## Optimizacija transportne mreže

Problem optimizacije transportne mreže jedan je od osnovnih problema u teoriji grafova i kombinatornoj optimizaciji. Intenzivno je proučavan više od 40 godina, pa su za njega razvijeni mnogi algoritmi i strukture podataka. Problem ima mnogo varijanti i uopštenja.

Osnovna varijanta mreže može se formulisati na sledeći način. Neka je $G = (V, E)$ usmereni graf sa dva posebno izdvojena čvora: izvor $s$ (eng. source) sa ulaznim stepenom 0, i ponor $t$ (eng. sink) sa izlaznim stepenom 0. Svakoj grani $e \in E$ pridružena je pozitivna težina $c(e)$ koju nazivamo *kapacitet* grane $e$. Kapacitet grane je mera toka koji može biti propušten kroz granu. Za ovakav graf kažemo da je *transportna mreža* (eng. transportation network, flow network).

*Tok* (eng. flow) je funkcija $f$ definisana na skupu grana $E$ koja zadovoljava sledeće uslove:

**(1)** $0 \leq f(e) \leq c(e)$: tok kroz proizvoljnu granu ne može da premaši njen kapacitet;

**(2)** za sve čvorove $v \in V \setminus \{s, t\}$ je $\sum_u f(u, v) = \sum_w f(v, w)$: ukupan tok koji ulazi u proizvoljni čvor $v$ različit od $s$ i $t$ jednak je ukupnom toku koji izlazi iz njega („nestišljivost“, zakon očuvanja, odnosno konzervacije toka).

Ova dva uslova imaju za posledicu da je ukupan tok koji izlazi iz izvora $s$ jednak ukupnom toku koji ulazi u ponor $t$. U to se možemo uveriti na sledeći način.

Neka je $A$ proizvoljan podskup skupa $V$ takav da sadrži $s$, a ne sadrži $t$. Označimo sa $B = V \setminus A$ skup preostalih čvorova. *Presek* (eng. cut) određen skupom $A$ je skup grana $(v, u) \in E$ takvih da $v \in A$ i $u \in B$. Intuitivno, presek je skup grana koje razdvajaju $s$ od $t$: ako bismo ih uklonili ne bi bilo moguće propustiti nikakav tok kroz mrežu, pošto u mreži ne bi više postojao put od izvora do ponora. Indukcijom po broju čvorova u skupu $A$ se jednostavno pokazuje da ukupan tok kroz presek ne zavisi od preseka. Specijalno, za $A = \{s\}$ presek obuhvata grane koje izlaze iz $s$, a za $A = V \setminus \{t\}$ presek čine grane koje ulaze u $t$. Prema tome, ukupan tok koji izlazi iz $s$ jednak je ukupnom toku koji ulazi u $t$.

Problem koji nas zanima je *problem maksimizovanja toka* (eng. maximum flow problem). Jedan način da se opisani problem shvati kao realan fizički problem je da zamislimo da mrežu čine cevi za vodu. Svaka cev ima svoj kapacitet, a uslovi koje tok treba da zadovolji su prirodni. Cilj je „proterati“ kroz mrežu što veću količinu vode u jedinici vremena.

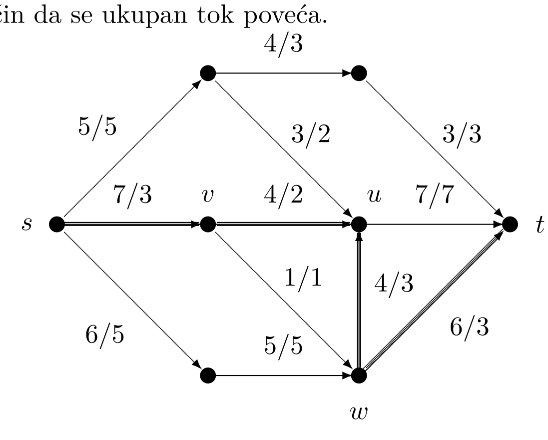
Problem maksimizacije toka ima različite primene. Problemi kao što su raspoređivanje posada aviona, segmentacija slike, utvrđivanje da li tim može da pobedi u svojoj diviziji u bejzbol ligi se mogu svesti na problem maksimizacije toka u mreži.

*Povećavajući put* (eng. augmenting path) u odnosu na zadati tok $f$ je usmereni put od čvora $s$ do čvora $t$, koji se sastoji od grana iz $G$, ne nužno u smeru u kom su date u grafu. Preciznije, svaka od grana $(v, u)$ povećavajućeg puta treba da zadovolji tačno jedan od sledeća dva uslova:

1. $(v, u)$ ima isti smer kao i u $G$, i $f(v, u) < c(v, u)$. U tom slučaju grana $(v, u)$ je *direktna grana*. Direktna grana ima kapacitet veći od toka, pa se kroz nju može povećati tok. Razlika $c(v, u) - f(v, u)$ zove se *slek* ili *rezidualni kapacitet* (eng. slack, residual capacity) te grane.

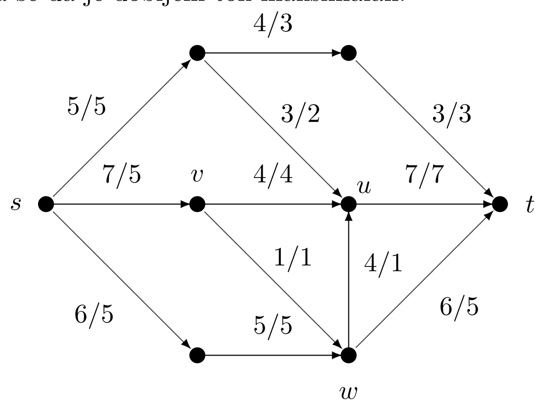
2. $(v, u)$ ima suprotan smer u $G$, i $f(v, u) > 0$. U ovom slučaju grana $(v, u)$ je *povratna grana*. Deo toka iz povratne grane može se „pozajmiti“.

Povećavajući put ima isti smisao za transportne mreže kao alternirajući put za bipartitno uparivanje: ako postoji povećavajući put u odnosu na tok $f$, tok $f$ nije maksimalan. Naime, tok $f$ se može povećati povećavanjem toka kroz povećavajući put na sledeći način. Ako su sve grane povećavajućeg puta direktne grane, onda se kroz njih može povećati tok, tako da sva ograničenja i dalje ostanu zadovoljena. Najveće moguće povećanje toka je u ovom slučaju tačno jednako minimalnom sleku među granama puta. Slučaj povratnih grana je nešto složeniji (videti primer na slici 1). Svaka grana označena je sa dva broja $a/b$, pri čemu je $a$ kapacitet, a $b$ trenutni tok. Jasno je da se ukupan tok ne može direktno povećati, jer ne postoji put od $s$ do $t$ koji se sastoji samo od direktnih grana. Ipak, postoji način da se ukupan tok poveća.




Slika 1: Primer mreže sa povećavajućim putem.

Put $s - v - u - w - t$ je povećavajući put. Dopunski tok 2 može se sprovesti od $s$ do $u$ (2 je minimalni slek na direktnim granama do $u$). Tok 2 može se *oduzeti* (pozajmiti) od toka $f(w, u)$ kroz granu $(w, u)$. Time se postiže zadovoljenje uslova (2), odnosno zakona očuvanja toka za čvor $u$, jer je $u$ imao povećanje toka za 2 iz povećavajućeg puta, a zatim smanjenje dotoka za 2 iz povratne grane. U čvoru $w$ je sada izlazni tok smanjen za 2, pa ga treba povećati kroz neku izlaznu granu. Sa „proterivanjem“ toka može se nastaviti na isti način od $w$, povećavanjem toka kroz direktne grane i smanjivanjem toka kroz povratne grane. U ovom slučaju postoji samo još jedna direktna grana $(w, t)$ koja dostiže $t$, i problem je rešen. Pošto samo direktne grane mogu da izlaze iz $s$, odnosno da ulaze u $t$, ukupan tok je povećan. Povećanje je jednako manjem od sledeća dva broja: minimalnog sleka direktnih grana, odnosno minimalnog toka povratnih grana na povećavajućem putu. Na slici 2 prikazana je ista mreža sa promenjenim tokom; ispostavlja se da je dobijeni tok maksimalan.




Slika 2: Rezultat povećavanja toka u mreži sa slike 1.

Iz navedenog sledi da ako u mreži postoji povećavajući put, onda tok nije maksimalan. Obrnuto je takođe tačno.

**Teorema 1** (Teorema o povećavajućem putu)**.** *Tok kroz transportnu mrežu je maksimalan ako i samo ako u odnosu na njega ne postoji povećavajući put.*

**Dokaz:** Dokaz u jednom smeru smo već videli — ako u mreži postoji povećavajući put, onda tok nije maksimalan.

Pretpostavimo sada da u odnosu na tok $f$ ne postoji ni jedan povećavajući put, i dokažimo da je tada $f$ maksimalni tok. Za proizvoljan presek (određen skupom $A$, $s \in A$, $t \in B \equiv V \setminus A$) definišemo kapacitet kao zbir kapaciteta njegovih grana koje vode iz nekog čvora skupa $A$ u neki čvor skupa $B$ (ne uključujemo grane koje vode od nekog čvora skupa $B$ do nekog čvora skupa $A$). Jasno je da ni jedan tok ne može biti veći od kapaciteta proizvoljnog preseka. Zaista, ukupan tok iz $s$ jednak je zbiru tokova kroz grane preseka od $A$ ka $B$, umanjenom za tok kroz grane preseka od $B$ ka $A$, pa je manji ili jednak od zbira kapaciteta grana koje vode od $A$ ka $B$, odnosno od kapaciteta preseka. Prema tome, ako pronađemo tok sa vrednošću jednakom kapacitetu nekog preseka, onda je taj tok maksimalan. Sa dokazom nastavljamo u tom pravcu: pokazaćemo da ako u odnosu na tok ne postoji povećavajući put, onda je ukupan tok jednak kapacitetu nekog preseka, pa dakle maksimalan.

Neka je $f$ tok u odnosu na koji ne postoji povećavajući put. Neka je $A \subset V$ skup čvorova $v$ takvih da u odnosu na tok $f$ postoji povećavajući put od $s$

do $v$ (preciznije, postoji put od $s$ do $v$ takav da na njemu za sve direktne grane $e$ važi $f(e) < c(e)$, a za sve povratne grane $e'$ važi $f(e') > 0$). Jasno je da $s \in A$ i $t \notin A$, jer po pretpostavci za $f$ ne postoji povećavajući put. Prema tome, $A$ definiše presek. Tvrdimo da za sve grane $(v, w)$ tog preseka važi $f(v, w) = c(v, w)$ ako je $v \in A$, $w \in B$, odnosno $f(v, w) = 0$ ako je $v \in B$, $w \in A$. Zaista, u protivnom bi direktna grana $(v, w)$ produžavala povećavajući put do čvora $w \notin A$, suprotno pretpostavci da takav put postoji samo do čvorova iz $A$. Slično, povratna grana $(v, w)$ produžavala bi povećavajući put do čvora $v \notin A$. Dakle, ukupan tok jednak je kapacitetu preseka koji je određen skupom $A$, pa je tok $f$ maksimalan. □

Dokazali smo sledeću važnu teoremu.

**Teorema 2** (Teorema o maksimalnom toku i minimalnom preseku)**.** *Maksimalni tok u mreži jednak je minimalnom kapacitetu preseka.*

Teorema o povećavajućem putu ima za posledicu i sledeću teoremu.

**Teorema 3** (Teorema o celobrojnom toku)**.** *Ako su kapaciteti svih grana u mreži celobrojni, onda postoji maksimalni tok sa celobrojnom vrednošću, takav da je vrednost toka pridružena svakoj grani celobrojna.*

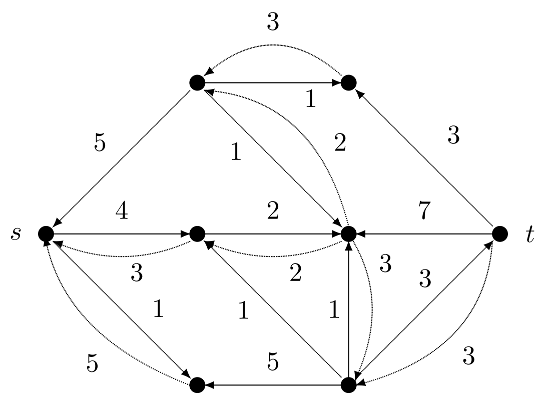
**Dokaz:** Tvrđenje je posledica teoreme o povećavajućem putu. Svaki algoritam koji koristi samo povećavajuće puteve dovodi do celobrojnog toka ako su svi kapaciteti grana celobrojni. Ovo je očigledno, jer se može krenuti od toka 0, a onda se ukupan tok posle svake upotrebe povećavajućeg puta povećava za celi broj. Do istog zaključka dolazi se i na drugi način: kapacitet svakog preseka je celobrojan, pa i minimalnog. Pritom su rezidualni kapaciteti svih grana u grafovima koji se konstruišu celobrojni jer su ili jednaki vrednosti toka propuštenog kroz granu (što je celobrojna vrednost) ili razlici kapaciteta i propuštenog toka (što je ponovo celobrojna vrednost). □

Teorema o povećavajućem putu neposredno se transformiše u algoritam. Polazi se od toka 0, traže se povećavajući putevi, i na osnovu njih povećava se tok, sve do trenutka kad povećavajući putevi više ne postoje. Traženje povećavajućih puteva može se izvesti na sledeći način.

Definišemo *rezidualni graf* (eng. residual network) u odnosu na mrežu $G = (V, E)$ i tok $f$, kao mrežu $R = (V, F)$ sa istim čvorovima, istim izvorom i ponorom, ali promenjenim skupom grana i njihovih težina. Svaku granu $e = (v, w)$ sa tokom $f(e)$ zamenjujemo sa najviše dve grane:

- $e' = (v, w)$ (ako je $f(e) < c(e)$; kapacitet $e'$ jednak je sleku grane $e$: $c(e') = c(e) - f(e)$),
- $e'' = (w, v)$ (ako je $f(e) > 0$; kapacitet $e''$ je $c(e'') = f(e)$).

Ako se na ovaj način dobiju dve paralelne grane, zamenjuju se jednom, sa kapacitetom jednakom zbiru kapaciteta paralelnih grana. Na slici 3 prikazan je rezidualni graf za mrežu sa slike 1, u odnosu na tok zadat na toj slici. Grane rezidualnog grafa odgovaraju mogućim granama povećavajućeg puta. Njihovi kapaciteti odgovaraju mogućem povećanju toka kroz te grane. Prema tome, povećavajući put je običan usmereni put od $s$ do $t$ u rezidualnom grafu. Konstrukcija rezidualnog grafa zahteva $O(|E|)$ koraka, jer se svaka grana proverava tačno jednom.



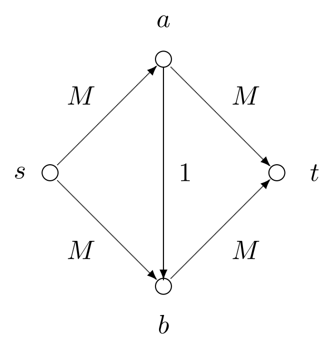

Slika 3: Rezidualni graf mreže sa slike 1 u odnosu na tok definisan na toj slici.

Ovako opisan postupak odgovara tzv. *Ford-Fulkersonovom algoritmu*, objavljenom 1956. godine. Često se umesto termina algoritam koristi termin Ford-Fulkersonov metod, pošto način pronalaska povećavajućih puteva u rezidualnom grafu nije u potpunosti preciziran. Neki mogući načini su korišćenjem pretrage u dubinu ili u širinu, pri čemu obe rade u vremenu $O(|E|)$.

Izbor povećavajućeg puta na proizvoljan način može se pokazati vrlo neefikasnim. Vreme izvršenja takvog algoritma u najgorem slučaju može da čak i ne zavisi od veličine grafa.

**Primer 1.** *Posmatrajmo transportnu mrežu prikazanu na slici 4. Maksimalni tok je očigledno* $2M$*. Međutim, mogli bismo da krenemo od povećavajućeg puta* $s-a-b-t$ *kroz koji se tok može povećati samo za* 1*. Zatim bismo mogli da izaberemo povećavajući put* $s-b-a-t$ *koji opet povećava tok samo za* 1*. Proces može da se ponovi ukupno* $2M$ *puta, gde* $M$ *može biti vrlo veliko, bez obzira što graf ima samo četiri čvora i pet grana.*

Ukoliko su kapaciteti grana u mreži celobrojni, onda se u svakom koraku Ford-Fulkersonovog algoritma vrši povećanje ukupnog toka za barem 1. S obzirom na to da je minimalni kapacitet preseka u mreži celobrojan i konačan, Ford-Fulkersonov algoritam se zaustavlja nakon konačno mnogo iteracija. Pošto se svaki povećavajući put može pronaći u vremenu $O(|E|)$, vreme izvršavanja Ford-Fulkersonovog algoritma je u najgorem slučaju $O(|E| \cdot f)$, gde je sa $f$ označen maksimalni tok kroz mrežu.




Slika 4: Primer mreže na kojoj traženje povećavajućih puteva može biti neograničeno neefikasno.

### Edmonds-Karpov algoritam

Gore navedeni scenario se može izbeći. Naime, Dinić je 1970. godine, a zatim su nezavisno i Edmonds i Karp 1972. godine pokazali da ako se među mogućim povećavajućim putevima u rezidualnom grafu uvek bira onaj sa najmanjim brojem grana, onda je broj povećavanja najviše $(|V| \cdot |E|)$, te je ukupna složenost algoritma $O(|V| \cdot |E|^2)$ i njegova složenost više ne zavisi od veličine maksimalnog toka u mreži.

Najkraći povećavajući put u rezidualnom grafu se u Edmonds-Karpovog algoritmu može naći pretragom grafa u širinu.

**Lema 1** (Monotonost najkraćih rastojanja od $s$)**.** Neka je $d_f(v)$ najkraće rastojanje (u kontekstu broja grana) od izvora $s$ do čvora $v$ u rezidualnom grafu $G_f$ u odnosu na tok $f$. Tokom izvršavanja Edmonds-Karpovog algoritma, vrednost $d_f(v)$ je neopadajuća.

**Dokaz:** Pretpostavimo da je razmatranjem povećavajućeg puta u odnosu na tok $f$, on proširen u tok $f'$. Pokazaćemo indukcijom po $d_{f'}(v)$ da važi $d_{f'}(v) \geq d_f$.

Bazni slučaj $d_{f'}(v) = 0$ implicira da je $v = s$, pa trivijalno važi $0 = d_{f'}(s) \geq d_f(s) = 0$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve čvorove $u$ takve da je $d_{f'}(u) < d_{f'}(v)$ i pokažimo da će onda tvrđenje važiti i za čvor v.

Razmotrimo najkraći put od čvora $s$ do čvora $v$ kroz grane grafa $G_{f'}$ i neka je pretposlednji čvor na tom putu čvor $u$. Važi $d_{f'}(v) = d_{f'}(u) + 1$ jer odgovarajući deo puta od $s$ do $u$ mora takođe biti najkraći takav put. Za čvor po IH važi $d_{f'}(u) \geq d_u$. Grana $(u, v)$ svakako pripada skupu grana $E_{f'}$ grafa $G_{f'}$. Dokazaćemo da važi $d_{f'}(v) \geq d_f$ i u slučaju kada je $(u, v) \in E_f$ i kada $(u, v) \notin E_f$.

Neka je $(u,v) \in E_f$. Onda važi

$$d_f(v) \leq d_f(u) + 1 \leq d_{f'}(u) + 1 = d_{f'}(v)$$

Prva od ovih nejednakosti važi na osnovu nejednakosti trougla, druga na osnovu IH, a treća na osnovu što je razmatrani put najkraći u grafu $G_{f'}$.

Neka je $(u,v) \notin E_f$. Jedini način da je $(u,v) \in E_{f'}$ jeste ako je povećavajući put $p$ kojim je dobijen tok $f'$ od toka $f$ uključio granu $(v,u)$. Šta više, $p$ je najkraći put od $s$ do $u$ u grafu $G_f$, na kome je pretposlednji čvor $v$. Odatle sledi:

$$d_f(v) = d_f(u) - 1 \leq d_{f'}(u) - 1 = d_{f'}(v) - 2 < d_{f'}(v)$$

□

**Lema 2** (Broj povećavanja toka)**.** Ukupan broj povećavanja toka u Edmonds-Karpovom algoritmu je $O(|V||E|)$.

**Dokaz:** Neka je $c_f(p)$ minimum kapaciteta grana povećavajućeg puta $p$ rezidualnog grafa u odnosu na tok $f$.

Neka je $p$ povećavajući put i neka je $c_f(p)$ jednak kapacitetu grane $(u,v)$ puta $p$. Tada kažemo da je grana $(u,v)$ kritična i ona se neće naći u rezidualnom grafu nakon povećavanja toka. Intuitivno, pri svakom povećanju toka se bar jedna od $E$ grana grafa zasićuje.

Prvi put kada grana $(u,v)$ postane kritična, imaćemo $d_f(v) = d_f(u) + 1$ jer je $p$ put kroz grane BFS drveta. Nakon povećanja, moramo sačekati dok se grana $(v,u)$ ne nađe u povećavajućem putu, pa grana $(u,v)$ ponovo ne postane kritična. Označimo sa $d_{f'}$ rastojanje u rezidualnom grafu kada je $(v,u)$ na povećavajućem putu. Tada važi:

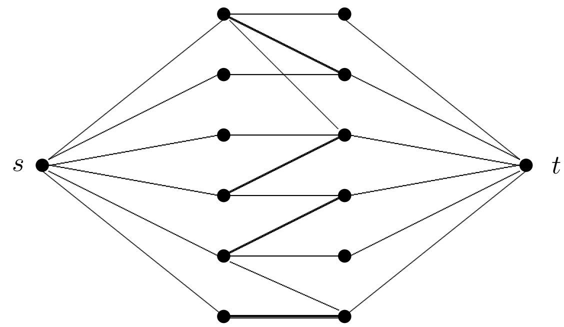
$$d_{f'}(u) = d_{f'}(v) + 1 \leq d_f(v) + 1 = d_f(u) + 2$$

Stoga se između svaka dva pojavljivanja grane $(u,v)$ kao kritične, $d_f(u)$ uveća bar za 2. I s obzirom na to da $d(u)$ počinje kao nenegativno i maksimalna moguća vrednost koju može imati je $|V|-1$, svaka grana može biti kritična $O(|V|)$ puta. S obzirom na to da graf sadrži $O(|E|)$ grana, ukupan broj povećavanja toka je $O(|V||E|)$. □

S obzirom na to da je svaka iteracija Edmonds-Karpovog algoritma složenosti $O(|E|)$, a da je ukupan broj iteracija $O(|V||E|)$, ukupna složenost Edmonds-Karpovog algoritma je $O(|V||E|^2)$.

### Svođenje problema bipartitnog uparivanja na optimizaciju transportne mreže

Zadatom bipartitnom grafu $G = (V, E, U)$ u kome treba pronaći optimalno uparivanje dodajemo dva nova čvora $s$ i $t$, povezujemo $s$ granama sa svim čvorovima iz $V$, sve čvorove iz $U$ povezujemo sa $t$, a grane uparivanja usmeravamo sleva udesno. Označimo dobijeni graf sa $G'$ (videti sliku 5, pretpostavlja se da su sve grane usmerene sleva udesno). Pošto svim granama dodelimo kapacitet 1, dobijamo regularan problem optimizacije transportne mreže na grafu $G'$.




Slika 5: Svođenje bipartitnog uparivanja na optimizaciju transportne mreže (sve grane usmerene su sleva udesno).

Neka je $M$ neko uparivanje u $G$. Uparivanju $M$ može se na prirodan način pridružiti tok u $G'$ tako što dodeljujemo tok 1 svim granama iz $M$ i svim granama koje $s$ ili $t$ povezuju sa uparenim čvorovima, dok svim ostalim granama dodeljujemo tok 0. Ukupan tok jednak je tada broju grana u uparivanju $M$. Može se pokazati da je *$M$ optimalno uparivanje ako i samo ako je odgovarajući celobrojni tok u $G'$ maksimalan.*

Dokažimo najpre da ako je dati celobrojni tok u $G'$ maksimalan, onda je odgovarajuće uparivanje optimalno. Primetimo najpre da dati celobrojni tok mora da odgovara nekom uparivanju jer je svaki čvor u $V$ povezan samo jednom granom (sa kapacitetom 1) sa $s$; zbog toga, ukupan tok kroz svaki čvor iz $V$ može da bude najviše 1. Isto važi i za čvorove iz skupa $U$. Ovo uparivanje mora biti optimalno, jer ako bi se moglo povećati, onda bi postojao veći ukupni tok.

Dokažimo drugi smer ovog tvrđenja: ako je $M$ optimalno uparivanje, onda je odgovarajući celobrojni tok u $G'$ maksimalan. Jasno je da svaki alternirajući put u $G$ odgovara povećavajućem putu u $G'$, i obrnuto. Posledica teoreme o povećavajućem putu je teorema o alternirajućem putu iz prethodnog odeljka. Ako je $M$ optimalno uparivanje, onda za njega ne postoji alternirajući put, pa u $G'$ ne postoji povećavajući put, a odgovarajući tok je maksimalan. S druge strane, postoji maksimalni celobrojni tok, i on mora da odgovara uparivanju.