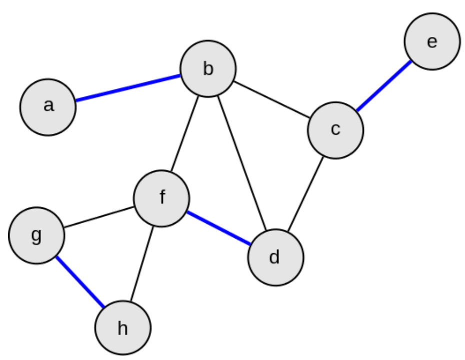
Grafovski algoritmi

U ovom poglavlju razmotrićemo nekoliko novih algoritama nad grafovima. Grafovski algoritmi o kojima će biti reči bave se problemom konstrukcije optimalnog uparivanja u grafu i problemom konstrukcije optimalnog toka u transportnim mrežama.

Uparivanje

Za zadati neusmereni graf $G = (V, E)$ *uparivanje* (eng. matching) je skup disjunktnih grana (grana bez zajedničkih čvorova). Ovaj naziv potiče od činjenice da se grane mogu shvatiti kao parovi čvorova. Bitno je da svaki čvor pripada najviše jednoj grani[1]. Za čvor koji je kraj neke grane uparivanja kaže se da je *uparen*, dok se za čvor koji nije susedan ni jednoj grani iz uparivanja kaže da je *neuparen*, odnosno da ne pripada uparivanju.

Savršeno uparivanje (eng. perfect matching) je uparivanje u kome su svi čvorovi upareni (slika 1). Broj grana u savršenom uparivanju jednak je polovini broja čvorova u grafu.

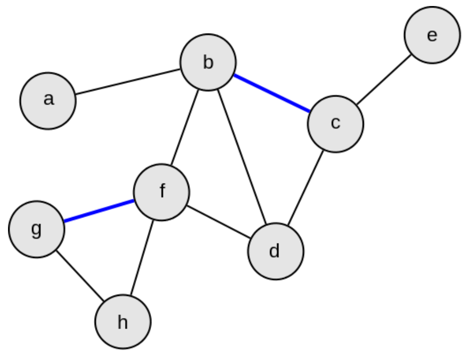


Slika 1: Primer savršenog uparivanja u grafu. Plavom bojom istaknute su grane uparivanja: (a, b), (c, e), (f, d), (g, h).

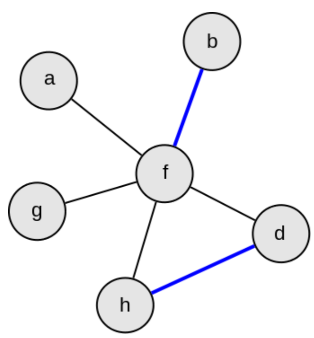
Maksimalno uparivanje (eng. maximal matching) je pak uparivanje koje se ne može proširiti dodavanjem nove grane (slika 2). Drugim rečima, maksimalno uparivanje nije podskup nijednog drugog uparivanja u grafu.

Optimalno uparivanje (eng. maximum matching) je uparivanje sa maksimalnim brojem grana u datom grafu (slika 3). Optimalno uparivanje ne mora biti jedinstveno. Svako optimalno uparivanje je i maksimalno, dok obrnuto ne mora da važi.

[1]Za ovako definisano uparivanje se kaže i da je monogamno. Nekada se razmatraju i nemonogamna uparivanja.



Slika 2: Primer maksimalnog uparivanja u grafu. Plavom bojom istaknute su grane uparivanja: (b, c) i (f, g).



Slika 3: Primer optimalnog uparivanja u grafu. Plavom bojom istaknute su grane uparivanja: (b, f) i (h, d).

Problemi koji se svode na uparivanje pojavljuju se u mnogim situacijama. Mogu se uparivati kandidati za posao sa radnim mestima, zadaci sa radnicima na osnovu njihovih veština ili raspoloživosti, grupe studenata sa učionicama, itd.

Proble uparivanja se može uopštiti na težinske grafove, kada je potrebno odrediti optimalno uparivanje minimalne ukupne težine. Ovaj problem ima primenu u medicini prilikom doniranja organa za uparivanje organa i pacijenata tako da se maksimizuje kompatibilnost i optimizuju ishodi.

Problem nemonogamnog uparivanja se javlja prilikom pridruživanja studenata školama ili univerzitetima prema njihovim afinitetima i uspehu, održavajući pri tom pravičnost.

Problem pronalaženja optimalnog uparivanja u proizvoljnom grafu nije lak. Mi ćemo se ograničiti na razmatranje dva specijalna slučaja. Prvi od njih tiče se uparivanja u vrlo gustim grafovima. Njegov značaj nije prevelik, međutim, rešenje tog problema ilustruje važan pristup, koji se može uopštiti da bi se došlo do rešenja problema pronalaženja uparivanja u bipartitnim grafovima.

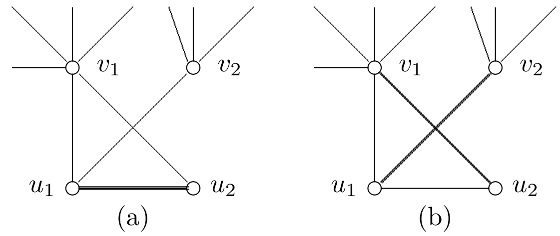
Savršeno uparivanje u vrlo gustim grafovima

Neka je $G = (V, E)$ neusmereni graf kod koga je $|V| = 2n$ i stepen svakog čvora je bar n. Prikazaćemo algoritam za nalaženje savršenog uparivanja u ovakvom grafu. Posledica ovog algoritma je da u grafu koji zadovoljava navedene uslove, uvek postoji savršeno uparivanje.

Za konstrukciju ćemo koristiti indukciju po veličini m uparivanja. Uparivanje veličine $m = 1$ dobija se lako, odabirom proizvoljne grane grafa. Pokazaćemo da se proizvoljno uparivanje koje nije savršeno može proširiti ili dodavanjem jedne nove grane ili zamenom jedne grane uparivanja dvema novim granama. U oba slučaja veličina uparivanja se povećava za jedan.

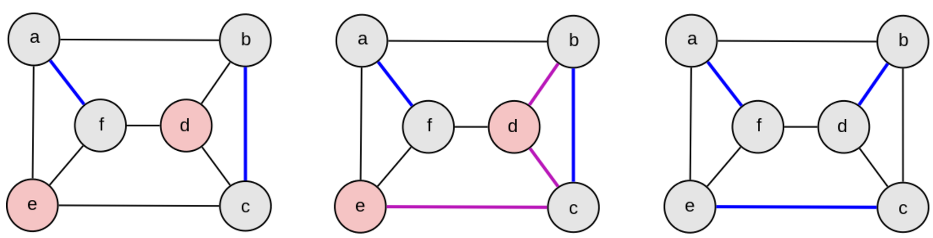
Posmatrajmo uparivanje M sa m grana u grafu G, pri čemu je $m < n$. Najpre proveravamo sve grane van uparivanja M kako bismo ustanovili da li se neka od njih može dodati u M. Ako pronađemo takvu granu, problem je rešen — nađeno je veće uparivanje. U protivnom, M je maksimalno uparivanje. Ako M nije savršeno uparivanje, postoje bar dva neuparena čvora v_1 i v_2. Iz ta dva čvora po pretpostavci izlazi ukupno najmanje $2n$ grana. Primetimo da sve te grane vode ka uparenim čvorovima, jer bi se u protivnom u uparivanje mogla dodati nova grana, suprotno pretpostavci da je ono maksimalno. Pošto u uparivanju M ima manje od n grana, a iz v_1 i v_2 izlazi bar $2n$ grana, u uparivanju M postoji grana (u_1, u_2) koja je susedna sa bar tri grane koje izlaze iz čvorova v_1 i v_2. Pretpostavimo, bez smanjenja opštosti, da su to grane (u_1, v_1), (u_1, v_2) i (u_2, v_1), videti sliku 4(a). Može se uočiti da se uklanjanjem grane (u_1, u_2) iz M, i dodavanjem dveju novih grana (u_1, v_2) i (u_2, v_1) dobija veće uparivanje, slika 4(b).

Primer 1. *Ilustrujmo postupak izvršavanja algoritma na primeru gustog grafa ilustrovanog na slici 5. Graf sadrži* 6 *čvorova i stepen svakog čvora je* 3. *Do-*



Slika 4: Proširivanje uparivanja u gustom grafu. Podebljanim linijama istaknute su grane uparivanja

davanjem grane po grane dolazimo do jednog maksimalnog uparivanja $M = \{(a,f),(b,c)\}$. *Čvorovi* d *i* e *ostaju neupareni. Primetimo da ka grani* (b,c) *uparivanja* M *vode tri grane iz neuparenih čvorova:* $(d,b),(d,c)$ *i* (e,c). *Zamenom grane* (b,c) *uparivanja* M *granama* (b,d) *i* (e,c) *van uparivanja* M *dobijamo novo veće uparivanje:* $M' = \{(a,f),(b,d),(e,c)\}$. *Ovo je naime i savršeno uparivanje.*



Slika 5: Postupak dolaska do savršenog uparivanja u gustom grafu.

U prikazanom algoritmu se u svakom koraku veličina tekućeg uparivanja povećava za 1 i pritom se razmatraju četiri čvora i nekoliko grana koje ih povezuju. U ovoj situaciji je to bilo dovoljno; međutim, u opštem slučaju je nalaženje dobrog uparivanja teži problem. Uključivanje jedne grane u uparivanje utiče na izbor drugih grana čak i u udaljenim delovima grafa. Pokazaćemo sada kako se ovaj pristup može prilagoditi tako se njim određuje optimalno uparivanje u bipartitnom grafu.

Bipartitno uparivanje

Bipartitni graf (eng. bipartite graph) je graf čiji se skup čvorova može podeliti na dva disjunktna podskupa tako da u grafu postoje samo grane između čvorova iz različitih podskupova.

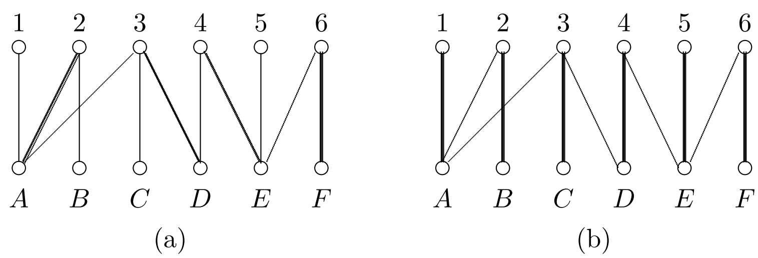
Neka je $G = (V, U, E)$ bipartitni graf u kome su V i U disjunktni skupovi čvorova, a E je skup grana koje povezuju neke čvorove iz V sa nekim čvorovima iz U.

Problem. Pronaći optimalno uparivanje u datom bipartitnom grafu $G = (V, U, E)$.

Jedan od načina da se formuliše problem je sledeći: V je skup devojaka, U je skup mladića, a E je skup „potencijalnih" parova. Cilj je pod ovim uslovima oformiti što veći broj parova mladića i devojaka.

Direktan pristup je formirati parove u skladu sa nekom strategijom, do trenutka kad dalja uparivanja više nisu moguća — u nadi da će nam strategija obezbediti optimalno ili rešenje blisko optimalnom. Može se, na primer, pokušati sa pohlepnim pristupom, uparujući najpre čvorove malog stepena, u nadi da će preostali čvorovi i u kasnijim fazama imati neuparene partnere. Drugim rečima, najpre uparujemo stidljive osobe, one sa manje poznanstava, a o ostalima brinemo kasnije.

Umesto da se bavimo analizama ovakvih strategija (što nije jednostavan problem), pokušaćemo sa pristupom korišćenim kod prethodnog problema. Pretpostavimo da se polazi od maksimalnog uparivanja, koje ne mora biti optimalno. Možemo li ga nekako popraviti? Pogledajmo primer na slici 6(a), na kome je uparivanje prikazano podebljanim granama. Jasno je da se uparivanje može povećati zamenom grane $2A$ sa dve grane $1A$ i $2B$. Ovo je transformacija slična onoj koju smo primenili u prethodnom problemu. Međutim, ne moramo se ograničiti zamenama jedne grane dvema granama. Ako pronađemo sličnu situaciju u kojoj se nekih k grana mogu zameniti sa $k+1$ grana, dobijamo algoritam većih mogućnosti. Na primer, uparivanje se može dalje povećati zamenom grana $3D$ i $4E$ sa tri grane $3C$, $4D$ i $5E$, slika 6(b).



Slika 6: Proširivanje bipartitnog uparivanja.

Razmotrimo detaljnije ove transformacije. Cilj je povećati broj uparenih čvorova. Polazimo od neuparenog čvora v i pokušavamo da ga uparimo. Pošto polazimo od maksimalnog uparivanja, svi susedi čvora v su već upareni; zbog toga smo prinuđeni da iz uparivanja uklonimo neku od grana koje „pokrivaju" susede čvora v. Pretpostavimo da smo izabrali čvor u, susedan sa v, koji je prethodno bio uparen sa čvorom w, na primer. Raskidamo uparivanje u sa w, i uparujemo v sa u. Sada preostaje da pronađemo para za čvor w. Ako je w povezan granom sa nekim neuparenim čvorom, onda smo postigli cilj; takav je bio prvi od gornjih slučajeva. Ako to nije slučaj, onda nastavljamo dalje sa raskidanjem parova i formiranjem novih parova. Da bismo na osnovu ove ideje konstruisali algoritam, potrebno je da uradimo dve stvari:

- da obezbedimo da se procedura uvek završava, i

- da pokažemo da ako je poboljšanje moguće, onda će ga procedura sigurno pronaći.

Najpre ćemo formalizovati navedenu ideju.

Alternirajući ili *povećavajući put* (eng. alternating path, augmenting path) P za dato uparivanje M je put od neuparenog čvora $v \in V$ do neuparenog čvora $u \in U$, pri čemu su grane puta P naizmenično u $E \setminus M$, odnosno M. Drugim rečima, prva grana (v, w) puta P ne pripada M (jer je v neuparen), druga grana (w, x) pripada M, i tako dalje do poslednje grane (z, u) puta P koja ne pripada M. Zapazimo da su upravo alternirajući putevi u gornjim primerima omogućavali povećavanje uparivanja. Specijalno, ako je put dužine jedan, onda je to grana koja povezuje dva neuparena čvora; takve grane ne postoje u odnosu na maksimalno uparivanje. Broj grana na putu P mora biti neparan, jer P polazi iz V i završava se u U. Pored toga, među granama puta P grana u $E \setminus M$ ima za jednu više od grana u M. Prema tome, ako iz uparivanja izbacimo sve grane P koje su u M, a uključimo sve grane P koje su u $E \setminus M$, dobićemo novo uparivanje sa jednom granom više. Na primer, prvi alternirajući put korišćen za povećanje uparivanja na slici 6(a)) je put $(1A, A2, 2B)$, i on omogućuje zamenu grane $A2$ granama $1A$ i $2B$; drugi alternirajući put $(C3, 3D, D4, 4E, E5)$ omogućuje zamenu grana $3D$ i $4E$ granama $C3$, $D4$ i $E5$.

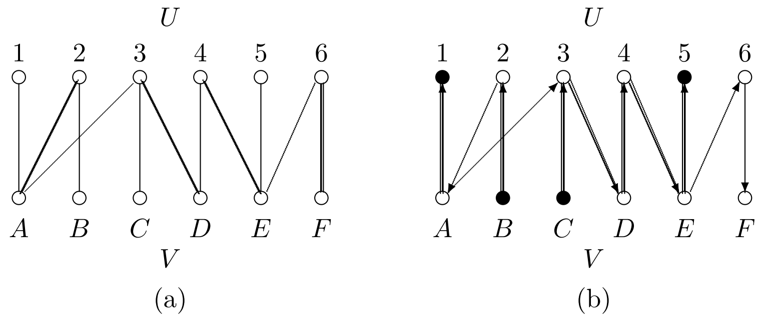
Jasno je da ako za dato uparivanje M postoji alternirajući put, onda M nije optimalno uparivanje. Ispostavlja se da je tačno i obrnuto tvrđenje.

Teorema 1 (Teorema o alternirajućem putu)**.** *Uparivanje je optimalno ako i samo ako u odnosu na njega ne postoji alternirajući put.*

Dokaz će biti dat kao posledica opštijeg tvrđenja u poglavlju o transportnim mrežama.

Teorema o alternirajućem putu direktno sugeriše algoritam, jer proizvoljno uparivanje koje nije optimalno ima alternirajući put, a alternirajući put daje povećano uparivanje. Započinjemo sa pohlepnim algoritmom, dodajući grane u uparivanje sve dok je to moguće. Onda prelazimo na traženje alternirajućih puteva i povećavanje uparivanja, sve do trenutka kad više nema alternirajućih puteva u odnosu na poslednje uparivanje. Dobijeno uparivanje je tada optimalno. Pošto alternirajući put povećava uparivanje za jednu granu, a u uparivanju ima najviše $n/2$ grana (gde je n broj čvorova), broj iteracija je najviše $n/2$.

Preostaje još jedan problem — kako pronalaziti alternirajuće puteve? Problem se može rešiti na sledeći način. Transformišemo neusmereni graf G u usmereni graf G' usmeravajući grane iz M od U ka V, a grane iz $E \setminus M$ od V ka U. Slika 7(a) prikazuje polazno maksimalno uparivanje za graf sa slike 6(a), a slika 7(b) prikazuje odgovarajući usmereni graf G'. Alternirajući put u G tada odgovara usmerenom putu od neuparenog čvora u V do neuparenog čvora u U u grafu G'. Takav usmereni put može se pronaći bilo kojim postupkom obilaska grafa, npr. pomoću algoritma DFS. Složenost obilaska (pretrage) je $O(|V| + |E|)$, pa je složenost algoritma $O(|V| \cdot (|V| + |E|))$.



Slika 7: Nalaženje alternirajućih puteva

Hopkroft-Karpov algoritam Primetimo da prethodni algoritam pronalazi jedan po jedan alternirajući put. *Hopkroft-Karpov algoritam* popravlja vreme izvršavanja algoritma tako što pokušava da u jednoj pretrazi pronađe veći broj alternirajućih puteva. Potrebno je, međutim, da budemo sigurni da su ovi putevi nezavisni, odnosno da su njihovi skupovi čvorova međusobno disjunktni. Ako su putevi disjunktni, onda utiču na uparivanje različitih čvorova, pa se mogu istovremeno iskoristiti.

Neka je G graf, a M neko maksimalno uparivanje u grafu. *Maksimalni skup alternirajućih puteva minimalne dužine* u odnosu na M je skup $P_1, P_2, \ldots, P_k$ alternirajućih puteva za koje važi:

1. putevi $P_1, P_2, \ldots, P_k$ imaju disjunktne skupove čvorova,
2. svi putevi $P_i, 1 \leq i \leq k$ su iste dužine l,
3. l je minimalna dužina alternirajućeg puta u odnosu na uparivanje M,
4. svaki alternirajući put dužine l ima bar jedan zajednički čvor sa $P_1 \cup \ldots \cup P_k$.

Drugim rečima, to je maksimalna kolekcija[2] međusobno disjunktnih alternirajućih puteva minimalne dužine.

Ako je M uparivanje u grafu i $\{P_1, \ldots, P_k\}$ je skup međusobno disjunktnih alternirajućih puteva u odnosu na M, onda je $M \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_k$[3] uparivanje koje ima $|M| + k$ grana.

Teorema 2 (Teorema o broju alternirajućih puteva)**.** *Neka je M proizvoljno uparivanje u grafu G, a M^* optimalno uparivanje u G i neka je $k = |M^*| - |M|$. Skup grana $M \oplus M^*$ sadrži barem k međusobno disjunktnih alternirajućih puteva u odnosu na uparivanje M. Dodatno, G ima bar jedan alternirajući put dužine manje od n/k, gde n označava broj čvorova grafa G.*

Dokaz: Pošto su i M i M^* uparivanja, u skupu grana $M \oplus M^*$ maksimalni stepen nekog čvora je 2 i svaki čvor stepena 2 pripada tačno jednoj grani

[2]Pod maksimalnom kolekcijom se podrazumeva da se ne može dalje proširiti, a ne nužno da ne postoji neka kolekcija takvih puteva veće kardinalnosti.
[3]Simbol $\oplus$ označava ekskluzivnu disjunkciju.

uparivanja M. Stoga je svaka povezana komponenta skupa $M \oplus M^*$ alternirajuća komponenta u odnosu na M – grane naizmenično pripadaju i ne pripadaju M, s tim da krajnji čvorovi puta ne moraju biti neupareni. Svaka alternirajuća komponenta koja nije alternirajući put ima bar onoliko grana iz M koliko iz M^*, dok svaki alternirajući put ima tačno jednu granu manje u M nego u M^*. Stoga, bar k povezanih komponenti skupa $M \oplus M^*$ moraju biti alternirajući putevi u odnosu na M i oni svi imaju disjunktne skupove čvorova. S obzirom na to da G ima n čvorova sledi da G ne može imati k disjunktnih podgrafova od kojih svaki ima više od n/k čvorova, već je bar jedan dužine manje od n/k. $\square$

Na osnovu ove teoreme moguće je formulisati novi, efikasniji algoritam za određivanje optimalnog uparivanja u grafu: on bi u odnosu na tekuće uparivanje M tražio maksimalni skup disjunktnih alternirajućih puteva minimalne dužine i ažurirao uparivanje na sledeći način: $M = M \oplus (P_1 \cup \ldots \cup P_k)$. Ovaj postupak bismo ponavljali sve dok postoje alternirajući putevi u odnosu na uparivanje M.

Postavlja se pitanje da li smo na ovaj način popravili asimptotsku složenosti algoritma. Naredne dve teoreme nam to tvrde.

Teorema 3 (Teorema o povećanju dužine alternirajućih puteva)**.** *Minimalna dužina alternirajućeg puta u odnosu na uparivanje M se nakon svakog koraka ažuriranja strogo povećava.*

Dokaz: Označimo sa l dužinu najkraćeg alternirajućeg puta u odnosu na uparivanje M, a sa $P_1, P_2, \ldots, P_k$ maksimalni skup disjunktnih alternirajućih puteva najkraće dužine u odnosu na uparivanje M. Neka je $M' = M \oplus (P_1 \cup \ldots \cup P_k)$ i neka je P najkraći alternirajući put u odnosu na uparivanje M'. Pokažimo da je $|P| > l$.

Razlikujemo dva slučaja:

- put P je disjunktan u odnosu na puteve $P_1, \ldots, P_k$. Pošto je skup $\{P_1, \ldots, P_k\}$ maksimalan, nužno važi $|P| > l$.

- put P nije disjunktan u odnosu na puteve $P_1, \ldots, P_k$. S obzirom na to da je $M' = M \oplus (P_1 \cup \ldots \cup P_k)$, važi $M \oplus M' = P_1 \cup \ldots \cup P_k$. Razmotrimo povezanu komponentu podgrafa H grafa G sa skupom grana $M \oplus (M' \oplus P)$. Pošto je $|M' \oplus P| - |M| = k + 1$, u grafu H postoji bar $k + 1$ komponenti koje sadrže veći broj grana iz $M' \oplus P$ nego iz M. Svaka od ovih komponenti odgovara alternirajućem putu u odnosu na M. Stoga H sadrži bar $k + 1$ disjunktnih alternirajućih puteva u odnosu na M, od kojih je svaki dužine bar l. Zaključujemo da je $|M \oplus M' \oplus P| = |(P_1 \cup \ldots \cup P_k) \oplus P| \geq (k+1)l$. Pošto su $P_1, \ldots, P_k$ disjunktni, oni u zbiru imaju kl različitih grana, odakle sledi da P mora da doprinese sa najmanje l grana da bi važila nejednakost $|(P_1 \cup \ldots \cup P_k) \oplus P| \geq (k + 1)l$. S obzirom na to da P nije disjunktan sa putevima $P_1, \ldots, P_k$ on mora da deli granu uparivanja sa nekim putem P_i u odnosu na uparivanje M'. Odavde sledi da je $|P| > l$.

$\square$

Teorema 4. *Hopkroft-Karpov algoritam se zaustavlja nakon manje od* $2\sqrt{n}$ *iteracija petlje.*

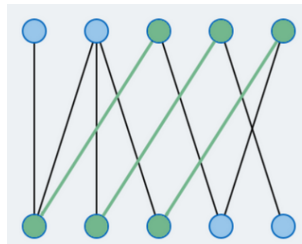
Dokaz: Na osnovu Teoreme o povećanju dužine alternirajućih puteva sledi da će nakon prvih $\sqrt{n}$ iteracija u kojima se određuje maksimalni skup alternirajućih puteva minimalne dužine, minimalna dužina alternirajućeg puta biti veća od $\sqrt{n}$.

Iz Teoreme o broju alternirajućih puteva za uparivanje M dobijeno nakon $\sqrt{n}$ iteracija važi $|M^*| - |M| < \sqrt{n}$, gde je sa M^* označeno optimalno uparivanje u grafu. Dokažimo ovo tvrđenje. Pretpostavimo suprotno: neka je $k = |M^*| - |M| \geq \sqrt{n}$. Tada na osnovu ove teoreme postoji bar jedan alternirajući put dužine manje od $n/k \leq n/\sqrt{n} = \sqrt{n}$, a to je suprotno pretpostavci. Dakle, važi $|M^*| - |M| < \sqrt{n}$. S obzirom na to da svaka naredna iteracija strogo povećava $|M|$, preostalo je još manje od $\sqrt{n}$ iteracija dok ne stignemo do optimalnog uparivanja. Stoga je ukupan broj iteracija petlje manji od $2\sqrt{n}$. $\square$

Maksimalni skup alternirajućih puteva minimalne dužine u odnosu na uparivanje M dobijamo kombinacijom BFS i DFS obilaska grafa G'. Graf G' najpre obilazimo u širinu počev od skupa neuparenih čvorova u V, sloj po sloj, do sloja u kome je pronađen bar jedan neuparen čvor iz U. Zatim iz grafa indukovanog pretragom u širinu izdvajamo maksimalni skup disjunktnih puteva u G', kojima odgovaraju alternirajući putevi u G. To se izvodi pronalaženjem prvog puta, uklanjanjem njegovih čvorova, pronalaženjem narednog puta, uklanjanjem njegovih čvorova, itd. Svaki novi disjunktni put povećava uparivanje za jednu granu. Na kraju povećavamo polazno uparivanje korišćenjem pronađenog skupa disjunktnih puteva. Proces se nastavlja sve dok je moguće pronaći alternirajuće puteve, odnosno dok je u grafu G' neki neupareni čvor iz U dostižan iz nekog neuparenog čvora iz V.

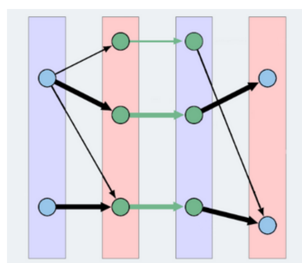
Preciznije, krećemo od skupa neuparenih čvorova u skupu V i te čvorove dodajemo u prvi nivo slojevitog grafa G'', koji konstruišemo iterativno, sve dok se ne pronađe neki neupareni čvor ili kada su svi čvorovi grafa pregledani. Slojeviti graf se konstruiše na sledeći način: krećemo od čvorova tekućeg nivoa i pratimo sve grane koje vode do suseda koji još uvek nisu bili razmatrani. Ovi susedi čine naredni nivo grafa. Ako ovaj novi nivo sadrži neupareni čvor, procedura se završava; ako je nivo prazan, procedura se takođe zaustavlja i vraća da ne postoji alternirajući put. Inače se slojeviti graf proširuje novim nivoom, dodajući partnere čvorova iz prethodnog nivoa. Ovaj nivo sada postaje tekući i procedura se ponavlja dok se ne zaustavi. Konačno, procedura se zaustavlja konstrukcijom slojevitog grafa koji sadrži sve najkraće povećavajuće puteve, ako takvi postoje.

Na slici 9 prikazan je slojeviti graf sa četiri nivoa. Prvi nivo se sastoji od neuparenih čvorova skupa V, a njihovi susedi su dodati u drugi sloj grafa. S



Slika 8: Bipartitni graf i odgovarajuće uparivanje (čvorovi i grane uparivanja su označeni zelenom bojom).

obzirom na to da nijedan čvor drugog nivoa nije neuparen, dodaje se treći nivo sastavljen od partnera čvorova prethodnog nivoa u tekućem uparivanju. Svi susedi čvorova trećeg nivoa koji nisu do sada razmatrani se dodaju u četvrti nivo grafa. S obzirom na to da postoje neupareni čvorovi u ovom nivou (dva čvora) procedura se zaustavlja.



Slika 9: Slojeviti graf za prethodno ilustrovani bipartitni graf. Maksimalni (u smislu inkluzije) skup disjunktnih alternirajućih puteva je istaknut podebljanim granama.

Korišćenjem slojevitog grafa tražimo maksimalni skup disjunktnih alternirajućih puteva. Koristimo pretragu u dubinu koja kreće od neuparenih čvorova prvog nivoa. Ako postoji alternirajući put koji kreće iz nekog ovoh čvorova, on će biti pronađen. Svi čvorovi koji se koriste na ovom putu se brišu iz slojevitog grafa. Primenjujući ovu proceduru na sve čvorove prvog nivoa, skup najkraćih alternirajućih puteva koji se pronalazi će biti disjunktan i maksimalan.

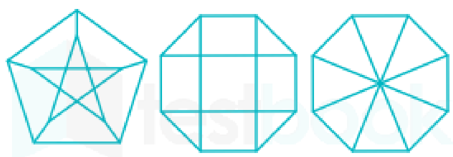
Na slici 9 disjunktni povećavajući putevi su označeni podebljanim linijama. Stoga bi u ovoj iteraciji algoritma uparivanje bilo povećano korišćenjem ova dva alternirajuća puta. Nakon toga bi krenula naredna iteracija i novi graf nivoa bi bio konstruisan.

Algoritam se sastoji iz dva koraka: pretrage u širinu i pretrage u dubinu: obe pretrage su linearne složenosti u funkciji veličine grafa, te je ukupna vremenska složenost Hopkroft-Karpovog algoritma $O((|V| + |E|)\sqrt{|V|})$.

Napomenimo i to da je ideja pronalaženja maksimalnog skupa alternirajućih puteva minimalne dužine primenljiva na problem pronalaženja optimalnog uparivanja u grafovima koji nisu bipartitni i iz tog razloga je odgovarajući algoritam takođe složenosti $O((|V|+|E|)\sqrt{|V|})$. Međutim, problem traženja alternirajućih puteva u svakoj od faza je mnogo teži.

Zadaci za vežbu

1. Dokazati da je graf bipartitan ako i samo u njemu ne postoji ciklus neparne dužine.
2. Koji od navedenih grafova je bipartitan?



(1) (2) (3)

1. Koji je maksimalan broj grana u bipartitnom grafu koji ukupno ima 12 čvorova?
2. Da li je svako maksimalno uparivanje i optimalno? Da li je svako optimalno uparivanje i maksimalno?
3. Graf može imati najviše jedno optimalno uparivanje? (da) (ne) Graf može imati najviše jedno maksimalno uparivanje (da) (ne)
4. Za koje vrednosti n kompetan graf K_n ima savršeno uparivanje?
5. Koliko savršenih uparivanja postoji u kompletnom bipartitnom grafu u kom obe particije imaju po n čvorova?
6. Pokazati da u grafu G koji nije nužno bipartitan, veličina proizvoljnog maksimalnog uparivanja M je barem pola veličine optimalnog uparivanja M^*.