.

Уобичајени концепт из анализе о дужини криве у еуклидском простору природно се уопштава за псеудо-Риманову многострукост (M,g). Постојање метрике g омогућава нам да меримо величину вектора брзине. ***Брзина*** криве $\gamma \in \mathfrak{F}(I)$ у некој тачки $t \in I$ је магнитуда њеног вектора брзине у t,

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{|g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))|}.$$

Како је растојање које објекат пређе једнако интегралу брзине над временским интервалом, дефинишемо ***дужину лука*** допуштене криве $\gamma\colon [a,b] \to M$ са

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Функција брзине је ограничена и непрекидна свуда на $[a,b]$ осим евентуално у коначно много тачака у којима γ није глатка, те је интеграбилна у Римановом (или Лебеговом[8]) смислу, тако да је $L(\gamma)$ добро дефинисан коначан ненегативан број.

Репараметризација криве $\gamma\colon I \to M$ је крива облика $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi\colon I' \to M$, где је $I' \subseteq \mathbb{R}$ неки интервал, а $\varphi\colon I' \to I$ дифеоморфизам. Како су интервали повезани, φ мора бити строго монотона (или растућа или опадајућа) на I'. Кажемо да је $\widetilde{\gamma}$ ***параметризација унапред*** ако је φ растућа ($\varphi' > 0$), док је ***параметризација уназад*** ако је опадајућа ($\varphi' < 0$).

Општије, ***репараметризација*** допуштене криве $\gamma\colon [a,b] \to M$ је допуштена крива облика $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, где је $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ хомеоморфизам за који постоји разбијање $c = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = d$ од $[c,d]$ такво да је рестрикција $\varphi\restriction_{[t_{i-1},t_i]}$ дифеоморфизам на његову слику за свако $1 \leqslant i \leqslant k$. Ако извод φ' не мења знак кажемо да је одговарајућа репараметризација ***монотона***.

Важно је приметити да је дужина лука допуштене криве инваријантна у односу на монотоне репараметризације, где за $\varphi' > 0$ имамо

$$L(\gamma \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\|\, dt = \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi(t_{i-1})}^{\varphi(t_i)} \|\gamma'(\varphi(t))\|\, d(\varphi(t)) = L(\gamma).$$

Иако се дужина лука на Римановој многострукости понаша слично као на еуклидском простору, у случају недефинитне метрике израз дужина може нас навести на странпутицу. На пример, изотропна крива има дужину нула. Да бисмо избегли потенцијалне проблеме где ненула изотропно $\gamma'(t)$ има брзину нула, фокусираћемо се на Риманову геометрију.

Нека је (M,g) Риманова многострукост. Тада допуштена крива $\gamma\colon [a,b] \to M$ има позитивну брзину $\|\gamma'(t)\| > 0$ за свако t осим тачака из одговарајућег разбијања од

[8]Henri Lebesgue (1875–1941), француски математичар

$[a,b]$. Посматрајмо функцију $s\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ коју називамо ***функција дужине лука*** од γ, а дефинишемо са

$$s(t) = L(\gamma\restriction_{[a,t]}) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\, du,$$

што је свуда непрекидно, а по основној теореми из анализе је глатко гдегод је то γ, са изводом $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Како $s'(t) > 0$ важи за све глатке тачке $t \in [a,b]$, функција s је строго растућа на $[a,b]$. Тада њен инверз $\varphi = s^{-1}\colon [0, L(\gamma)] \to [a,b]$ одређује репараметризацију унапред $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ од γ, где

$$\|\widetilde{\gamma}'(t)\| = \|\gamma'(s^{-1}(t)) \cdot (s^{-1})'(t)\| = \left\| \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{s'(s^{-1}(t))} \right\| = \left\| \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{\|\gamma'(s^{-1}(t))\|} \right\| = 1$$

важи гдегод је γ глатко. Таква репараметризација $\widetilde{\gamma}$ има ***јединичну брзину***, док њена функција дужине лука има једноставан облик $s(t) = t$. За допуштену криву јединичне брзине чији је интервал параметара облика $[0,b]$ за неко $b > 0$ кажемо да је ***параметризована дужином лука***.

Лема 4.17. *Свака допуштена крива на Римановој многострукости може се репараметризовати дужином лука јединственом репараметризацијом унапред.*

Уведимо концепт растојања између тачака на повезаној Римановој многострукости (M,g). За сваки пар тачака $p,q \in M$ постављамо ***путни простор*** $\Omega_{p,q}$ свих допуштених кривих из p у q. Овај простор није празан, што видимо у наредној леми.

Лема 4.18. *Сваке две тачке повезане многострукости могу се повезати допуштеном кривом.*

Доказ. Повезана многострукост M је путно повезана, те се сваке две тачке $p,q \in M$ могу повезати непрекидним путем $\gamma\colon [a,b] \to M$. Из компактности, постоји разбијање $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ од $[a,b]$ такво да је $\gamma\restriction_{[t_{i-1},t_i]}$ садржано у координатној околини која је дифеоморфна еуклидској кугли, за свако $1 \leqslant i \leqslant k$. Тада, свако $\gamma\restriction_{[t_{i-1},t_i]}$ можемо заменити праволинијским путем у координатама, што доноси допуштену криву из p у q. $\square$

Претходна лема нам дозвољава да добро дефинишемо ***Риманово растојање*** $d(p,q)$ између тачака $p,q \in M$ са

$$d(p,q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \in \Omega_{p,q}\}.$$

Пример 4.23. Инфимум дужине криве у дефиницији за $d(p,q)$ не мора да се реализује. Посматрајмо избушену раван $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ као Риманову подмногострукост од $\mathbb{R}^2$. Растојање између тачака $p(-1,0)$ и $q(1,0)$ је $d(p,q) = 2$, али ово растојање се не реализује ниједном допуштеном кривом, јер сваки такав пут у $\mathbb{R}^2$ пролази кроз $(0,0)$. $\triangle$

Основни резултат је теорема коју дајем без доказа (доказ није ни лаган ни кратак, а ко жели може да га научи из Књиге).

Теорема 4.20. *Повезана Риманова многострукост са Римановим растојањем је метрички простор чија је метричка топологија иста као топологија многострукости.*

4.8 Задаци

Задатак 4.1. Нека су $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ простори са унутрашњим производом исте коначне димензије. Ако је $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ пресликавање које чува координатни почетак и растојања ($f(0) = 0$ и $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$), онда је f линеарна изометрија.

Задатак 4.2. Нека је $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ дато са $f(x, y) = (\sqrt{1 + 2x^2 + 2y^2}, x+y, x-y)$. Израчунати f^*g за метрику Минковског $g = -dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2 \in \mathfrak{T}_2^0(\mathbb{R}^3)$, те показати да је то Риманова метрика у $\mathbb{R}^2$.