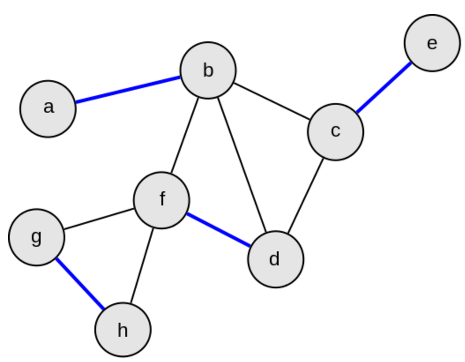
Grafovski algoritmi

U ovom poglavlju razmotrićemo nekoliko novih algoritama nad grafovima. Grafovski algoritmi o kojima će biti reči bave se problemom konstrukcije optimalnog uparivanja u grafu, problemom konstrukcije optimalnog toka u transportnim mrežama i određivanjem Hamiltonovih ciklusa za određene klase grafova.

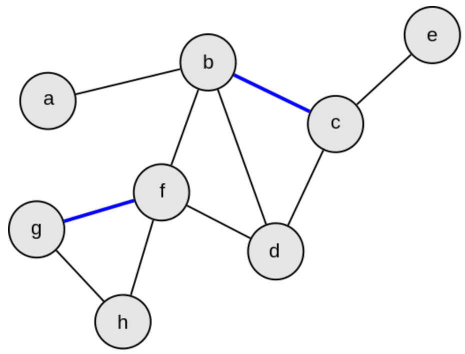
Uparivanje

Za zadati neusmereni graf $G = (V, E)$ *uparivanje* je skup disjunktnih grana (grana bez zajedničkih čvorova). Ovo ime potiče od činjenice da se grane mogu shvatiti kao parovi čvorova. Bitno je da svaki čvor pripada najviše jednoj grani — to je monogamno uparivanje. Čvor koji nije susedan ni jednoj grani iz uparivanja zove se *neupareni* čvor; kaže se takođe da čvor ne pripada uparivanju. *Savršeno uparivanje* je uparivanje u kome su svi čvorovi upareni (slika 1). *Optimalno uparivanje* je uparivanje sa maksimalnim brojem grana. *Maksimalno uparivanje* je pak uparivanje koje se ne može proširiti dodavanjem nove grane (slika 2). Problemi koji se svode na uparivanje pojavljuju se u mnogim situacijama: mogu se uparivati kandidati za posao sa radnim mestima, mašine sa delovima, grupe studenata sa učionicama, itd.

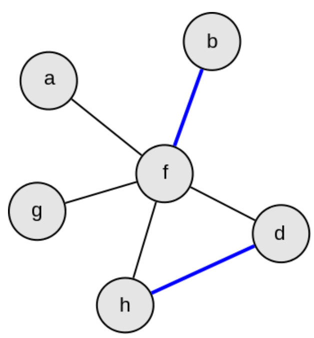


Slika 1: Primer savršenog uparivanja u grafu. Podebljanim plavim linijama istaknute su grane uparivanja: (a, b), (c, e), (f, d), (g, h).

Problem nalaženja optimalnog uparivanja za proizvoljan graf je težak problem. U ovom odeljku ograničićemo se na dva specijalna slučaja. Prvi od njih tiče se uparivanja u vrlo gustim grafovima. Njegov značaj nije prevelik, međutim, rešenje tog problema ilustruje važan pristup, koji se može uopštiti da bi se došlo do rešenja problema uparivanja u slučaju bipartitnih grafova.



Slika 2: Primer maksimalnog uparivanja u grafu. Podebljanim plavim linijama istaknute su grane uparivanja: (b, c) i (f, g).



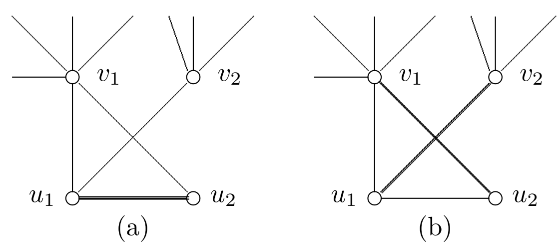
Slika 3: Primer optimalnog uparivanja u grafu. Podebljanim plavim linijama istaknute su grane uparivanja: (b, f) i (h, d).

Savršeno uparivanje u vrlo gustim grafovima

Neka je $G = (V, E)$ neusmereni graf kod koga je $|V| = 2n$ i stepen svakog čvora je bar n. Prikazaćemo algoritam za nalaženje savršenog uparivanja u ovakvim grafovima. Posledica ovog algoritma je da u grafu koji zadovoljava navedene uslove, uvek postoji savršeno uparivanje.

Za konstrukciju ćemo koristiti indukciju po veličini m uparivanja. Bazni slučaj $m = 1$ rešava se formiranjem uparivanja veličine jedan od proizvoljne grane grafa. Pokazaćemo da se proizvoljno uparivanje koje nije savršeno može proširiti ili dodavanjem jedne nove grane ili zamenom jedne grane uparivanja dvema novim granama. U oba slučaja veličina uparivanja se povećava za jedan.

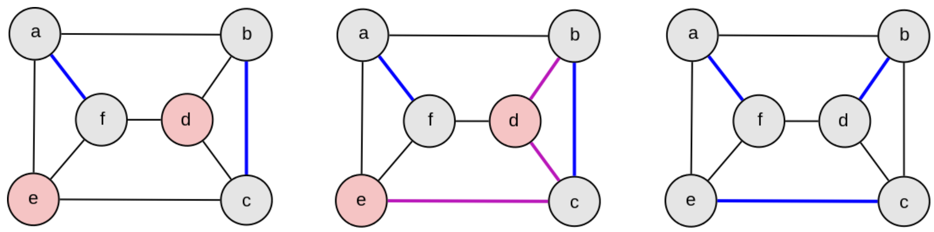
Posmatrajmo uparivanje M sa m grana u grafu G, pri čemu je $m < n$. Najpre proveravamo sve grane van uparivanja M da ustanovimo da li se neka od njih može dodati u M. Ako pronađemo takvu granu, problem je rešen — nađeno je veće uparivanje. U protivnom, M je maksimalno uparivanje. Ako M nije savršeno uparivanje, postoje bar dva neuparena čvora v_1 i v_2. Iz ta dva čvora po pretpostavci izlazi najmanje $2n$ grana. Sve te grane vode ka uparenim čvorovima (u protivnom bi se u uparivanje mogla dodati nova grana, suprotno pretpostavci da je ono maksimalno). Pošto u uparivanju M ima manje od n grana, a iz v_1 i v_2 izlazi bar $2n$ grana, u uparivanju M postoji grana (u_1, u_2) koja je susedna sa („pokriva“) bar tri grane iz v_1 i v_2. Pretpostavimo, bez smanjenja opštosti, da su to grane (u_1, v_1), (u_1, v_2) i (u_2, v_1), videti sliku 4(a). Može se uočiti da se uklanjanjem grane (u_1, u_2) iz M, i dodavanjem dveju novih grana (u_1, v_2) i (u_2, v_1) dobija veće uparivanje, slika 4(b).



Slika 4: Proširivanje uparivanja u gustom grafu.

Razmotrimo primer gustog grafa ilustrovanog na slici 5 sa 6 čvorova u kome je stepen svakog čvora 3. Najpre dolazimo do jednog maksimalnog uparivanja $M = \{(a, f), (b, c)\}$. Neupareni čvorovi su d i e. Primetimo da ka grani (b, c) uparivanja vode tri grane iz neuparenih čvorova: $(d, b), (d, c)$ i (e, c). Zamenom grane (b, c) granama (b, d) i (e, c) dobijamo novo veće uparivanje: $M' = \{(a, f), (b, d), (e, c)\}$. Ovo je naime i savršeno uparivanje.

U ovom algoritmu se u svakom koraku proširivanja uparivanja za jednu granu razmatraju četiri čvora i nekoliko grana koje ih povezuju. U ovoj situaciji je to bilo dovoljno; međutim, u opštem slučaju je nalaženje dobrog uparivanja teži problem. Uključivanje jedne grane u uparivanje utiče na izbor drugih grana



Slika 5: Postupak dolaska do savršenog uparivanja u gustom grafu.

čak i u udaljenim delovima grafa. Pokazaćemo sada kako se ovaj pristup može primeniti na drugi specijalni slučaj problema uparivanja.

Bipartitno uparivanje

Bipartitni graf (eng. bipartite graph) je graf čiji se čvorovi mogu podeliti na dva disjunktna podskupa tako da u grafu postoje samo grane između čvorova iz različitih podskupova.

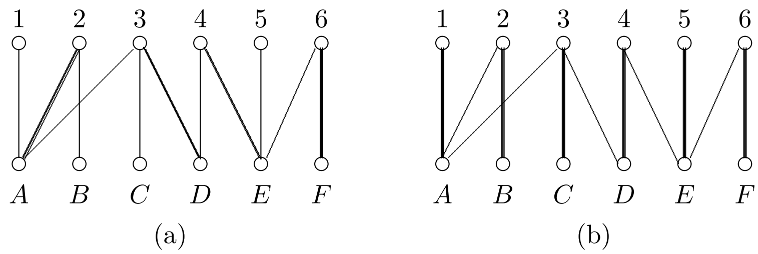
Neka je $G = (V, E, U)$ bipartitni graf u kome su V i U disjunktni skupovi čvorova, a E je skup grana koje povezuju neke čvorove iz V sa nekim čvorovima iz U.

Problem. Pronaći uparivanje sa maksimalnim brojem grana u bipartitnom grafu G.

Jedan od načina da se formuliše problem je sledeći: V je skup devojaka, U je skup mladića, a E je skup „potencijalnih" parova. Cilj je pod ovim uslovima oformiti što veći broj parova mladića i devojaka.

Direktan pristup je formirati parove u skladu sa nekom strategijom, do trenutka kad dalja uparivanja više nisu moguća — u nadi da će nam strategija obezbediti optimalno ili rešenje blisko optimalnom. Može se, na primer, pokušati sa pohlepnim pristupom, uparujući najpre čvorove malog stepena, u nadi da će preostali čvorovi i u kasnijim fazama imati neuparene partnere. Drugim rečima, najpre uparujemo stidljive osobe, one sa manje poznanstava, a o ostalima brinemo kasnije.

Umesto da se bavimo analizama ovakvih strategija (što nije jednostavan problem), pokušaćemo sa pristupom korišćenim kod prethodnog problema. Pretpostavimo da se polazi od maksimalnog uparivanja, koje ne mora biti optimalno. Možemo li ga nekako popraviti? Pogledajmo primer na slici 6(a), na kome je uparivanje prikazano podebljanim granama. Jasno je da se uparivanje može povećati zamenom grane $2A$ sa dve grane $1A$ i $2B$. Ovo je transformacija slična onoj koju smo primenili u prethodnom problemu. Međutim, ne moramo se ograničiti zamenama jedne grane dvema granama. Ako pronađemo sličnu situaciju u kojoj se nekih k grana mogu zameniti sa $k + 1$ grana, dobijamo algoritam većih mogućnosti. Na primer, uparivanje se može dalje povećati zamenom grana $3D$ i $4E$ sa tri grane $3C$, $4D$ i $5E$, slika 6(b).



Slika 6: Proširivanje bipartitnog uparivanja.

Razmotrimo detaljnije ove transformacije. Cilj je povećati broj uparenih čvorova. Polazimo od neuparenog čvora v i pokušavamo da ga uparimo. Pošto polazimo od maksimalnog uparivanja, svi susedi čvora v su već upareni; zbog toga smo prinuđeni da iz uparivanja uklonimo neku od grana koje „pokrivaju“ susede čvora v. Pretpostavimo da smo izabrali čvor u, susedan sa v, koji je prethodno bio uparen sa čvorom w, na primer. Raskidamo uparivanje u sa w, i uparujemo v sa u. Sada preostaje da pronađemo para za čvor w. Ako je w povezan granom sa nekim neuparenim čvorom, onda smo postigli cilj; takav je bio prvi od gornjih slučajeva. Ako to nije slučaj, onda nastavljamo dalje sa raskidanjem parova i formiranjem novih parova. Da bismo na osnovu ove ideje konstruisali algoritam, potrebno je da uradimo dve stvari:

- da obezbedimo da se procedura uvek završava, i
- da pokažemo da ako je poboljšanje moguće, onda će ga procedura sigurno pronaći.

Najpre ćemo formalizovati navedenu ideju.

Alternirajući put (eng. alternating path, augmenting path) P za dato uparivanje M je put od neuparenog čvora $v \in V$ do neuparenog čvora $u \in U$, pri čemu su grane puta P naizmenično u $E \setminus M$, odnosno M. Drugim rečima, prva grana (v, w) puta P ne pripada M (jer je v neuparen), druga grana (w, x) pripada M, i tako dalje do poslednje grane (z, u) puta P koja ne pripada M. Zapazimo da su upravo alternirajući putevi u gornjim primerima omogućavali povećavanje uparivanja. Specijalno, ako je put dužine jedan, onda je to grana koja povezuje dva neuparena čvora; takve grane ne postoje u odnosu na maksimalno uparivanje. Broj grana na putu P mora biti neparan, jer P polazi iz V i završava u U. Pored toga, među granama puta P grana u $E \setminus M$ ima za jednu više od grana u M. Prema tome, ako iz uparivanja izbacimo sve grane P koje su u M, a uključimo sve grane P koje su u $E \setminus M$, dobićemo novo uparivanje sa jednom granom više. Na primer, prvi alternirajući put korišćen za povećanje uparivanja na slici 6(a)) je put $(1A, A2, 2B)$, i on omogućuje zamenu grane $A2$ granama $1A$ i $2B$; drugi alternirajući put $(C3, 3D, D4, 4E, E5)$ omogućuje zamenu grana $3D$ i $4E$ granama $C3$, $D4$ i $E5$.

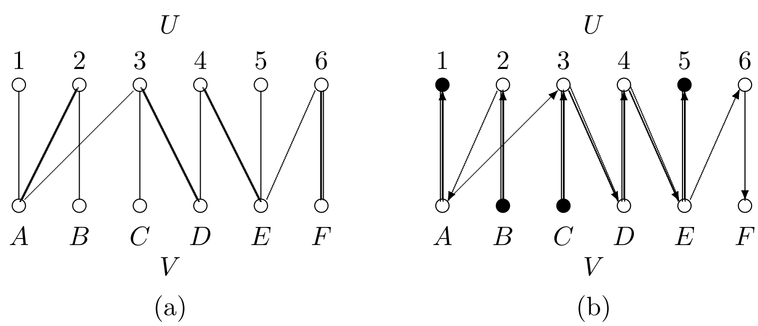
Jasno je da ako za dato uparivanje M postoji alternirajući put, onda M nije optimalno uparivanje. Ispostavlja se da je tačno i obrnuto tvrđenje.

Teorema 1 (Teorema o alternirajućem putu)**.** *Uparivanje je optimalno ako i samo u odnosu na njega ne postoji alternirajući put.*

Dokaz će biti dat kao posledica opštijeg tvrđenja u poglavlju o transportnim mrežama.

Teorema o alternirajućem putu direktno sugeriše algoritam, jer proizvoljno uparivanje koje nije optimalno ima alternirajući put, a alternirajući put daje povećano uparivanje. Započinjemo sa pohlepnim algoritmom, dodajući grane u uparivanje sve dok je to moguće. Onda prelazimo na traženje alternirajućih puteva i povećavanje uparivanja, sve do trenutka kad više nema alternirajućih puteva u odnosu na poslednje uparivanje. Dobijeno uparivanje je tada optimalno. Pošto alternirajući put povećava uparivanje za jednu granu, a u uparivanju ima najviše $n/2$ grana (gde je n broj čvorova), broj iteracija je najviše $n/2$.

Preostaje još jedan problem — kako pronalaziti alternirajuće puteve? Problem se može rešiti na sledeći način. Transformišemo neusmereni graf G u usmereni graf G' usmeravajući grane iz M od U ka V, a grane iz $E \setminus M$ od V ka U. Slika 7(a) prikazuje polazno maksimalno uparivanje za graf sa slike 6(a), a slika 7(b) prikazuje odgovarajući usmereni graf G'. Alternirajući put u G tada odgovara usmerenom putu od neuparenog čvora u V do neuparenog čvora u U u grafu G'. Takav usmereni put može se pronaći bilo kojim postupkom obilaska grafa, npr. pomoću DFS. Složenost obilaska (pretrage) je $O(|V| + |E|)$, pa je složenost algoritma $O(|V|(|V| + |E|))$.



Slika 7: Nalaženje alternirajućih puteva

Hopkroft-Karpov algoritam Primetimo da prethodni algoritam pronalazi jedan po jedan alternirajući put. *Hopkroft-Karpov algoritam* popravlja vreme izvršavanja algoritma tako što pokušava da u jednoj pretrazi pronađe veći broj alternirajućih puteva. Potrebno je, međutim, da budemo sigurni da su ovi putevi nezavisni, odnosno da su njihovi skupovi čvorova međusobno disjunktni. Ako su putevi disjunktni, onda utiču na uparivanje različitih čvorova, pa se mogu istovremeno iskoristiti.

Neka je G graf, a M neko maksimalno uparivanje u grafu. *Maksimalni skup alternirajućih puteva minimalne dužine* u odnosu na M je skup $P_1, P_2, \ldots, P_k$

alternirajućih puteva za koje važi:

1. putevi $P_1, P_2, \ldots, P_k$ imaju disjunktne skupove čvorova,
2. svi putevi P_i su iste dužine l,
3. l je minimalna dužina alternirajućeg puta u odnosu na M,
4. svaki alternirajući put dužine l ima bar jedan zajednički čvor sa $P_1 \cup \ldots \cup P_k$.

Drugim rečima, to je maksimalna kolekcija međusobno disjunktnih alternirajućih puteva minimalne dužine.

Ako je M uparivanje u grafu i $\{P_1, \ldots, P_k\}$ je skup međusobno disjunktnih alternirajućih puteva u odnosu na M, onda je $M \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_k$[1] uparivanje koje ima $|M| + k$ grana.

Teorema 2 (Teorema o broju alternirajućih puteva)**.** *Neka je M neko uparivanje u grafu G, a M^* optimalno uparivanje u G i neka je $k = |M^*| - |M|$. Skup grana $M \oplus M^*$ sadrži barem k međusobno disjunktnih alternirajućih puteva u odnosu na uparivanje M. Dodatno, G ima bar jedan alternirajući put dužine manje od n/k, gde n označava broj čvorova grafa G.*

Dokaz: U skupu grana $M \oplus M^*$ maksimalni stepen nekog čvora je 2 i svaki čvor stepena 2 pripada tačno jednoj grani uparivanja M. Stoga je svaka povezana komponenta skupa $M \oplus M^*$ alternirajuća komponenta u odnosu na M (grane naizmenično pripadaju i ne pripadaju M, a krajnji čvorovi puta ne moraju biti neupareni). Svaka alternirajuća komponenta koja nije alternirajući put ima bar onoliko grana iz M koliko iz M^*, dok svaki alternirajući put ima tačno jednu granu manje u M nego u M^*. Stoga, bar k povezanih komponenti skupa $M \oplus M^*$ moraju biti alternirajući putevi u odnosu na M i oni svi imaju disjunktne skupove čvorova. S obzirom na to da G ima n čvorova sledi da G ne može imati k disjunktnih podgrafova od kojih svaki ima više od n/k čvorova, već je bar jedan dužine manje od n/k. □

Na osnovu ove teoreme moguće je formulisati novi, efikasniji algoritam za određivanje optimalnog uparivanja u grafu: on bi u odnosu na tekuće uparivanje M tražio maksimalni skup alternirajućih puteva minimalne dužine i ažurirao uparivanje na sledeći način: $M = M \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_k$. Ovaj postupak bismo ponavljali sve dok postoje alternirajući putevi u odnosu na uparivanje M.

Postavlja se pitanje da li smo na ovaj način popravili asimptotsku složenosti algoritma. Naredne dve teoreme nam to tvrde.

Teorema 3 (Teorema o povećanju dužine alternirajućih puteva)**.** *Minimalna dužina alternirajućeg puta u odnosu na uparivanje M se nakon svakog koraka ažuriranja strogo povećava.*

Ovo tvrđenje navodimo bez dokaza.

[1] Simbol $\oplus$ označava ekskluzivnu disjunkciju.

Teorema 4. *Hopkroft-Karpov algoritam se zaustavlja nakon manje od $2\sqrt{n}$ iteracija petlje.*

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme, nakon prvih $\sqrt{n}$ iteracija u kojima se određuje maksimalni skup alternirajućih puteva minimalne dužine, minimalna dužina alternirajućeg puta biće veća od $\sqrt{n}$. Iz Teoreme o broju alternirajućih puteva sledi da je $|M^*| - |M| < \sqrt{n}$, gde je sa M^* označeno optimalno uparivanje u grafu. Dokažimo to tvrđenje. Pretpostavimo suprotno: neka je $|M^*| - |M| \geq \sqrt{n}$. Tada na osnovu ove teoreme postoji bar jedan alternirajući put dužine manje od $n/\sqrt{n} = \sqrt{n}$, a to je suprotno pretpostavci. Dakle, važi $|M^*| - |M| < \sqrt{n}$. S obzirom na to da svaka naredna iteracija strogo povećava $|M|$, dakle preostalo je još manje od $\sqrt{n}$ iteracija. Dakle, ukupan broj iteracija petlje je manji od $2\sqrt{n}$. $\square$

Maksimalni skup alternirajućih puteva minimalne dužine u odnosu na M dobijamo obilaskom grafa G' u širinu počev od skupa neuparenih čvorova u V, sloj po sloj, do sloja u kome su pronađeni neupareni čvorovi iz U. Zatim iz grafa indukovanog pretragom u širinu vadimo maksimalni skup disjunktnih puteva u G', kojima odgovaraju alternirajući putevi u G. To se izvodi pronalaženjem prvog puta, uklanjanjem njegovih čvorova, pronalaženjem narednog puta, uklanjanjem njegovih čvorova, itd. Svaki novi disjunktni put povećava uparivanje za jednu granu. Na kraju povećavamo uparivanje korišćenjem pronađenog skupa disjunktnih puteva. Proces se nastavlja sve dok je moguće pronaći alternirajuće puteve, odnosno dok je u grafu G' neki neupareni čvor iz V dostižan iz nekog neuparenog čvora iz U.

Ukupna vremenska složenost Hopkroft-Karpovog algoritma je $O((|V| + |E|)\sqrt{|V|})$.

Optimizacija transportne mreže

Problem optimizacije transportne mreže jedan je od osnovnih problema u teoriji grafova i kombinatornoj optimizaciji. Intenzivno je proučavan više od 40 godina, pa su za njega razvijeni mnogi algoritmi i strukture podataka. Problem ima mnogo varijanti i uopštenja. Osnovna varijanta mreže može se formulisati na sledeći način. Neka je $G = (V, E)$ usmereni graf sa dva posebno izdvojena čvora: izvor s (eng. source), sa ulaznim stepenom 0, i ponor t (eng. sink) sa izlaznim stepenom 0. Svakoj grani $e \in E$ pridružena je pozitivna težina $c(e)$ koju nazivamo *kapacitet* grane e. Kapacitet grane je mera toka koji može biti propušten kroz granu. Za ovakav graf kažemo da je *transportna mreža* (eng. transportation network, flow network). *Tok* (eng. flow) je funkcija f definisana na skupu grana E koja zadovoljava sledeće uslove:

(1) $0 \leq f(e) \leq c(e)$: tok kroz proizvoljnu granu ne može da premaši njen kapacitet;

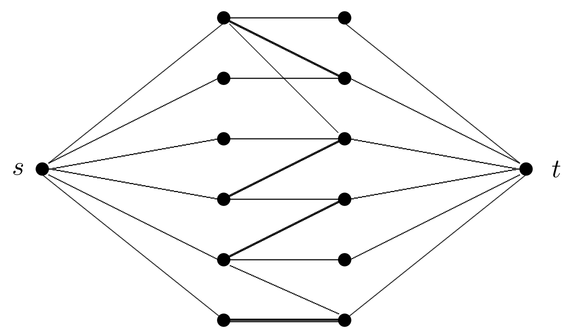
(2) za sve čvorove $v \in V \setminus \{s, t\}$ je $\sum_u f(u, v) = \sum_w f(v, w)$: ukupan tok koji ulazi u proizvoljni čvor v različit od s, t jednak je ukupnom toku koji izlazi iz njega („nestišljivost“, zakon očuvanja, odnosno konzervacije toka).

Ova dva uslova imaju za posledicu da je ukupan tok koji izlazi iz izvora s jednak ukupnom toku koji ulazi u ponor t. U to se možemo uveriti na sledeći način. Uvešćemo najpre pojam *preseka* (eng. cut). Neka je A proizvoljan podskup V takav da sadrži s, a ne sadrži t. Označimo sa $B = V \setminus A$ skup preostalih čvorova. Presek određen skupom A je skup grana $(v, u) \in E$ takvih da $v \in A$ i $u \in B$. Intuitivno, presek je skup grana koje razdvajaju s od t: ako bismo ih uklonili ne bi bilo moguće pustiti nikakav tok kroz mrežu, jer ne bi postojao put u rezultujućem grafu od izvora do ponora. Indukcijom po broju čvorova u A lako se pokazuje da ukupan tok kroz presek ne zavisi od A. Specijalno, za $A = \{s\}$ presek obuhvata grane koje izlaze iz s, a za $A = V \setminus \{t\}$ presek čine grane koje ulaze u t. Prema tome, ukupan tok koji izlazi iz s jednak je ukupnom toku koji ulazi u t. Problem koji nas zanima je *problem maksimizovanja toka* (eng. maximum flow problem). Jedan način da se opisani problem shvati kao realan fizički problem, je da zamislimo da mrežu čine cevi za vodu. Svaka cev ima svoj kapacitet, a uslovi koje tok treba da zadovolji su prirodni. Cilj je „proterati“ kroz mrežu što veću količinu vode u jedinici vremena.

Pokazaćemo najpre da se problem bipartitnog uparivanja može svesti na problem optimizacije transportne mreže. To može na prvi pogled da izgleda beskorisno, pošto već znamo da rešimo problem bipartitnog uparivanja, a ne znamo rešenje problema optimizacije transportne mreže — redukcija je dakle u pogrešnom smeru. Međutim, za rešavanje problema optimizacije transportne mreže može se primeniti postupak sličan postupku za nalaženje optimalnog bipartitnog uparivanja.

Zadatom bipartitnom grafu $G = (V, E, U)$ u kome treba pronaći uparivanje sa najvećim mogućim brojem grana (optimalno uparivanje) dodajemo dva nova čvora s i t, povezujemo s granama sa svim čvorovima iz V, sve čvorove iz U povezujemo sa t, a grane uparivanja usmeravamo sleva udesno. Označimo dobijeni graf sa G' (videti sliku 8, na kojoj su sve grane usmerene sleva udesno). Pošto svim granama dodelimo kapacitet 1, dobijamo regularan problem optimizacije transportne mreže na grafu G'. Neka je M neko uparivanje u G. Uparivanju M može se na prirodan način pridružiti tok u G'. Dodeljujemo tok 1 svim granama iz M i svim granama koje s ili t povezuju sa uparenim čvorovima. Svim ostalim granama dodeljujemo tok 0. Ukupan tok jednak je tada broju grana u uparivanju M. Može se pokazati da je *M optimalno uparivanje ako i samo ako je odgovarajući celobrojni tok u G' optimalan.* U jednom smeru dokaz je jednostavan: ako je tok optimalan i odgovara uparivanju, onda se ne može naći veće uparivanje, jer bi mu odgovarao veći tok. Da bismo izveli dokaz u drugom smeru, potrebno je da nekako primenimo ideju alternirajućih puteva na tok u transportnoj mreži, i da pokažemo da ako nema alternirajućih puteva, onda je odgovarajući tok optimalan.

Povećavajući put (eng. augmenting path) u odnosu na zadati tok f je usmereni put od s do t, koji se sastoji od grana iz G, ne obavezno u istom smeru; svaka



Slika 8: Svođenje bipartitnog uparivanja na optimizaciju transportne mreže (sve grane usmerene su sleva udesno).

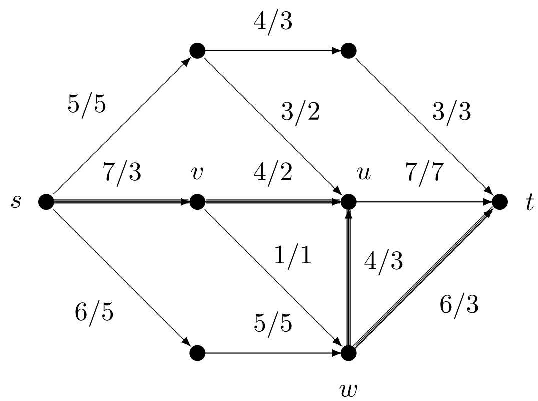
od tih grana (v, u) treba da zadovolji tačno jedan od sledeća dva uslova:

1. (v, u) ima isti smer kao i u G, i $f(v, u) < c(v, u)$. U tom slučaju grana (v, u) je *direktna grana*. Direktna grana ima kapacitet veći od toka, pa se kroz nju može povećati tok. Razlika $c(v, u) - f(v, u)$ zove se *slek* ili *rezidualni kapacitet* (eng. slack, residual capacity) te grane.

2. (v, u) ima suprotan smer u G, i $f(v, u) > 0$. U ovom slučaju grana (v, u) je *povratna grana*. Deo toka iz povratne grane može se „pozajmiti“.

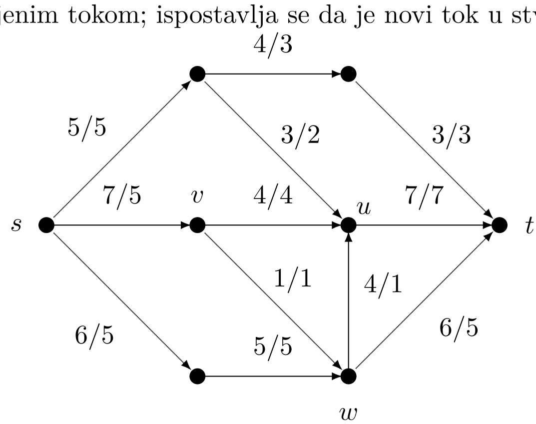
Povećavajući put je uopštenje alternirajućeg puta, i ima isti smisao za transportne mreže kao alternirajući put za bipartitno uparivanje. Ako postoji povećavajući put u odnosu na tok f, onda f nije optimalni tok. Tok f može se povećati povećavanjem toka kroz povećavajući put na sledeći način. Ako su sve grane povećavajućeg puta direktne grane, onda se kroz njih može povećati tok, tako da sva ograničenja i dalje ostanu zadovoljena. Najveće moguće povećanje toka je u ovom slučaju tačno jednako minimalnom sleku među granama puta. Slučaj povratnih grana je nešto složeniji, videti primer na slici 9. Svaka grana označena je sa dva broja a/b, pri čemu je a kapacitet, a b trenutni tok. Jasno je da se ukupan tok ne može direktno povećati, jer ne postoji put od s do t koji se sastoji samo od direktnih grana. Ipak, postoji način da se ukupan tok poveća.

Put $s - v - u - w - t$ je povećavajući put. Dopunski tok 2 može se sprovesti od s do u (2 je minimalni slek na direktnim granama do u). Tok 2 može se *oduzeti* (pozajmiti) od $f(w, u)$. Time se postiže zadovoljenje uslova (2) – zakona očuvanja toka za čvor u, jer je u imao povećanje toka za 2 iz povećavajućeg puta, a zatim smanjenje dotoka za 2 iz povratne grane. U čvoru w je sada izlazni tok smanjen za 2, pa ga treba povećati kroz neku izlaznu granu. Sa „proterivanjem“ toka može se nastaviti na isti način od w, povećavanjem toka kroz direktne grane i smanjivanjem toka kroz povratne grane. U ovom slučaju postoji samo još jedna direktna grana (w, t) koja dostiže t, i problem je rešen. Pošto samo direktne grane mogu da izlaze iz s, odnosno da ulaze u t, ukupan tok je povećan. Povećanje je jednako manjem od sledeća dva broja: minimalnog sleka direktnih



Slika 9: Primer mreže sa povećavajućim putem.

grana, odnosno minimalnog toka povratnih grana. Na slici 10 prikazana je ista mreža sa promenjenim tokom; ispostavlja se da je novi tok u stvari optimalan.



Slika 10: Rezultat povećavanja toka u mreži sa slike 9.

Iz rečenog sledi da ako u mreži postoji povećavajući put, onda tok nije optimalan. Obrnuto je takođe tačno.

Teorema 5 (Teorema o povećavajućem putu)**.** *Tok kroz transportnu mrežu je optimalan ako i samo ako u odnosu na njega ne postoji povećavajući put.*

Dokaz: Dokaz u jednom smeru smo već videli — ako u mreži postoji povećavajući put, onda tok nije optimalan. Pretpostavimo sada da u odnosu na tok f ne postoji ni jedan povećavajući put, i dokažimo da je tada f optimalni tok. Za proizvoljan presek (određen skupom A, $s \in A$, $t \in B \equiv V \setminus A$) definišemo kapacitet, kao zbir kapaciteta njegovih grana koje vode iz nekog čvora A u neki čvor B. Jasno je da ni jedan tok ne može biti veći od kapaciteta proizvoljnog preseka. Zaista, ukupan tok iz s jednak je zbiru tokova kroz grane preseka od A ka B, umanjenom za tok kroz grane preseka od B ka A, pa je manji ili jednak od zbira kapaciteta grana koje vode od A ka B, odnosno od kapaciteta preseka. Prema tome, ako pronađemo tok sa vrednošću jednakom kapacitetu nekog preseka, onda je taj tok optimalan. Sa dokazom nastavljamo u tom pravcu: pokazaćemo da ako u odnosu na tok ne postoji povećavajući put, onda je ukupan tok jednak kapacitetu nekog preseka, pa dakle optimalan.

Neka je f tok u odnosu na koji ne postoji povećavajući put. Neka je $A \subset V$ skup čvorova v takvih da u odnosu na tok f postoji povećavajući put od s do v (preciznije, postoji put od s do v takav da na njemu za sve direktne grane e važi $f(e) < c(e)$, a za sve povratne grane e' važi $f(e') > 0$). Jasno je da $s \in A$ i $t \notin A$, jer po pretpostavci za f ne postoji povećavajući put. Prema tome, A definiše presek. Tvrdimo da za sve grane (v, w) tog preseka važi $f(v, w) = c(v, w)$ ako je $v \in A$, $w \in B$ („direktne“ grane), odnosno $f(v, w) = 0$ ako je $v \in B$, $w \in A$ („povratne grane“). Zaista, u protivnom bi direktna grana (v, w) produžavala povećavajući put do čvora $w \notin A$, suprotno pretpostavci da takav put postoji samo do čvorova iz A. Slično, povratna grana (v, w) produžavala bi povećavajući put do čvora $v \notin A$. Dakle, ukupan tok jednak je kapacitetu preseka određenog skupom A, pa je tok f optimalan. □

Dokazali smo sledeću važnu teoremu.

Teorema 6 (Teorema o maksimalnom toku i minimalnom preseku)**.** *Optimalni tok u mreži jednak je minimalnom kapacitetu preseka.*

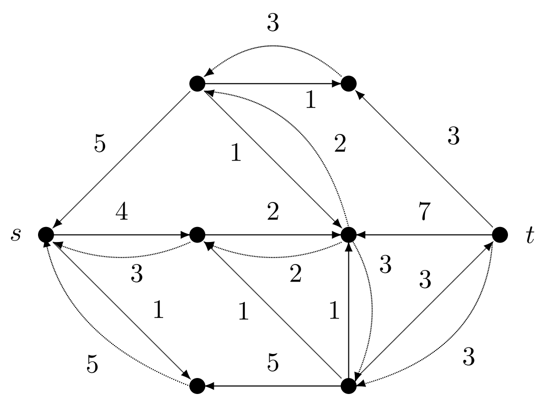
Teorema o povećavajućem putu ima za posledicu i sledeću teoremu.

Teorema 7 (Teorema o celobrojnom toku)**.** *Ako su kapaciteti svih grana u mreži celobrojni, onda postoji optimalni tok sa celobrojnom vrednošću.*

Dokaz: Tvrđenje je posledica teoreme o povećavajućem putu. Svaki algoritam koji koristi samo povećavajuće puteve dovodi do celobrojnog toka ako su svi kapaciteti grana celobrojni. Ovo je očigledno, jer se može krenuti od toka 0, a onda se ukupan tok posle svake upotrebe povećavajućeg puta povećava za celi broj. Do istog zaključka dolazi se i na drugi način: kapacitet svakog preseka je celobrojan, pa i minimalnog. □

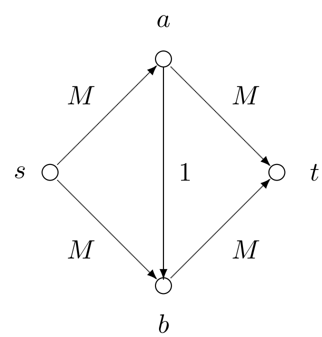
Vratimo se sada na problem bipartitnog uparivanja. Jasno je da svaki alternirajući put u G odgovara povećavajućem putu u G', i obrnuto. Posledica teoreme o povećavajućem putu je teorema o alternirajućem putu iz prethodnog odeljka. Ako je M optimalno uparivanje, onda za njega ne postoji alternirajući put, pa u G' ne postoji povećavajući put, a odgovarajući tok je optimalan. S druge strane, postoji optimalni celobrojni tok, i on mora da odgovara uparivanju, jer je svaki čvor u V povezan samo jednom granom (sa kapacitetom 1) sa s; zbog toga, ukupan tok kroz svaki čvor iz V može da bude najviše 1. Isto važi i za čvorove iz skupa U. Ovo uparivanje mora biti optimalno, jer ako bi se moglo povećati, onda bi postojao veći ukupni tok.

Teorema o povećavajućem putu neposredno se transformiše u algoritam. Polazi se od toka 0, traže se povećavajući putevi, i na osnovu njih povećava se tok, sve do trenutka kad povećavajući putevi više ne postoje. Traženje povećavajućih puteva može se izvesti na sledeći način. Definišemo *rezidualni graf* (eng. residual network) u odnosu na mrežu $G = (V, E)$ i tok f, kao mrežu $R = (V, F)$ sa istim čvorovima, istim izvorom i ponorom, ali promenjenim skupom grana i njihovih težina. Svaku granu $e = (v, w)$ sa tokom $f(e)$ zamenjujemo sa najviše dve grane $e' = (v, w)$ (ako je $f(e) < c(e)$; kapacitet e' jednak je sleku grane e: $c(e') = c(e) - f(e)$), odnosno $e'' = (w, v)$ (ako je $f(e) > 0$; kapacitet e'' je $c(e'') = f(e)$). Ako se na ovaj način dobiju dve paralelne grane, zamenjuju se jednom, sa kapacitetom jednakom zbiru kapaciteta paralelnih grana. Na slici 11 prikazan je rezidualni graf za mrežu sa slike 9, u odnosu na tok zadat na toj slici. Grane rezidualnog grafa odgovaraju mogućim granama povećavajućeg puta. Njihovi kapaciteti odgovaraju mogućem povećanju toka kroz te grane. Prema tome, povećavajući put je običan usmereni put od s do t u rezidualnom grafu. Konstrukcija rezidualnog grafa zahteva $O(|E|)$ koraka, jer se svaka grana proverava tačno jednom.



Slika 11: Rezidualni graf mreže sa slike 9 u odnosu na tok definisan na toj slici.

Ovako opisan postupak odgovara takozvanom *Ford-Fulkersonovom algoritmu*, objavljenom 1956. godine. Često se umesto termina algoritam koristi termin Ford-Fulkersonov metod, pošto način pronalaska povećavajućih puteva u rezidualnom grafu nije u potpunosti preciziran. Naime, izbor povećavajućeg puta na proizvoljan način može se pokazati vrlo neefikasnim. Vreme izvršenja takvog algoritma u najgorem slučaju može da čak i ne zavisi od veličine grafa. Posmatrajmo mrežu na slici 12. Optimalni tok je očigledno $2M$. Međutim, mogli bismo da krenemo od povećavajućeg puta $s - a - b - t$ kroz koji se tok može povećati samo za 1. Zatim bismo mogli da izaberemo povećavajući put $s - b - a - t$ koji opet povećava tok samo za 1. Proces može da se ponovi ukupno $2M$ puta, gde M može biti vrlo veliko, bez obzira što graf ima samo četiri čvora i pet grana. U opštem slučaju, kada su kapaciteti grana celobrojni vreme izvršavanja Ford-Fulkersonovog algoritma može biti $O(|E| \cdot f)$, gde je sa f označen maksimalni tok kroz mrežu. Ovo je zato što svaki povećavajući put može biti pronađen u vremenu $O(|E|)$, a povećava tok za najmanje 1. Dodatno, pokazuje se da se algoritam ni ne zaustavlja, ako su kapaciteti grana iracionalni brojevi.



Slika 12: Primer mreže na kojoj traženje povećavajućih puteva može biti neograničeno neefikasno.

Gore navedeni scenario se može izbeći. Edmonds i Karp su 1972. godine pokazali da ako se među mogućim povećavajućim putevima u rezidualnom grafu uvek bira onaj sa najmanjim brojem grana, onda je broj povećavanja najviše $(|V||E|)$, te je ukupna složenost algoritma $O(|V||E|^2)$.