Математички факултет, Београд

Конструкција и анализа алгоритама

Београд, 2019.

Аутори:

Весна Маринковић, доцент на Математичком факултету у Београду
Филип Марић, ванредни професор на Математичком факултету у Београду
Страхиња Станојевић, асистент на Математичком факултету у Београду
Сана Стојановић-Ђурђевић, асистент на Математичком факултету у Београду

Конструкција и анализа алгоритама

Издавач: Математички факултет, Београд
За издвача: *др Зоран Ракић*

Рецензенти:

????, ???
???, ???

Обрада текста и илустрације: *аутори*, Дизајн корица: *???*

Штампа: ??? Тираж: 200

ISBN ???
ЦИП - Каталогизација у публикацији

Народна библиотека Србије, Београд

ВЕСНА МАРИНКОВИЋ

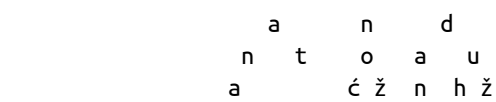
Садржај

Глава 1

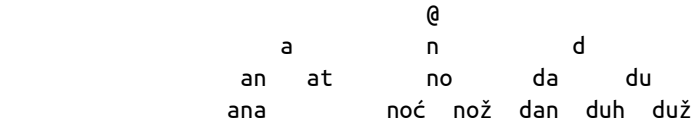
Напредне структуре података

Префиксно дрво

Уређена бинарна дрвета омогућавају ефикасну имплементацију структура са асоцијативним приступом код којих се приступ врши по кључу који није целобројна вредност већ стринг или нешто друго. Још једна структура у виду дрвета која омогућава ефикасан асоцијативан приступ је *префиксно дрво* такође познато под енглеским називом *trie* (од енглеске речи *reTRIEval*). Основна идеја ове структуре је да путање од корена до листова или до неких унутрашњих чворова кодирају кључеве, а да се подаци везани за тај кључ чувају у чвору док којег се долази проналажењем кључа дуж путање. У случају ниски, корен садржи празну реч, а преласком преко сваке гране се дна до тада формирану реч надовезује још један карактер. Притом, заједнички префиксни различитих кључева су представљени истим путањама од корена до тачке разликовања. Један пример оваквог дрвета, код којег су приказане ознаке придружене гранама, а не чворовима, је следећи:



Кључеви које дрво чува су *ana*, *at*, *noć*, *nož*, *da*, *dan*, *duh* и *duž*. Приметимо да се кључ *da* не завршава листом и да стога сваки чвор мора чувати информацију о томе да ли се њиме комплетира неки кључ (и у том случају садржати податак) или не. Илустрације ради, могу се приказати ознаке на чворовима, које представљају префиксе акумулиране до тих чворова. Треба имати у виду да овај приказ не илуструје имплементацију, већ само префиксе дуж гране. Симбол @ представља празну реч.



У случају да неки чвор има само једног потомка и не представља крај неког кључа,

грана до њега и грана од њега се могу спојити у једну, њихови карактери надовезати, а чвор елиминисати. Овако се добија компактнија репрезентација префиксног дрвета.

Поред општег асоцијативног приступа подацима, очигледна примена ове структуре је и имплементација коначних речника, на пример у сврхе аутоматског комплетирања или провере исправности речи које корисник куца на рачиунару или мобилном телефону.

Напоменимо још и да ова структура није резервисана за чување стрингова. На пример, у сличају целих бројева или бројева у покретном зарезу, кључ могу бити ниске битова које представљају такве бројеве.

У случају коначне азбуке величине m, сложеност операција у најгорем случају је $O(mn)$, где је n дужина речи која се тражи, умеће или брише, док је сложеност ових операција у просечном случају $O(n)$. Када би се уместо префиксног дрвета користило балансирано уређено бинарно дрво, сложеност ових операција би у најгорем случају била $O(M \log N)$, где је са N означен укупан број кључева који се чувају у дрвету, а са M максимална дужина кључа. Уколико су кључеви релативно кратки, предност префиксног дрвета је што сложеност зависи од дужине записа кључа, а не од броја елемената у дрвету. Мана је потреба за чувањем показивача уз сваки карактер у дрвету. Штавише, просторна сложеност префиксног дрвета је $O(M \cdot m \cdot N)$, где је са N означен број кључева који се чувају у префиксном дрвету, а са M максимална дужина кључа.

Претрага и уметање се праволинијски имплементирају, док је у случају брисања некада потребно брисати више од једног чвора.

Задатак: Днк секвенце

Поставка: ДНК секвенце се представљају нискама које се састоје од карактера `c`, `t`, `a` и `g`. У програму се одржава скуп подсеквенци једне дате генетске секвенце. Програм подржава три операције: убацивање подсеквенце у скуп (ако је подсеквенца већ у скупу, ова операција нема ефекта), избацивање подсеквенце из скупа (ако се подсеквенца не налази у скупу, ова операција нема ефекта) и испистивање да ли се подсеквенца налази у скупу.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број упита n ($1 \leq n \leq 50000$), а затим у наредних n редова по један упит. Упит може бити облика `ubaci niska`, `izbaci niska` или `trazi niska`, при чему се свака ниска састоји само од карактера `c`, `t`, `a` и `g` и дугачка је између једног и `5000` карактера.

Излаз: За сваки упит `trazi` исписати `da` ако се тражена ниска тренутно налази у скупу или `ne` ако се не налази.

Пример

Улаз	*Излаз*
14	da
ubaci cta	da
ubaci ct	da
ubaci ctg	ne
trazi cta	ne
trazi ct	da
trazi ctg	ne
trazi ctc	da
izbaci ct	
trazi ct	
trazi ctg	
izbaci ctg	
trazi ctg	
ubaci ctg	
trazi ctg	

Решење: У програму се тражи одржавање скупа ниски. Најједноставније, а и најефикасније решење је да користимо библиотечку имплементацију скупа.

```
#include <iostream>
#include <unordered_set>

using namespace std;

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);

  unordered_set<string> niske;
  int n;
  cin >> n;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    string naredba, niska;
    cin >> naredba >> niska >> ws;
    if (naredba == "ubaci")
      niske.insert(niska);
    else if (naredba == "izbaci")
      niske.erase(niska);
    else if (naredba == "trazi") {
      if (niske.find(niska) != niske.end())
        cout << "da" << "\n";
      else
        cout << "ne" << "\n";
    }
  }
  return 0;
}
```

У сваком чвору префиксног дрвета можемо чувати асоцијативни низ који пресликава слова азбуке у наредне чворове дрвета. Функције можемо имплементирати рекурзивно.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <string>
#include <unordered_map>
using namespace std;

// struktura čvora prefiksnog drveta - u svakom čvoru čuvamo niz
// grana obeleženih karakterima ka potomcima i informaciju da li
// je u ovom čvoru kraj neke reči
struct Cvor {
  bool krajReci = false;
  unordered_map<char, Cvor*> grane;
};


// tražimo sufiks reči w koji počinje od pozicije i u drvetu na
// čiji koren ukazuje pokazivač drvo
bool sadrzi(Cvor *drvo, const string& w, size_t i) {
  // ako je drvo prazno, ono ne sadrži traženu reč
  if (drvo == nullptr)
    return false;

  // ako je sufiks prazan, on je u korenu akko je u korenu obeleženo
  // da je tu kraj reči
  if (i == w.size())
    return drvo->krajReci;

  // tražimo granu na kojoj piše w[i]
  auto it = drvo->grane.find(w[i]);
  // ako je nađemo, rekurzivno tražimo ostatak sufiksa od pozicije i+1
  if(it != drvo->grane.end())
    return sadrzi(it->second, w, i+1);

  // nismo našli granu sa w[i], pa reč ne postoji
  return false;
}

// tražimo reč w u drvetu na čiji koren ukazuje pokazivač drvo
bool sadrzi(Cvor* drvo, const string& w) {
  return sadrzi(drvo, w, 0);
}

// umeće sufiks reči w od pozicije i u drvo na čiji koren ukazuje
// pokazivač drvo
```

```
void ubaci(Cvor* drvo, const string& w, size_t i) {
  // ako je sufiks prazan samo u korenu beležimo da je tu kraj reči
  if (i == w.size()) {
    drvo->krajReci = true;
    return;
  }

  // tražimo granu na kojoj piše w[i]
  auto it = drvo->grane.find(w[i]);
  // ako takva grana ne postoji, dodajemo je kreirajući novi čvor
  if (it == drvo->grane.end())
    drvo->grane[w[i]] = new Cvor();

  // sada znamo da grana sa w[i] sigurno postoji i preko te grane
  // nastavljamo dodavanje sufiksa koji počinje na i+1
  ubaci(drvo->grane[w[i]], w, i+1);
}

// umeće reč w u drvo na čiji koren ukazuje pokazivač drvo
Cvor* ubaci(Cvor *drvo, string& w) {
  if (drvo == nullptr)
    drvo = new Cvor();
  ubaci(drvo, w, 0);
  return drvo;
}

// izbacuje iz drveta na čiji koren ukazuje pokazivač drvo sufiks reči
// w od pozicije
// funkcija vraca informaciju o tome da li nakon brisanja ostaje prazno drvo
bool izbaci(Cvor* drvo, const string& w, size_t i) {
  // ako je drvo prazno, ništa ne treba menjati
  if (drvo == nullptr)
    // drvo je bilo i ostalo prazno
    return true;

  // ako smo stigli do kraja reči
  if (i == w.length())
    // označavamo da u tekućem čvoru nije više kraj neke reči
    drvo->krajReci = false;
  else {
    auto it = drvo->grane.find(w[i]);
    // u suprotom brišemo sufiks i ako se nakon toga dobije prazno
    // drvo, uklanjamo granu
    if (it != drvo->grane.end() && izbaci(it->second, w, i+1))
      drvo->grane.erase(it);
  }
```

```
  // ako je u drvetu ostao jedan potpuno prazan čvor
  if (!drvo->krajReci && drvo->grane.size() == 0) {
    // brišemo ga
    delete drvo;
    // javljamo da je nakon brisanja nastalo prazno drvo
    return true;
  } else
    // javljamo da drvo nakon brisanja nije prazno
    return false;
}

// iz drveta na koji ukazuje pokazivač drvo brišemo reč w
Cvor* izbaci(Cvor* drvo, const string& w) {
  if (izbaci(drvo, w, 0))
    return nullptr;
  else
    return drvo;
}

// funkcija brise prefiksno drvo sa korenom koren
void obrisi(Cvor* koren) {
  if (koren != nullptr) {
    for (auto it : koren->grane)
      obrisi(it.second);
    delete koren;
  }
}

// program kojim testiramo gornje funkcije
int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);

  Cvor* koren = nullptr;
  int n;
  cin >> n;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    string naredba, niska;
    cin >> naredba >> niska >> ws;
    if (naredba == "ubaci")
      koren = ubaci(koren, niska);
    else if (naredba == "izbaci")
      koren = izbaci(koren, niska);
    else if (naredba == "trazi") {
      if (sadrzi(koren, niska))
        cout << "da" << "\n";
      else
        cout << "ne" << "\n";
```

```
    }
  }
  obrisi(koren);
  return 0;
}
```

У случају када је азбука мала (што је случај у овом задатку), пресликавање карактера у наредне чворове дрвета можемо чувати у низу (на местима карактера који немају наследнике чуваћемо `null` показиваче). Пошто је за брисање битно да знамо колико наследника има неки чвор, у чвору ћемо чувати и ту информацију. Функције за убацивање и претрагу дрвета једноставно можемо имплементирати и итеративно. Са друге стране, избацивање није једноставно имплементирати итеративно (јер је након брисања речи потребно вратити се уз дрво и обрисати све празне чворове, а немамо показиваче ка родитељским чворовима којима бисмо се једноставно могли враћати унатраг).

```
#include <iostream>
using namespace std;

// karaktere iz azbuke kodiramo brojevima
int kod(char c) {
  switch(c) {
  case 'c': return 0;
  case 't': return 1;
  case 'g': return 2;
  case 'a': return 3;
  }
  return -1;
}

// cvor prefiksnog drveta
struct Cvor
{
  Cvor* grane[4];
  int brojGrana;
  bool krajReci;
};

// kreira se novi, prazan cvor
Cvor* noviCvor() {
  Cvor* novi = new Cvor();
  fill(novi->grane, novi->grane+4, nullptr);
  novi->brojGrana = 0;
  novi->krajReci = false;
  return novi;
}

// ubacivanje reci str u prefiksno drvo sa korenom koren
```

```
// funkcija vraca novi koren drveta
Cvor* ubaci(Cvor* koren, const string& str) {
  if (koren == nullptr)
    koren = noviCvor();

  Cvor* cvor = koren;
  for (char c : str) {
    if (cvor->grane[kod(c)] == nullptr) {
      cvor->grane[kod(c)] = noviCvor();
      cvor->brojGrana++;
    }
    cvor = cvor->grane[kod(c)];
  }
  cvor->krajReci = true;

  return koren;
}

// provera da li prefiksno drvo sa korenom koren sadrzi rec str
bool sadrzi(Cvor* koren, const string& str) {
  if (koren == nullptr)
    return false;
  Cvor* cvor = koren;
  for (char c : str) {
    if (cvor->grane[kod(c)] == nullptr)
      return false;
    cvor = cvor->grane[kod(c)];
  }
  return cvor != nullptr && cvor->krajReci;
}


// funkcija izbacuje sufiks reci str od pozicije i iz drveta sa korenom koren
// funkcija vraca koren drveta nastalog nakon izbacivanja
Cvor* izbaci(Cvor* koren, const string& str, size_t i) {
  // ako je drvo vec prazno, nema sta da se izbacuje
  if (koren == nullptr)
    return koren;

  // ako smo dosli do kraja reci
  if (i == str.length())
    // rec brisemo tako sto oznacavamo da u tom cvoru vise nije kraj neke reci
    koren->krajReci = false;
  else {
    // ako postoji grana sa sa tekucim slovom reci
    if (koren->grane[kod(str[i])] != nullptr) {
      // brisemo ostatak te reci iz drveta
```

```
      Cvor* c = izbaci(koren->grane[kod(str[i])], str, i+1);
      // ako se tim brisanjem potpuno uklonio deo drveta ispod te grane
      // onda uklanjamo i tu granu
      if (c == nullptr)
        koren->brojGrana--;
      koren->grane[kod(str[i])] = c;
    }
  }

  // ako je nakon brisanja koren potpuno prazan
  if (!koren->krajReci && koren->brojGrana == 0) {
    // brisemo ga i vracamo null kao oznaku praznog stabla
    delete koren;
    return nullptr;
  } else
    // vracamo tekuci koren
    return koren;
}


// funkcija izbacuje rec str iz drveta sa korenom koren
// funkcija vraca koren drveta nastalog nakon izbacivanja
Cvor* izbaci(Cvor* cvor, const string& str) {
  return izbaci(cvor, str, 0);
}

// funkcija brise prefiksno drvo sa korenom koren
void obrisi(Cvor* koren) {
  if (koren != nullptr) {
    for (Cvor* c : koren->grane)
      obrisi(c);
    delete koren;
  }
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);

  Cvor* koren = nullptr;
  int n;
  cin >> n;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    string naredba, niska;
    cin >> naredba >> niska >> ws;
    if (naredba == "ubaci")
      koren = ubaci(koren, niska);
    else if (naredba == "izbaci")
```

```
      koren = izbaci(koren, niska);
    else if (naredba == "trazi") {
      if (sadrzi(koren, niska))
        cout << "da" << "\n";
      else
        cout << "ne" << "\n";
    }
  }
  obrisi(koren);
  return 0;
}
```

Задатак: Коректни телефони

Поставка: Низ телефонских бројева је коректан ако ниједан број није префикс другога (самим тим у њему не постоје ни два иста броја). Напиши програм који одређује да ли је низ унетих бројева коректан.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број бројева n ($1 \leq n \leq 50000$), затим у n наредних линија n бројева. Сваки број се састоји од између 3 и 50 цифара.

Излаз: На стандардни излаз исписати `da` ако је низ коректан тј. `ne` ако није.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
192	ne
194	
199342	
192865	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
199342	da
193865	
192	
194	

Решење: Једно могуће решење задатка је да се бројеви убаце у префиксно дрво. Приликом убацивања сваког новог броја проверавамо да ли је неки број у дрвету његов префикс и да ли је он префикс неког броја у дрвету. Једна могућа имплементација је она у којој се у сваком чвору дрвета чува асоцијативни низ (мапа тј. речник) који пресликава цифре у нове чворове дрвета.

```
#include <iostream>
#include <unordered_map>
using namespace std;

struct Cvor {
  unordered_map<char, Cvor*> grane;
};

Cvor* napravi(const string& s, size_t i) {
  if (i == s.size())
    return nullptr;
  Cvor* c = new Cvor();
  c->grane[s[i]] = napravi(s, i+1);
```

```
  return c;
}

bool ubaci(Cvor* cvor, const string& s, size_t i) {
  if (i == s.size() || cvor == nullptr)
    return false;
  auto it = cvor->grane.find(s[i]);
  if (it == cvor->grane.end()) {
    cvor->grane[s[i]] = napravi(s, i+1);
    return true;
  } else
    return ubaci(it->second, s, i+1);
}

void obrisi(Cvor* cvor) {
  if (cvor != nullptr) {
    for (auto it : cvor->grane)
      obrisi(it.second);
    delete cvor;
  }
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  int n;
  cin >> n;
  bool OK = true;
  string broj;
  cin >> broj;
  Cvor* koren = napravi(broj, 0);
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    cin >> broj;
    if (OK && !ubaci(koren, broj, 0))
      OK = false;
  }
  if (OK)
    cout << "da" << endl;
  else
    cout << "ne" << endl;
  obrisi(koren);

  return 0;
}
```

Још једна могућа имплементација префиксног дрвета је она у којој се у сваком чвору чува низ показивача ка наследницима, који има онолико елемената колика је величина азбуке (у овом задатку азбуку чине цифре, па чувамо 10 елементне низове). У сваком чвору тада морамо чувати и информацију о томе да ли се нека реч завршава у том

чвору.

```
#include <iostream>
using namespace std;

struct Cvor {
  Cvor* grane[10];
  bool krajReci;
};

Cvor* noviCvor() {
  Cvor* novi = new Cvor();
  fill(novi->grane, novi->grane+10, nullptr);
  novi->krajReci = false;
  return novi;
}

bool ubaci(Cvor* koren, const string& s) {
  Cvor* cvor = koren;
  bool OK = false;
  for (char c : s) {
    if (cvor->krajReci)
      return false;
    if (cvor->grane[c - '0'] == nullptr) {
      OK = true;
      cvor->grane[c - '0'] = noviCvor();
    }
    cvor = cvor->grane[c - '0'];
  }
  if (!OK)
    return false;
  cvor->krajReci = true;
  return true;
}

void obrisi(Cvor* cvor) {
  if (cvor != nullptr) {
    for (auto it : cvor->grane)
      obrisi(it);
    delete cvor;
  }
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  int n;
  cin >> n;
```

```
  Cvor* koren = noviCvor();
  bool OK = true;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    string broj;
    cin >> broj;
    if (OK && !ubaci(koren, broj))
      OK = false;
  }
  if (OK)
    cout << "da" << endl;
  else
    cout << "ne" << endl;
  obrisi(koren);

  return 0;
}
```

Задатак можемо решити и елементарније, тако што ћемо прво бројеве сортирати лексикографски, а затим ћемо проверити да ли се међу паровима узастопних бројева налази неки у коме је први број префикс другог.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<string> numbers(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> numbers[i];
  sort(begin(numbers), end(numbers));
  bool OK = true;
  for (size_t i = 1; i < numbers.size(); i++)
    if (numbers[i-1].size() <= numbers[i].size() &&
        equal(begin(numbers[i-1]), end(numbers[i-1]), begin(numbers[i]))) {
      OK = false;
      break;
    }
  if (OK)
    cout << "da" << endl;
  else
    cout << "ne" << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Днк префикси

Поставка: Напиши програм који омогућава унос генетских секвенци (ниски које се састоје само од карактера `a`, `c`, `t` и `g`) и који за сваку унету секвенцу исписује колико има секвенци којима је секвенца која се уноси префикс.

Улаз: Свака линија стандардног улаза садржи ниску која садржи највише 10000 карактера `a`, `c`, `t` или `g`.

Излаз: За сваку унету ниску исписати колико има раније унетих ниски којима је она префикс.

Пример

Улаз	*Излаз*
`tacg`	`0`
`tac`	`1`
`ta`	`2`
`ca`	`0`
`cat`	`0`

Решење: Задатак можемо решити коришћењем префиксног дрвета тако што ћемо у сваком чвору дрвета чувати број ниски којима је ниска представљена тим чвором префикс. Током убацивања ниске увећаваћемо бројач свих чворова кроз које се пролази током убацивања (то су сви њени префикси).

```
#include <iostream>

using namespace std;

// karaktere iz azbuke kodiramo brojevima
int kod(char c) {
  switch(c) {
  case 'c': return 0;
  case 't': return 1;
  case 'g': return 2;
  case 'a': return 3;
  }
  return -1;
}

// cvor prefiksnog drveta
struct Cvor
{
  Cvor* grane[4];
  int brojPrefiksa;
};

// kreira se novi, prazan cvor
Cvor* noviCvor() {
  Cvor* novi = new Cvor();
```

```
  fill(novi->grane, novi->grane+4, nullptr);
  novi->brojPrefiksa = 0;
  return novi;
}

// ubacivanje reci str u prefiksno drvo sa korenom koren
// funkcija vraca novi koren drveta
void ubaci(Cvor* koren, const string& str) {
  Cvor* cvor = koren;
  for (char c : str) {
    if (cvor->grane[kod(c)] == nullptr)
      cvor->grane[kod(c)] = noviCvor();
    cvor = cvor->grane[kod(c)];
    cvor->brojPrefiksa++;
  }
}

// ocitavanje broja reci u drvetu sa korenom koren koje za prefiks
// imaju rec str
int brojPrefiksa(Cvor* koren, const string& str) {
  Cvor* cvor = koren;
  for (char c : str) {
    if (cvor->grane[kod(c)] == nullptr)
      return 0;
    cvor = cvor->grane[kod(c)];
  }
  if (cvor == nullptr)
    return 0;
  return cvor->brojPrefiksa;
}

// brise drvo sa korenom koren
void obrisi(Cvor* koren) {
  if (koren != nullptr) {
    for (Cvor* c : koren->grane)
      obrisi(c);
    delete koren;
  }
}


int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);
  // prefiksno drvo u kome se cuvaju ucitane niske i broje prefiksi
  Cvor* drvo = noviCvor();
  // ucitavamo jednu po jednu nisku do kraja ulaza
  string niska;
```

```
  while (cin >> niska) {
    // ispisujemo broj niski u drvetu kojima je tekuca niska prefiks
    cout << brojPrefiksa(drvo, niska) << '\n';
    // ubacujemo novu nisku u drvo
    ubaci(drvo, niska);
  }
  // brisemo prefiksno drvo
  obrisi(drvo);
  return 0;
}
```

Још једна могућност је да се учитане ниске смештају у мултискуп (сортиран лексикографски). Број ниски које за префикс имају дату ниску s се може ефикасно одредити тако што се пронађе прва ниска у мултискупу која је лексикографски већа или једнака s и затим се итерира редом кроз ниске све док им је ниска s префикс.

```
#include <iostream>
#include <set>

using namespace std;

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);
  multiset<string> niske;
  string niska;
  while (cin >> niska) {
    auto it = niske.lower_bound(niska);
    int broj = 0;
    while (it != niske.end() && it->compare(0, niska.size(), niska) == 0) {
      broj++;
      it++;
    }
    cout << broj << '\n';
    niske.insert(niska);
  }
  return 0;
}
```

Задатак: Различите подниске

Поставка: Напиши програм који одређује колико различитих подниски има дата ниска.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси ниска дужине највише 5000 карактера, која се састоји само од малих слова `a`, `b`, `c` и `d`.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени број различитих подниски

Пример

Улаз	*Излаз*
ababa	10

Објашњење

Различите подниске су "", "a", "ab", "aba", "abab", "ababa", "b", "ba", , "bab" и "baba".

Решење: Задатак можемо решити тако што одржавамо скуп који ће садржати све подниске учитане ниске. Све подниске лако можемо набројати коришћењем угнежђених петљи. Број подниски је квадратни тј. $O(n)$. Уметање у скуп који садржи n елемената може реализовати у сложености $O(\log n)$ ако се користи балнсирано дрво, међутим, не треба занемарити да се приликом уметања пореде дугачке ниске, што може бити скупа операција (сложености $O(n)$), па уметање ниске може захтевати $O(n \log n)$ корака. Укупна временска сложеност је $O(n^3 \log n)$. Ако је скуп реализован у облику хеш-мапе, тада можемо очекивати да ће унос у просеку захтевати константно време, али је време потребно за израчунавање хеш вредности дугачких ниски незанемарив фактор и линеарно зависи од дужине ниске, па се и у овом случају може очекивати укупна сложеност $O(n^3)$. Већи проблем је заузеће меморије које је $O(n^3)$.

```
#include <iostream>
#include <set>

using namespace std;

int main() {
  string s;
  cin >> s;
  set<string> podniske;
  podniske.insert("");
  for (size_t i = 0; i < s.length(); i++)
    for (size_t duzina = 1; duzina <= s.length() - i; duzina++)
      podniske.insert(s.substr(i, duzina));
  cout << podniske.size() << endl;
  return 0;
}
```

Сваки чвор у префиксном дрвету представља префикс неке од убачених ниски, при чему се заједнички префикси деле између свих убачених ниски. Зато је укупан број чворова у дрвету једнак укупном броју различитих префикса свих убачених подниски. Свака подниска неке ниске је префикс неког њеног суфикса. Стога задатак можемо решити тако што у префиксно дрво убацимо све суфиксе учитане ниске, а затим пребројимо чворове дрвета.

Уметање ниске дужине m у дрво је сложености (m). Дужине суфикса су редом од 1 до n, па је укупно време потребно за формирање дрвета $O(n^2)$. Одређивање броја чворова дрвета је линеарна у односу на тај број чворова, па пошто њих може бити $O(n^2)$, укупна и временска и меморијска сложеност овог приступа је $O(n^2)$.

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
```

```
using namespace std;

const int BROJ_SLOVA_AZBUKE = 4;

struct Cvor {
  Cvor* grane[BROJ_SLOVA_AZBUKE];
};

Cvor* noviCvor() {
  Cvor* novi = new Cvor();
  fill(novi->grane, novi->grane + BROJ_SLOVA_AZBUKE, nullptr);
  return novi;
}

void ubaci(Cvor* koren, const string& str, size_t i) {
  Cvor* cvor = koren;
  while (i < str.length()) {
    if (cvor->grane[str[i] - 'a'] == nullptr)
      cvor->grane[str[i] - 'a'] = noviCvor();
    cvor = cvor->grane[str[i] - 'a'];
    i++;
  }
}

int brojCvorova(Cvor* koren) {
  if (koren == nullptr)
    return 0;

  int broj = 1;
  for (int i = 0; i < BROJ_SLOVA_AZBUKE; i++)
    broj += brojCvorova(koren->grane[i]);

  return broj;
}

void obrisi(Cvor* koren) {
  if (koren != nullptr) {
    for (int i = 0; i < BROJ_SLOVA_AZBUKE; i++)
      obrisi(koren->grane[i]);
    delete koren;
  }
}

int main() {
  string s;
  cin >> s;
```

```
  Cvor* koren = noviCvor();
  for (size_t i = 0; i < s.length(); i++)
    ubaci(koren, s, i);
  cout << brojCvorova(koren) << endl;
  obrisi(koren);
  return 0;
}
```

Задатак: Пар који даје највећи XOR

Поставка: Напиши програм који међу унетим природним бројевима одређује онај пар који даје највећи резултат при операцији ексклузивне дисјункције (xor).

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број n ($1 \leq n \leq 100000$), а затим n природних бројева између 0 и 10^{18}, сваки у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати максималну вредност која се може добити када се операција ексклузивне дисјункције примени на нека два унета броја.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 1 2 3 4 5	7

Објашњење

Највећи резултат 7 добија се ексклузивном дисјункцијом бројева 3 и 4 (њихови бинарни записи су `00...0000011` и `000...000100`). Исти резултат добија се и ексклузивном дисјункцијом бројева 2 и 5 (њихови бинарни записи су `0000..0000101` и `0000...00000010`).

Решење: Решење грубом силом подразумева да се на сваки пар бројева примени операција XOR и да се испише максимум добијених резултата. Сложеност овог приступа је $O(n^2)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

typedef unsigned long long ull;

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<ull> brojevi(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
```

```
    cin >> brojevi[i];
  ull max = 0;
  for (int i = 1; i < n; i++)
    for (int j = 0; j < i; j++)
      if ((brojevi[i] ^ brojevi[j]) > max)
        max = brojevi[i] ^ brojevi[j];
  cout << max << endl;
  return 0;
}
```

Ефикасније решење можемо добити применом структура података. Покушајмо да за сваки нови унети број ефикасно израчунамо највећи број који се може добити применом операције XOR на њега и неки од претходно унетих бројева (у решењу грубом силом, то се дешава у унутрашњој петљи). Покушајмо да тај број одредимо бит-по-бит и то кренувши од битова највеће тежине. На месту бита највеће тежине можемо добити 1 ако текући број почиње битом 0 и међу раније учитаним бројевима постоји неки који почиње битом 1 или ако текући број почиње битом 1 и међу раније учитаним бројевима постсоји неки који почиње битом 0. У супротном на месту највеће тежине резултата мора бити бит 0. Након одређивања првог бита, одређујемо наредни, али у случају да смо на водеће место резултата уписали 1, међу учитаним нискама задржавамо само оне које су на водећем месту имали бит супротан бит водећем биту текућег броја (у случају да смо на водеће место резултата уписали 0, тада су сви раније учитани бројеви почињали истим битом којим почиње текући број и сви се задржавају). Поступак сада понављамо за други бит, при чему разматрамо само ниске које нису раније одбачене. На пример, ако су дати бројеви

```
1001
1010
0110
```

и ако је текући број

```
0010
```

На водеће место резултата можемо уписати 1, при чему задржавамо ниске

```
1001
1010
```

На друго место резултата морамо уписати 0, јер све задржане ниске на месту другог бита имају 0, исто као и текући број. Обе ниске се задржавају.

На треће место резултата можемо уписати 1 и тада задржавамо само ниску

```
1001
```

На крају, на последње место резултата можемо уписати 1. Коначан резултат је, дакле, `1011` и он се добија применом операције XOR на ниске `0010` и `1001`.

Претрагу можемо веома једноставно организовати ако све учитане бинарне записе упишемо у префиксно дрво. У сваком нивоу дрвета одлучујемо се за један бит и спуштањем на наредни ниво елиминишемо све оне ниске које на одговарајућем месту немају тај бит. Ако у текућем кораку постоји грана обележена битом супротном од

текућег бита тренутног броја, спуштамо се њоме и у резултат уписујемо јединицу, док се у супротном спуштамо граном на којој се налази бит једнак текућем биту тренутног броја и у резултат уписујемо нулу.

Сложеност овог алгоритма је $O(n)$, при чему је константа једнака броју битова којима се записују бројеви (с обзиром на ограничења дата у задатку, то је 64).

```
#include <iostream>

using namespace std;

typedef unsigned long long ull;

struct Cvor {
  Cvor* grane[2];
};

Cvor* noviCvor() {
  Cvor* novi = new Cvor();
  novi->grane[0] = novi->grane[1] = nullptr;
  return novi;
}

void ubaci(Cvor* koren, ull broj) {
  Cvor* cvor = koren;
  ull mask = 1ull << (8*sizeof(ull) - 1);
  while (mask != 0) {
    int bit = (broj & mask) != 0;
    if (cvor->grane[bit] == nullptr)
      cvor->grane[bit] = noviCvor();
    cvor = cvor->grane[bit];
    mask >>= 1;
  }
}

ull maxXOR(Cvor* koren, ull broj) {
  Cvor* cvor = koren;
  ull rez = 0;
  ull mask = 1ull << (8*sizeof(ull) - 1);
  while (mask != 0) {
    int bit = (broj & mask) != 0;
    if (cvor->grane[!bit] != nullptr) {
      rez = rez | mask;
      cvor = cvor->grane[!bit];
    } else
      cvor = cvor->grane[bit];
    mask >>= 1;
  }
```

```
  return rez;
}

void obrisi(Cvor* koren) {
  if (koren != nullptr) {
    obrisi(koren->grane[0]);
    obrisi(koren->grane[1]);
    delete koren;
  }
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  unsigned long long x;
  cin >> x;
  Cvor* koren = noviCvor();
  ubaci(koren, x);
  unsigned long long max = 0;
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    cin >> x;
    unsigned long long rez = maxXOR(koren, x);
    if (rez > max)
      max = rez;
    ubaci(koren, x);
  }
  cout << max << endl;
  obrisi(koren);
  return 0;
}
```

Задатак: Највећи XOR сегмента

Поставка: Напиши програм који у низу природних бројева одређује највећи број који се може добити операцијом ексклузивне дисјункције примењене на неки непразни сегмент (подниз узастопних елемената) тог низа.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број елемената низа n ($1 \leq n \leq 100000$), а затим из n наредних редова по један природни број између 1 и 10^{18}.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражену максималну вредност ексклузивне дисјункције неког непразног сегмента низа.

Пример

Улаз	*Излаз*
`n`	`54`
`10`	
`20`	
`30`	
`40`	
`50`	

Објашњење

Максимална вредност се постиже за двочлани сегмент `30 40` (бинарни записи ових бројева су `...011110` и `...101000`, а резултата је `...110110`).

Решење: Решење грубом силом подразумева да се за сваки сегмент израчуна вредност ексклузивне дисјункције. Сегменте можемо набрајати угнежђеним петљама где се у спољној петљи мења леви, а у унутрашњој петљи десни крај сегмента. На тај начин се сегменти проширују једним по једним елементом, па вредност ексклузивне дисјункције њихових елемената можемо израчунавати инкрементално. Сложеност оваквог алгоритма је $O(n^2)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

typedef unsigned long long ull;

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  ull x;
  cin >> x;
  ull xorPrefiksa = x;
  vector<ull> xoroviPrefiksa(n);
  xoroviPrefiksa[0] = xorPrefiksa;
  ull maksSegmenta = xorPrefiksa;
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    cin >> x;
    xorPrefiksa = xorPrefiksa ^ x;
    maksSegmenta = max(maksSegmenta, xorPrefiksa);
    for (int j = 0; j < i; j++)
      maksSegmenta = max(maksSegmenta, xorPrefiksa ^ xoroviPrefiksa[j]);
    xoroviPrefiksa[i] = xorPrefiksa;
  }
  cout << maksSegmenta << endl;
  return 0;
}
```

Задатак можемо ефикасније решити коришћењем технике сличне техници изражава-

ња збира сегмента као разлике два збира префикса. Наиме, важи да је

$$\bigoplus_{k=i}^{j} a_k = \bigoplus_{k=0}^{j} a_k \oplus \bigoplus_{k=0}^{i-1} a_k$$

Зато у програму можемо одржавати низ свих досадашњих вредности ексклузивних дисјункција префикса низа. Приликом анализе наредног елемента одређујемо ексклузивну дисјункцију префикса који се њиме завршава (то можемо урадити инкрементално, јер већ знамо ексклузивну дисјункцију елемената претходног префикса). Поредимо ту вредност са тренутним максимумом, а затим из њега изузимамо један по један елемент са почетка и упоређујемо тако добијене вредности са тренутним максимумом (наравно, ажурирамо максимум кад год је то потребно). На крају вредност тренутног префикса додајемо у низ вредности претходних префикса и прелазимо на наредни елемент, све док не обрадимо све елементе низа.

Пошто анализирамо n елемената низа и пошто приликом анализе сваког елемента анализирамо све претходне префиксе, сложеност овог приступа је (n^2).

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

typedef unsigned long long ull;

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<ull> brojevi(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> brojevi[i];
  ull maksSegmenta = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    ull xorSegmenta = brojevi[i];
    if (xorSegmenta > maksSegmenta)
      maksSegmenta = xorSegmenta;
    for (int j = i+1; j < n; j++) {
      xorSegmenta = xorSegmenta ^ brojevi[j];
      if (xorSegmenta > maksSegmenta)
        maksSegmenta = xorSegmenta;
    }
  }
  cout << maksSegmenta << endl;
  return 0;
}
```

Основни корак претходног алгоритма је да се за дату вредност текућег префикса пронађе онај претходни префикс који са датим даје највећу вредност XOR-а. У задатку Пар који даје највећи XOR видели смо да се тај проблем веома ефикасно може реши-

ти помоћу префиксног дрвета. На тај начин избегавамо унутрашњу петљу којом се анализира један по један префикс и укупну сложеност снижавамо на $O(n)$, при чему је константни фактор уз n једнак броју битова потребних за запис бројева.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

typedef unsigned long long ull;

struct Cvor {
  Cvor* grane[2];
};

Cvor* noviCvor() {
  Cvor* novi = new Cvor();
  novi->grane[0] = novi->grane[1] = nullptr;
  return novi;
}

void ubaci(Cvor* koren, ull broj) {
  Cvor* cvor = koren;
  ull mask = 1ull << (8*sizeof(ull) - 1);
  while (mask != 0) {
    int bit = (broj & mask) != 0;
    if (cvor->grane[bit] == nullptr)
      cvor->grane[bit] = noviCvor();
    cvor = cvor->grane[bit];
    mask >>= 1;
  }
}

ull maxXOR(Cvor* koren, ull broj) {
  Cvor* cvor = koren;
  ull rez = 0;
  ull mask = 1ull << (8*sizeof(ull) - 1);
  while (mask != 0) {
    int bit = (broj & mask) != 0;
    if (cvor->grane[!bit] != nullptr) {
      rez = rez | mask;
      cvor = cvor->grane[!bit];
    } else
      cvor = cvor->grane[bit];
    mask >>= 1;
  }
  return rez;
```

```
}

void obrisi(Cvor* koren) {
  if (koren != nullptr) {
    obrisi(koren->grane[0]);
    obrisi(koren->grane[1]);
    delete koren;
  }
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  ull x;
  cin >> x;
  ull xorPrefiksa = x;
  Cvor* koren = noviCvor();
  ubaci(koren, xorPrefiksa);
  ull maxSegmenta = xorPrefiksa;
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    ull x;
    cin >> x;
    xorPrefiksa = xorPrefiksa ^ x;
    maxSegmenta = max(maxSegmenta, xorPrefiksa);
    maxSegmenta = max(maxSegmenta, maxXOR(koren, xorPrefiksa));
    ubaci(koren, xorPrefiksa);
  }
  cout << maxSegmenta << endl;
  obrisi(koren);
  return 0;
}
```

Задатак: Најдужи заједнички префикс

Поставка: За дати скуп (речник) од n речи пронаћи најдужи заједнички префикс за све речи. Треба пронаћи најдужу ниску која је префикс свакој речи у скупу (речнику).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број n. Након тога се у наредних n линија уноси по једна реч (ниска).

Излаз: На стандардни излаз исписати ниску која представља најдужи заједнички префикс свих речи из скупа (речника).

Пример

Улаз	*Излаз*
6 ana anamarija anastasija anakonda analiza anatomija	ana

Решење: Једна идеја би могла да буде да се све речи које треба да постоје у речнику (које се учитавају) буду смештене у префиксно стабло. Најдужи заједнички префикс се након тога може наћи кретањем кроз префиксно стабло све док чвор који разматрамо има само једног потомка. Док год постоји један једини потомак за чворове на неком путу, то значи да све речи из речника почињу баш том секвенцом. Прво гранање на које наиђемо ће означити да је бар једна од речи имала различито наредно слово у односу на остале и ту престаје да "постоји" најдужи заједнички префикс за све речи.

Друга могућа идеја би била да узмемо цео речник (вектор речи) и пронађемо префикс за прве 2 речи (једноставним проласком кроз обе речи док год имају исте карактере). Након тога пролазимо кроз преосталих $n-2$ речи и тражимо префикс дотадашњег најдужег префикса и сваке од преосталих речи из речника. На овај начин "скраћујемо" префикс док он не постане најдужи могући префикс за све речи из речника.

```
#include <iostream>
#include <unordered_map>
#include <string>
#include <vector>

struct Node
{
  bool is_leaf;
  std::unordered_map<char, Node *> nodes;
};

void initialize_node(Node *n)
{
  n->is_leaf = false;
}

void add_word(Node *root, std::string &word, size_t i)
{
  if (i == word.size()) {
    root->is_leaf = true;
    return ;
  }

  auto iterator = root->nodes.find(word[i]);
```

```
  if (iterator == root->nodes.end()) {
    root->nodes[word[i]] = new Node();
    initialize_node(root->nodes[word[i]]);
  }

  add_word(root->nodes[word[i]], word, i + 1);
}

void longest_common_prefix(Node *root, std::string &LCP)
{
  while(root && !root->is_leaf && root->nodes.size() == 1) {

    auto element = root->nodes.begin();

    LCP += element->first;

    root = element->second;
  }
}

int main ()
{
  int n;

  std::cin >> n;

  std::vector<std::string> words(n);

  Node *root = new Node();
  initialize_node(root);

  for (int i = 0; i < n; i++)
    std::cin >> words[i];

  for (std::string &s : words)
    add_word(root, s, 0);

  std::string lcp = "";

  longest_common_prefix(root, lcp);

  std::cout << lcp << std::endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Реч која се јавља највећи број пута

Поставка: За дати скуп (речник) од n речи пронаћи ону реч која се јавља највећи број пута.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број n. Након тога се у наредних n линија уноси по једна реч.

Излаз: На стандардни излаз исписати реч која се јавља највећи број пута у датом скупу (речнику) речи.

Пример

Улаз	*Излаз*
6 ana aleksandra ivana ivana ana aleksandra	aleksandra

Решење: Једно решење би могло да ради тако што бисмо све речи смештали у префиксно стабло. Сваки чвор би уместо тога да ли је лист заправо чувао реч која се завршава у чвору (иницијално је реч у сваком чвору празна, па бисмо на основу тога што реч није више празна знали да се у чвору завршава реч) као и бројач који каже колико се пута та реч јавила у речнику. Приликом убацивања можемо увек да памтимо максималан број појављивања неке речи као и која се то реч јавила највише пута. Треба обратити пажњу да уколико постоји више речи које се јављају највећи број пута треба исписати лексикографски најмању од њих, из тог разлога је услов који постављамо када поредимо број појављивања тренутне речи са дотадашњим максимумом строга неједнакост ($>$) а не $>=$.

Друго решење би могло да користи мапу која би била облика реч : број појављивања. Сваки пут кад се реч јави у речнику број појављивања те речи се увећава за 1. Проласком кроз мапу тражимо реч која се јавила највећи број пута. Као и код претходног решења треба обратити пажњу на строгу неједнакост.

```
#include <iostream>
#include <map>
#include <string>
#include <vector>

struct Node
{
  std::string word;
  int count;
  std::map<char, Node *> nodes;
};

void initialize_node(Node *n)
```

```
{
  n->word = "";
  n->count = 0;
}

void add_word(Node *root, std::string &word, size_t i)
{
  if (i == word.size()) {
    root->count++;
    root->word = word;
    return ;
  }

  auto iterator = root->nodes.find(word[i]);

  if (iterator == root->nodes.end()) {
    root->nodes[word[i]] = new Node();
    initialize_node(root->nodes[word[i]]);
  }

  add_word(root->nodes[word[i]], word, i + 1);
}

void find_max_occuring_word(Node *root, std::string &max_occuring_word, int &max)
{
  if (root->word != "") {
    if (root->count > max) {
      max = root->count;
      max_occuring_word = root->word;
    }
  }

  auto begin = root->nodes.begin();
  auto end = root->nodes.end();

  while (begin != end)
  {
    find_max_occuring_word(begin->second, max_occuring_word, max);
    begin++;
  }
}

int main ()
{
  int n;

  std::cin >> n;
```

```
  std::string s;

  Node *root = new Node();
  initialize_node(root);

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    std::cin >> s;
    add_word(root, s, 0);
  }

  std::string most_occurences_word = "";

  int max = 0;

  find_max_occuring_word(root, most_occurences_word, max);

  std::cout << most_occurences_word << std::endl;

  return 0;
}
```

Структура података за представљање дисјунктних подскупова (union-find)

Понекад је потребно одржавати у програму неколико дисјунктних подскупова одређеног скупа, при чему је моћи за дати елемент ефикасно пронаћи ком скупу припада (ова операција се зове `find`) и ефикасно спојити два задата подскупа у нови, већи подскуп (ту операцију називамо `union`). Помоћу операције `find` лако можемо за два елемента проверити да ли припадају истом подскупу тако што за сваки од њих пронађемо ознаку подскупа и проверимо да ли су оне једнаке.

Једна могућа имплементација је да се одржава пресликавање свако еллемента у ознаку подскупа којем припада. Ако претпоставимо да су сви елементи нумерисали бројевима од 0 до $n-1$, онда ово пресликавање можемо реализовати помоћу обичног низа где се на позицији сваког елемента налази ознака подскупа којем он припада (ако елементи нису нумерисани бројевима, могли бисмо користити мапу уместо низа). Операција `find` је тада тривијална (само се из низа прочита ознака подскупа) и сложеност јој је $O(1)$. Операција `union` је много спорија, јер захтева да се ознаке свих елемената једног подскупа промене у ознаке другог, што захтева да се прође кроз читав низ и сложености је $O(n)$.

```
int id[MAX_N];
int n;

void inicijalizuj() {
```

```
  for (int i = 0; i < n; i++)
    id[i] = i;
}

int predstavnik(int x) {
   return id[x];
}

int u_istom_podskupu(int x, int y) {
  return predstavnik(x) == predstavnik(y);
}

void unija(int x, int y) {
  int idx = id[x], idy = id[y];
  for (int i = 0; i < n; i++)
    if (id[i] == idx)
      id[i] = idy;
}
```

Кључна идеја је да елементе не пресликавамо у ознаке подскупова, већ да поскупове чувамо у облику дрвета тако да сваки елемент сликамо у његовог родитеља у дрвету. Корене дрвета ћемо сликати саме у себе и сматрати их ознакама подскупова. Дакле, да бисмо на основу произвољног елемента сазнали ознаку подскупа ком припада, потребно је да прођемо кроз низ родитеља све док не стигнемо до корена. Нагласимо да су у овим дрветима показивачи усмерени од деце ка родитељима, за разлику од класичних дрвета где показивачи указују од родитеља ка деци.

Унију можемо вршити тако што корен једног подскупа усмеримо ка корену другог.

Први алгоритам одговара ситуацији у којој особа која промени адреду обавештава све друге особе о својој новој адреси. Други одговара ситуацији у којој само на старој адреси оставља информацију о својој новој адреси. Ово, наравно, мало успорава доставу поште, јер се мора прећи кроз низ преусмеравања, али ако тај низ није предугачак, може бити значајно ефикаснији од првог приступа.

```
int roditelj[MAX_N];
int n;

void inicijalizuj() {
  for (int i = 0; i < n; i++)
    roditelj[i] = i;
}

int predstavnik(int x) {
  while (roditelj[x] != x)
    x = roditelj[x];
  return x;
}
```

```
void unija(int x, int y) {
  int fx = predstavnik(x), fy = predstavnik(y);
  roditelj[fx] = fy;
}
```

Сложеност претходног приступа зависи од тога колико су дрвета којима се представљају подскупови уравнотежена. У најгорем случају се она могу издегенерирати у листу и тада је сложеност сваке од операција $O(n)$. Илуструјмо ово једним примером.

```
0  1  2  3  4  5  6  7

unija 7 6

0  1  2  3  4  5  6  6

unija 6 5

0  1  2  3  4  5  5  6

unija 5 4

0  1  2  3  4  4  5  6

unija 4 3

0  1  2  3  3  4  5  6

unija 3 2

0  1  2  2  3  4  5  6

unija 2 1

0  1  1  2  3  4  5  6

unija 1 0

0  0  1  2  3  4  5  6
```

Упит којим се тражи представник скупа којем припада елемент 7 се реализује низом корака којима се прелази преко следећих елемената 7,6,5,4,3,2,1,0. Иако се ово чини горим од претходног приступа, где је бар проналажење подскупа коштало $O(1)$ када су дрвета уравнотежена, тада је сложеност сваке од операција $O(\log n)$ и централни задатак да би се на овој идеји изградила ефикасна структура података је да се на неки начин обезбеди да дрвета остану уравнотежена. Кључна идеја је да се приликом измена (а она се врше само у склопу операције уније), ако је могуће, обезбеди да се висина дрвета којим се представља унија не повећа у односу на висине појединачних дрвета која представљају скупове који се уније (висину можемо дефинисати као број грана на путањи од тог чвора до њему најудаљенијег листа). Приликом прављења уније,

имамо слободу избора корена ког ћемо усмерити ка другом корену. Ако се увек изабере да корен плићег дрвета усмеравамо ка дубљем, тада ће се висина уније повећавати само ако су оба дрвета кој унирамо исте висине. Висину дрвета можемо одржавати у посебном низу који ћемо из разлога који ће бити касније објашњени назвати `rang`.

```
int roditelj[MAX_N];
int n;
int rang[MAX_N];

void inicijalizuj() {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    roditelj[i] = i;
    rang[i] = 0;
  }
}

int predstavnik(int x) {
  while (roditelj[x] != x)
    x = roditelj[x];
  return x;
}

void unija(int x, int y) {
  int fx = predstavnik(x), fy = predstavnik(y);
  if (rang[fx] < rang[fy])
     roditelj[fx] = fy;
  else if (rang[fy] < rang[fx])
     roditelj[fy] = fx;
  else {
     roditelj[fx] = fy;
     rang[fy]++;
  }
}
```

Покажимо рад алгоритма на једном примеру. Подскупове ћемо представљати дрветима.

```
1  2  3  4  5  6  7  8

unija 1 2

1  3  4  5  6  7  8
2

unija 6 7

1  3  4  5  6  8
2           7
```

```
unija 4 7

1  3  5     6    8
2         4   7

unija 5 8

1  3    6     8
2     4   7   5

unija 1 3

  1       6     8
2   3   4   7   5

unija 5 4

  1        6
2   3   4  7  8
              5

unija 3 7

       6
  1  4  7  8
2   3      5
```

Докажимо индукцијом да се у дрвету чији је корен на висини h налази бар 2^h чворова. База је почетни случај у коме је сваки чвор свој представник. Висина свих чворова је тада нула и сва дрвета имају $2^0 = 1$ чвор. Покажимо да свака унија одржава ову инваријанту. По индуктивној хипотези претпостављамо да оба дрвета која представљају подскупове који се уније имају висине h_1 и h_2 и бар 2^{h_1} и 2^{h_2} чворова. Уколико се унирањем висина не повећа, инваријанта је очувана јер се број чворова повећао. Једини случај када се повећава висина уније је када је $h_1 = h_2$ и тада обједињено дрво има висину $h = h_1 + 1 = h_2 + 1$ и бар $2^{h_1} + 2^{h_2} = 2^h$ чворова. Тиме је тврђење доказано. Дакле, сложеност сваке операције проналаска представника у скупу од n чворова је $O(\log n)$, а пошто унирање након проналажења представника врши још само $O(1)$ операција, и сложеност налажења уније је $O(\log n)$.

Рецимо и да је уместо висине могуће одржавати број чворова у сваком од подскупова. Ако увек усмеравамо представника мањег ка представнику већег подскупа, поново ћемо добити логаритамску сложеност најгорег случаја за обе операције. Ово важи зато што и овај начин прављења уније гарантује да не можемо имати високо дрво са малим бројем чворова. Да би се добило дрво висине 1, потребна су најмање два чвора; да би се добило дрво висине 2 најмање четири чвора (јер се спајају два дрвета висине 1 која имају бар по два чвора). Да би се добило дрво висине h потребно је најмање 2^h чворова. Одавде следи да ће висине свих дрвета у овој структури бити висине $O(\log n)$.

Иако је ова сложеност сасвим прихватљива (сложеност проналажења n унија је $O(n \log n)$), може се додатно побољшати врло једноставном техником познатом као *компресија путање*. Наиме, приликом проналажења представника можемо све чворове кроз које пролазимо усмерити према корену. Један начин да се то постигне је да се након проналажења корена, поново прође кроз низ родитеља и сви показивачи усмере према корену.

```
int predstavnik(int x) {
  int koren = x;
  while (koren != roditelj[koren])
    koren = roditelj[koren];
  while (x != koren) {
    int tmp = roditelj[x];
    roditelj[x] = koren;
    x = tmp;
  }
  return koren;
}
```

За све чворове који се обилазе од полазног чвора до корена, дужине путања до корена се након овога смањују на 1, међутим, као што примећујемо, низ рангова се не мења. Ако рангове тумачимо као број чворова у подскупу, онда се приликом компресије путање та статистика и не мења, па је поступак коректан. Ако рангове тумачимо као висине, јасно је да приликом компресије путање низ висина постаје неажуран. Међутим, интересантно је да ни у овом случају нема потребе да се он ажурира. Наиме, бројеви који се сада чувају у том низу не представљају више висине чворова, већ горње границе висина чворова. Ови бројеви се надаље сматрају ранговима чворова, тј. помоћним подацима који нам помажу да преусмеримо чвовове приликом унирања. Показује се да се овим не нарушава сложеност најгорег случаја и да функција наставља коректно да ради.

У претходној имплементацији се два пута пролази кроз путању од чвора до корена. Ипак, сличне перформансе се могу добити и само у једном пролазу. Постоје два начина на који се ово може урадити: један од њих је да се сваки чвор усмери ка родитељу свог родитеља. За све чворове који се обилазе од полазног чвора до корена, дужине путања до корена се након овога смањују двоструко, што је довољно за одличне перформансе.

```
int predstavnik(int x) {
  while (x != roditelj[x]) {
    tmp = roditelj[x];
    roditelj[x] = roditelj[roditelj[x]];
    x = tmp;
  }
  return x;
}
```

Други начин подразумева да се приликом проласка од чвора ка корену сваки други чвор на путањи усмери ка родитељу свог родитеља.

```
int predstavnik(int x) {
  while (x != roditelj[x]) {
    roditelj[x] = roditelj[roditelj[x]];
    x = roditelj[x];
  }
  return x;
}
```

Приметимо да је овим додата само једна линија кода у првобитну имплементацију. Овом једноставном променом амортизована сложеност операција постаје само $O(\alpha(n))$, где је $\alpha(n)$ инверзна Акерманова функција која страшно споро расте. За било који број n који је мањи од броја атома у целом универзуму важи да је $\alpha(n) < 5$, тако да је време практично константно.

Задатак: Први пут кроз матрицу

Поставка: Логичка матрица димензије $n \times n$ у почетку садржи све нуле. Након тога се насумично додаје једна по једна јединица. Кретање по матрици је могуће само по јединицама и то само на доле, на горе, на десно и на лево. Написати програм који учитава димензију матрице, а затим позицију једне по једне јединице и одређује након колико њих је први пут могуће сићи од врха до дна матрице (са произвољног поља прве врсте до произвољног поља последње врсте матрице).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава димензија матрице $1 \leq n \leq 200$, затим број поља m ($1 \leq m \leq n^2$) у које се уписује јединица, а затим у наредних m редова координате тих поља (број врсте и број колоне од 0 до $n-1$, раздвојени размаком).

Излаз: На стандардни излаз исписати број x. x је редни број јединице након чијег уноса је први пут могуће сићи од врха до дна матрице.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 9 0 0 0 1 1 1 3 3 1 3 2 0 3 0 2 1 2 2	8

Објашњење

После 8 учитаних поља, матрица постаје

```
1100
0101
```

```
1100
1001
```

и врх и дно постају спојени.

Решење: Основна идеја је да се формирају сви подскупови елемената између којих постоји пут (они формирају тзв. компоненте повезаности). Сваки пут када се успостави веза између нека два елемента таква два подскупа, подскупови се спајају. Провера да ли постоји пут између два елемента своди се онда на проверу да ли они припадају истом подскупу.

Путања од врха до дна постоји ако постоји путања од било ког елемента у првој врсти матрице до било ког елемента у дну матрице. То би довело до тога да у сваком кораку морамо да проверавамо све парове елемената из горње и доње врсте. Међутим, можемо и боље. Додаћемо вештачки почетни чвор (назовимо га извор) и спојићемо га са свим чворовима у првој врсти матрице и завршни чвор (назовимо га ушће) и спојићемо га са свим чворовима у последњој врсти матрице. Тада се у сваком кораку само може проверити да ли су извор и ушће спојени тј. да ли припадају истом подскупу.

Подскупове можемо чувати помоћу структуре података за представљање дисјунктних подскупова (енгл. union-find).

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

vector<int> UF_roditelj;
vector<int> UF_rang;

void UF_inicijalizacija(int n) {
  UF_roditelj.resize(n);
  UF_rang.resize(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    UF_roditelj[i] = i;
    UF_rang[i] = 0;
  }
}

int UF_predstavnik(int x) {
  while (x != UF_roditelj[x]) {
    UF_roditelj[x] = UF_roditelj[UF_roditelj[x]];
    x = UF_roditelj[x];
  }
  return x;
}

void UF_unija(int x, int y) {
  int fx = UF_predstavnik(x), fy = UF_predstavnik(y);
  if (UF_rang[fx] < UF_rang[fy])
```

```
    UF_roditelj[fx] = fy;
  else if (UF_rang[fy] < UF_rang[fx])
    UF_roditelj[fy] = fx;
  else {
    UF_roditelj[fx] = fy;
    UF_rang[fy]++;
  }
}

// redni broj elementa (x, y) u matrici
int kod(int x, int y, int n) {
  return x*n + y;
}

int main() {
  // dimenzija matrice
  int n;
  cin >> n;

  // alociramo matricu n*n
  vector<vector<bool>> a(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    a[i].resize(n, false);

  // dva dodatna veštačka čvora
  const int izvor = n*n;
  const int usce = n*n+1;

  // inicijalizujemo union-find strukturu za sve elemente matrice
  // (njih n*n), izvor i ušće
  UF_inicijalizacija(n*n + 2);

  // spajamo izvor sa svim elementima u prvoj vrsti matrice
  for (int i = 0; i < n; i++)
    UF_unija(izvor, kod(0, i, n));

  // spajamo sve elemente u poslednjoj vrsti matrice sa ušćem
  for (int i = 0; i < n; i++)
    UF_unija(kod(n-1, i, n), usce);

  // broj jedinica
  int m;
  cin >> m;

  // korak u kom se spajaju izvor i usce
  int korak = -1;
```

```
  // ucitavamo i obrađujemo jednu po jednu jedinicu
  for (int k = 1; k <= m; k++) {
    int x, y;
    cin >> x >> y;
    // ako je u matrici već jedinica, nema šta da se radi
    if (a[x][y]) continue;
    // upisujemo jedinicu u matricu
    a[x][y] = true;
    // povezujemo podskupove u sva četiri smera
    if (x > 0 && a[x-1][y])
      UF_unija(kod(x, y, n), kod(x-1, y, n));
    if (x + 1 < n && a[x+1][y])
      UF_unija(kod(x, y, n), kod(x+1, y, n));
    if (y > 0 && a[x][y-1])
      UF_unija(kod(x, y, n), kod(x, y-1, n));
    if (y + 1 < n && a[x][y+1])
      UF_unija(kod(x, y, n), kod(x, y+1, n));
    // proveravamo da li su izvor i ušće spojeni
    if (UF_predstavnik(izvor) == UF_predstavnik(usce)) {
      korak = k;
      break;
    }
  }

  cout << korak << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Распоред са максималним збиром профита

Поставка: Дати су послови који сви трају јединично време и за сваки посао је познато који је крајњи рок да се заврши и колики је профит ако се тај посао заврши у року. Напиши програм који одређује максимални профит који се може остварити.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број послова n ($1 \leq n \leq 50000$), а затим за сваки посао рок завршетка (природан број од 1 до n) и профит (цео број од 1 до 100).

Излаз: На стандардни излаз исписати максимални профит.

Пример

Улаз	*Излаз*
6	290
3 40	
3 80	
4 30	
4 100	
1 70	
1 60	

Решење: Задатак решавамо грамзивим алгоритмом. Послове распоређујемо у опадајућем редоследу профита. Посао са највећим профитом распоређујемо у најкаснији термин у ком је то могуће (пре истека његовог рока завршетка).

Докажимо коректност претходне грамзиве стратегије. Претпоставимо да се посао са највећим профитом не налази у оптималном распореду. Ако постоји посао у распореду који се завршава пре рока завршетка посла са највећим профитом тада уместо њега можемо ставити посао са највећим профитом и тако добити већи профит, што је контрадикција са претпоставком оптималности. Дакле, посао са највећим профитом мора бити део распореда (ако постоји било који празан термин у коме се он може распоредити). У оптималном распореду он може бити распоређен у последњем термину у ком је то могуће. Наиме, ако је он распоређен пре тога, а тај термин је празан, просто га можемо извршити касније. Ако се у том термину налази неки други посао, онда та два посла можемо просто распоредити, без промене укупног профита.

Имплементација овог поступка тече тако што послове сортирамо опадајуће по профиту, а затим за сваки посао са листе тражимо најкаснији термин у коме је могуће распоредити га. Ако такав термин не постоји, посао прескачемо, а у супротном га распоређујемо баш у том термину. Критично место је претрага термина за текући посао.

Оно што прво пада на памет је одржавање низа логичких вредности којима бележимо који је термин слободан, а који није. Слободан термин одређујемо линеарном претрагом тако што крећемо од термина непосредно пре рока завршетка и померамо се ка раније, све док су термин заузети. Та претрага може бити линеарне сложености (ако су сви термин заузети), што може довести до алгоритма чија је сложеност $(m \cdot n)$ где је m број термина (најкаснији рок завршетка посла) док је n укупан број послова.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <utility>
#include <algorithm>

using namespace std;

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<pair<int, int>> poslovi(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
```

```
    cin >> poslovi[i].first >> poslovi[i].second;

  sort(begin(poslovi), end(poslovi),
       [](const auto& p1, const auto& p2) {
         return p1.second > p2.second;
       });

  int profit = 0;
  int brojRasporedjenih = 0;
  int maksRok = max_element(begin(poslovi), end(poslovi))->first;
  vector<bool> zauzeto(maksRok, false);
  for (const auto& posao : poslovi) {
    int vreme = posao.first - 1;
    while (vreme >= 0 && zauzeto[vreme])
      vreme--;
    if (vreme >= 0) {
      zauzeto[vreme] = true;
      profit += posao.second;
      brojRasporedjenih++;
      if (brojRasporedjenih == maksRok)
        break;
    }
  }

  cout << profit << endl;

  return 0;
}
```

Боље решење се постиже ако се употреби идеја структуре података за ефикасно одређивање унија. Наиме, можемо креирати скупове термина такве да се у сваком скупу налазе групе повезаних термина тј. тако да сви термини у истом скупу имају заједничког најкаснијег слободног претходника. Крећемо од тога да су сви скупови једночлани тј. да је за сваки жељени термин он сам термин у коме се посао може завршити (сваки термин бива постављен као представник свог скупа). Када се неки посао закаже, тада се скуп коме је он припадао спаја са скупом који се налази непосредно испред термина у коме је заказан. Да бисмо могли да региструјемо и термине у којима више није могуће заказивати часове уводимо и посебан термин 0 (и третирамо га као и све остале).

Прикажимо на примеру како можемо распоредити следеће послове

```
a: 3 40
b: 3 80
c: 4 30
d: 4 100
e: 1 70
f: 1 60
```

Након сортирања по профитима добијамо следећи редослед.

```
d: 4 100
b: 3 80
e: 1 70
f: 1 60
a: 3 40
c: 4 30
```

Крећемо од следећег стања низа родитеља и распоређених послова.

```
0 1 2 3 4
0 1 2 3 4
- - - - -
```

Посао d се може распоредити у термин 4 чиме добијамо:

```
0 1 2 3 4
0 1 2 3 3
- - - - d
```

Посао b се може распоредити у термин 3 чиме добијамо:

```
0 1 2 3 4
0 1 2 2 3
- - - b d
```

Посао e се може распоредити у термин 1 чиме добијамо:

```
0 1 2 3 4
0 0 2 2 3
- e - b d
```

Посао f се не може распоредити (пошто је представник његовог термина 1 сада једнак 0), па га прескачемо. Посао a распоређујемо у термин 2 (што је тренутни представник његовог термина 3) чиме добијамо

```
0 1 2 3 4
0 0 0 2 3
- e f b d
```

Посао e не можемо распоредити (јер је представник његовог термина нула). Ако радимо компресију путање, долазимо у стање

```
0 1 2 3 4
0 0 0 0 3
- e f b d
```

На крају ни посао f не можемо распоредити (јер је представник његовог термина нула). Ако радимо компресију путање, долазимо у стање

```
0 1 2 3 4
0 0 0 0 0
- e f b d
```

Приметимо да смо поступак распоређивања могли прекинути када је број распоређених послова достигао број укупан број термина.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <utility>
#include <algorithm>

using namespace std;

vector<int> UF_roditelj;

void UF_inicijalizacija(int n) {
  UF_roditelj.resize(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    UF_roditelj[i] = i;
}

int UF_predstavnik(int a) {
  while (UF_roditelj[a] != a) {
    UF_roditelj[a] = UF_roditelj[UF_roditelj[a]];
    a = UF_roditelj[a];
  }
  return a;
}

void UF_unija(int a, int b) {
  UF_roditelj[a] = b;
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<pair<int, int>> poslovi(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> poslovi[i].first >> poslovi[i].second;

  sort(begin(poslovi), end(poslovi),
       [](const auto& p1, const auto& p2) {
         return p1.second > p2.second;
       });

  int profit = 0;
  int brojRasporedjenih = 0;
  int maksRok = max_element(begin(poslovi), end(poslovi))->first;

  UF_inicijalizacija(maksRok + 1);
  for (const auto& posao : poslovi) {
```

```
    int vreme = UF_predstavnik(posao.first);
    if (vreme > 0) {
      profit += posao.second;
      UF_unija(vreme, UF_predstavnik(vreme - 1));
      brojRasporedjenih++;
      if (brojRasporedjenih == maksRok)
        break;
    }
  }

  cout << profit << endl;

  return 0;
}
```

Упити распона

Одређене структуре података су посебно погодне за проблеме у којима се тражи да се над низом елемената извршавају упити који захтевају израчунавање статистика неких сегмената тј. распона низа (енгл. range queries). Најчешће се посматрају збирови елемената сегмената, али могуће је разматрати и минимум, максимум, производ и неке друге операције. У зависности од тога да ли се низ мења између извршавања упита или се упити извршавају над низом који је стално исти разликујемо *статичке упите распона* и *динамичке упите распона*. Статички упити распона се често могу решити прилично елементарним техникама (одржавањем низа збирова префикса или низа разлика суседних елемената низа), док динамички упити распона захтевају коришћење напреднијих структура података (сегментних стабала, Фенвикових стабала).

Статички упити распона

Илуструјмо статичке упите распона кроз неколико једноставних задатака.

Задатак: Збирови сегмената

Поставка: Позната је зарада једног предузећа током одређеног броја дана. Напиши програм који омогућава кориснику да израчунава укупну зараду предузећа у временским периодима одређеним почетним и крајњим даном.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број дана n ($1 \leq n \leq 100000$), а затим у наредном реду n целих бројева између 0 и 100, раздвојених са по једним размаком, који представљају зараде током n дана. Након тога се уноси број упита m ($1 \leq m \leq 100000$) и у наредних m редова се уносе временски периоди одређени редним бројем почетног дана a и крајњег дана b ($0 \leq a \leq b < n$).

Излаз: На стандардни излаз исписати m целих бројева који представљају укупне зараде у сваком од m периода.

Пример

Улаз	*Излаз*
5	15
1 2 3 4 5	9
3	3
0 4	
1 3	
2 2	

Решење:

Директно решење

Директно решење подразумева да све бројеве учитамо у низ, а затим да за сваки упит изнова рачунамо збир одговарајућег сегмента низа. Сложеност оваквог приступа је $O(nm)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> brojevi(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> brojevi[i];
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    int a, b;
    cin >> a >> b;
    int zbir = 0;
    for (int j = a; j <= b; j++)
      zbir += brojevi[j];
    cout << zbir << '\n';
  }
  return 0;
}
```

Збирови префикса

Једноставно ефикасно решење је засновано на наредној идеји: уместо чувања елемената низа, можемо чувати низ збирова префикса низа. Збир сваког сегмента $[l, d]$ можемо разложити на разлику префикса до елемента d и префикса до елемента $l-1$. Важи

$$\sum_{k=l}^{d} a_k = \sum_{k=0}^{d} a_k - \sum_{k=0}^{l-1} a_k.$$

Збирови свих префикса се могу израчунати и сместити у додатни (а ако је уштеда меморије битна, онда чак и у оригинални) низ. Дакле, током учитавања елемената можемо формирати низ збирова префикса (рачунаћемо их инкрементално, јер се сваки наредни збир префикса добија увећавањем претходног збира префикса за текући елемент низа). Формирамо, дакле, низ $z_i = \sum_{k=0}^{i-1} a_k$ (при чему је $z_0 = 0$, збир празног префикса). Тада збир елемената у сегменту позиција $[l, d]$ израчунавамо као $z_{d+1} - z_l$. За учитавање бројева и формирање низа збирова префикса потребно нам је $O(n)$ корака. Након оваквог претпроцесирања, збир сваког сегмента се може израчунати у времену $O(1)$, па је укупна сложеност $O(n + m)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);

  int n;
  cin >> n;
  vector<int> zbirovi_prefiksa(n+1);

  zbirovi_prefiksa[0] = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    cin >> x;
    zbirovi_prefiksa[i+1] = zbirovi_prefiksa[i] + x;
  }

  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    int a, b;
    cin >> a >> b;
    cout << zbirovi_prefiksa[b+1] - zbirovi_prefiksa[a] << '\n';
  }

  return 0;
}
```

Задатак: Увећавање сегмената

Поставка: Камион превози терет током N километара пута. На пут креће празан и током пута утоварује и истоварује пакете. Ако се за сваки пакет зна на ком је километру пута утоварен, на ком је километру пута истоварен и колика му је маса, напиши програм који одређује колико је оптерећење камиона на сваком километру пута. Сматрати да се предмет утоварује на почетку, а истоварује на крају датог километра.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број километара N ($10 \leq N10000$), затим, у наредном реду, број предмета M ($0 \leq M \leq 10000$), а након тога, у наредних M редова по три цела броја раздвојена размацима који представљају број километра на чијем је почетку утоварен предмет (цео број између 0 и $N-1$), број километра на чијем крају је истоварен (цео број између 0 и $N-1$) и на крају маса предмета (цео број између 1 и 10).

Излаз: На стандардни излаз исписати масу терета у килограмима на сваком километру пута (иза сваке масе написати по један размак).

Пример

Улаз
```
10
3
1 5 10
3 7 10
2 8 15
```

Излаз
```
0 10 25 35 35 35 25 25 15 0
```

Објашњење

```
        km   0   1  2  3  4  5  9  7  8  9
             0   0  0  0  0  0  0  0  0  0
1 5 10       0  10 10 10 10 10  0  0  0  0
3 7 10       0  10 10 20 20 20 10 10  0  0
2 8 15       0  10 25 35 35 35 25 25 15  0
```

Решење: Овај задатак је веома сличан задатку Најбројнији пресек интервала, па се могу користити исте технике решавања.

Директно решење

Директан начин је да се одржава низ M у којем се памти маса на камиону током сваког километра пута. Након учитавања сваког податка о предмету (почетног километра a, завршног километра b и масе m), све вредности у низу M на позицијама од a до b (укључујући и њих) се увећавају за m. Проблем са овим решењем је то што предмети могу путовати велики број километара па се у сваком кораку врши ажурирање великог броја чланова низа (сложеност је у најгорем случају $O(n \cdot m)$).

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> mase(n, 0);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
```

```
    int km_od, km_do, masa;
    cin >> km_od >> km_do >> masa;
    for (int km = km_od; km <= km_do; km++)
      mase[km] += masa;
  }

  for (int masa : mase)
    cout << masa << " ";

  return 0;
}
```

Разлике суседних елеменaта низа

Задатак можемо решити ефикасније ако применимо следећу технику. Уместо да у низу M одржавамо масу у камиону у километру i, одржаваћемо разлику између масе у километру i и $i-1$ (на позицији 0 се чува маса у камиону у нултом километру), тј. уводимо низ R_i такав да је $R_0 = M_0$, а $R_i = M_i - M_{i-1}$, за $1 \leq i < n$. Посматрајмо шта се дешава са низом R када се у низу M сви елементи на позицијама a до b увећају за m. Вредност R_a једнака је разлици $M_a - M_{a-1}$ (или евентуално M_0 ако је $a = 0$) и она се увећава за m, јер је M_a увећан за m, док се M_{a-1} не мења. Све вредности од R_{a+1} до R_b остају не промењене. Наиме, за све њих важи да је $R_i = M_i - M_{i-1}$, а да су и M_i и M_{i-1} увећани за m. На крају, вредност R_{b+1} се умањује за m. Наиме важи да је $R_{b+1} = M_{b+1} - M_b$, да се M_b увећава за m, док се M_{b+1} не мења. Рецимо да ако је $b = n-1$, тада не морамо разматрати вредност $R_{b+1} = R_n$ (мада, униформности ради, можемо, што захтева да низ R садржи $n+1$ елемент). Дакле, приликом сваког учитавања бројева a, b и m потребно је само да увећавамо елемент R_a за m, а да елемент R_{b+1} умањимо за m.

Када знамо елементе низа R елементе низа M можемо једноставно реконструисати сабирањем елемената низа R. Наиме, важи да је $M_0 = R_0$, док је $M_i = M_{i-1} + R_i$, тако да сваки наредни елемент низа M можемо израчунати као збир претходног елемента низа M и њему одговарајућег елемента низа R. Приметимо да је заправо елемент M_i једнак збиру свих елемената од R_0 до R_i, јер је $R_0 + R_1 + \ldots + R_i = M_0 + (M_1 - M_0) + \ldots + (M_i - M_{i-1}) = M_i$.

Укупна сложеност овог приступа је $O(n+m)$.

Идеја коришћена у овом задатку донекле је слична (заправо инверзна) техници виђеној у задатку Збирови сегмената. Може се приметити да се реконструкција низа врши заправо израчунавањем префиксних збирова низа разлика суседних елемената, што указује на дубоку везу између ове две технике. Заправо, разлике суседних елемената представљају одређени дискретни аналогон извода функције, док префиксни збирови представљају аналогију одређеног интеграла. Израчунавање збира сегмента као разлике два збира префикса одговара Њутн-Лајбницовој формули.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;
```

```
int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> razlika(n+1, 0);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    int km_od, km_do, masa;
    cin >> km_od >> km_do >> masa;
    razlika[km_od] += masa;
    razlika[km_do+1] -= masa;
  }

  int masa_km = 0;
  for (int km = 0; km < n; km++) {
    masa_km += razlika[km];
    cout << masa_km << " ";
  }

  return 0;
}
```

Задатак: Пермутација са највећим збиром упита

Поставка: Дуж улице се постављају светиљке које емитују различиту количину осветљења. Светиљке осветљавају и станове који се налазе у близини. За сваки стан је познато које га светиљке осветљавају (то су увек неке узастопне светиљке у низу светиљки распоређених дуж улице). Укупна количина осветљења које стан прима једнака је збиру количине осветљења светиљки које га осветљавају. Ако су познате количине осветљења које емитују све светиљке које треба распоредити, написати програм који одређује распоред светиљки тако да станови укупно буду осветљени што је више могуће.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број светиљки n ($1 \leq n \leq 10^5$), а затим у наредном реду и јачине светиљки које се распоређују (цели бројеви између 1 и 10^6). Након тога се уноси број станова s ($1 \leq s \leq 10^5$) и затим у наредних s редова, за сваки стан информација о позицијама прве и последње светиљке која га осветљава (два броја $[l, d]$, где је $1 \leq l \leq d \leq n$).

Излаз: На стандардни излаз исписати највећу могућу укупну количину светлости коју могу добити сви станови.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
3 5 3 2 3 1 2 2 3 1 3	25

Пример 2

Улаз	*Излаз*
5 5 2 4 1 3 3 1 5 2 3 2 3	33

Решење: Укупно осветљење се може израчунати као

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=l_i}^{d_i} a_j$$

Исти резултат се може добити и на другачији начин, као

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot a_j,$$

где је m_j број сегмената $[l_i, d_i]$ који садрже вредност j.

Да би збир био максималан, потребно је да уз веће вредности m_j стоје већи бројеви a_j. Заиста, претпоставимо да у максималном збиру учествују парови $m_x a_x + m_y a_y$, да је $m_x > m_y$, али да је $a_x < a_y$. Разменом вредности a_x и a_y добија се већи збир, што је контрадикција. Заиста $(m_x a_y + m_y a_x) - (m_x a_x + m_y a_y) = m_x(a_y - a_x) - m_y(a_y - a_x) = (m_x - m_y)(a_y - a_x) > 0$.

Зато максимални збир можемо лако израчунати сортирањем вредности низова $m_1, \ldots, m_n$ и $a_1, \ldots, a_j$ и израчунавањем њиховог скаларног производа.

Остаје још питање како ефикасно израчунати вредности низа $m_1, \ldots m_n$. Директно бројање сегмената имало би лошу сложеност (ns). Најједноставније решење је да употребимо низ разлика низа m (слично као у задатку Увећавање сегмената). Тиме низ $m_1, \ldots, m_n$ можемо конструисати у времену $O(s + n)$. Након тога временом доминира сортирање (да пута по $O(n \log n)$), док је за израчунавање скаларног производа потребно $O(n)$ операција.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  // ucitavamo niz jacina svetiljki
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> a(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
```

```
  cin >> a[i];
  // ucitavamo podatke o osvetljenosti stanova
  // za svaku svetiljku racunamo koliko stanova osvetljava
  // efikasnosti radi, umesto niza frekvencija, cuvamo niz razlika frekvencija
  vector<int> b(n+1, 0);
  int s;
  cin >> s;
  for (int i = 0; i < s; i++) {
    int l, d;
    cin >> l >> d;
    b[l-1]++; b[d]--;
  }
  // niz frekvencija dobijamo sabiranjem niza razlika
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    b[i] += b[i-1];
  b.pop_back();

  // najvecu osvetljnost dobijamo ako najjace svetiljke stavljamo na
  // mesta sa kojih osvetljavaju najveci broj stanova
  sort(begin(b), end(b));
  sort(begin(a), end(a));

  // racunamo ukupnu osvetljenost (vodeci racuna o eventualnom
  // prekoracenju)
  unsigned long long zbir = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++)
    zbir += (unsigned long long)b[i] * (unsigned long long)a[i];
  cout << zbir << endl;

  return 0;
}
```

Сегментна дрвета

Видели смо да низ збирова префикса, омогућава ефикасно постављање упита над сегментима низа, али не омогућава ефикасно ажурирање елемената низа, јер је потребно ажурирати све збирове префикса након ажурираног елемента, што је нарочито неефикасно када се ажурирају елементи близу почетка низа (сложеност најгорег случаја је $O(n)$). Низ разлика суседних елемената допушта стална ажурирања низа, међутим, извршавање упита очитавања стања низа подразумева реконструкцију низа, што је сложености $O(n)$.

Разматраћемо проблеме у којима је потребно да се упити ажурирања низа и очитавања његових статистика јављају испреплетано. За разлику од претходних, статичких упита над распонима (енгл. static range queries), овде ћемо разматрати тзв. *динамичке упите над распонима* (енгл. dynamic range queries), тако да је потребно развити напредније структуре података које омогућавају извршавање оба типа упита ефикасно.

На пример, размотримо проблем имплементације структуре података која обезбеђује ефикасно израчунавање збирова сегмената датог низа одређених интервалима позиција $[a, b]$, при чему се појединачни елементи низа могу често мењати.

У наставку ћемо видети две различите, али донекле сличне структуре података које дају ефикасно решење претходног проблема и њему сличних.

Једна структура података која омогућава прилично једноставно и ефикасно решавање овог проблема су *сегментна дрвета*. Опет се током фазе препроцесирања израчунавају збирови одређених сегмената полазног низа, а онда се збир елемената произвољног сегмента полазног низа изражава у функцији тих унапред израчунатих збирова.Рецимо и да сегментна дрвета нису специфична само за сабирање, већ се могу користити и за друге статистике сегмената које се израчунавају асоцијативним операцијама (на пример за одређивање најмањег или највећег елемента, нзд-а свих елемената и слично).

Претпоставимо да је дужина низа степен броја 2 (ако није, низ се може допунити до најближег степена броја 2, најчешће нулама). Чланови низа представљају листове дрвета. Групишемо два по два суседна чвора и на сваком наредном нивоу дрвета чувамо родитељске чворове који чувају збирове своја два детета. Ако је дат низ $3, 4, 1, 2, 6, 5, 1, 4$, сегментно дрво за збирове изгледа овако.

```
              26
      10              16
  7       3       11      5
3   4   1   2   6   5   1   4
```

Пошто је дрво потпуно, најједноставнија имплементација је да се чува имплицитно у низу (слично као у случају хипа). Претпоставићемо да елементе дрвета смештамо од позиције 1, јер је тада аритметика са индескима мало једноставнија (елементи полазног низа могу бити индексирани класично, кренувши од нуле).

```
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15
   -  26 10 16 7  3  11 5  3  4  1  2  6  5  1  4
```

Уочимо неколико карактеристика овог начина смештања. Корен је смештен на позицији 1. Елементи полазног низа налазе се на позицијама $[n, 2n-1]$. Елемент који се у полазном низу налази на позицији p, се у сегментном дрвету налази на позицији $p+n$. Лево дете чвора k налази се на позицији $2k$, а десно на позицији $2k+1$. Дакле, на парним позицијама се налазе лева деца својих родитеља, а на непарним десна. Родитељ чвора k налази се на позицији $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

Размотримо сада како бисмо нашли збир елемената на позицијама из сегмента $[2, 6]$, тј. збир елемената $1, 2, 6, 5, 1$. У сегментном дрвету тај сегмент је смештен на позицијама $[2+8, 6+8] = [10, 14]$. Збир прва два елемента $(1, 2)$ се налази у чвору изнад њих, збир наредна два елемента $(6, 5)$ такође, док се у родитељском чвору елемента 1 налази његов збир са елементом 4, који не припада сегменту који сабирамо. Зато збир елемената на позицијама $[10, 14]$ у сегментном дрвету можемо разложити на збир елемената на позицијама $[5, 6]$ и елемента на позицији 14.

Размотримо и како бисмо рачунали збир елемената на позицијама из сегмента $[3, 7]$, тј. збир елемената $2, 6, 5, 1, 4$. У сегментном дрвету тај сегмент је смештен на позицијама

$[3 + 8, 7 + 8] = [11, 15]$. У родитељском чвору елемента 2 налази се његов збир са елементом 1 који не припада сегменту који сабирамо. Збирови елемената 6 и 5 и елемената 1 и 4 се налазе у чворовима иза њих, а збир сва четири дата елемента у чвору изнад њих.

Уместо операције којом се мења члану низа на позицији i додељује вредност v, често се разматра функција која елемент низа на позицији i полазног низа увећава за дату вредност v и у складу са тим ажурира сегментно дрво. Свака од ове две функције се лако изражава преко оне друге.

Имплементација сегментног дрвета за друге асоцијативне операције је скоро идентична, осим што се оператор + мења другом операцијом.

Задатак: Суме сегмената променљивог низа

Поставка: Напиши програм који израчунава збирове датих сегмената низа (поднизова узастопних елемената), при чему се током рада програма појединии елементи низа могу мењати.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се број n ($1 \leq n \leq 100000$), а у наредној линији низ од n елемената (елементи су цели бројеви између 0 и 10, раздвојени са по једним размаком). У наредној линији налази се број m ($1 \leq m \leq 100000$), а у наредних m линија упити. Подржане су две врсте упита:

- `p` i v – извршавање овог упита подразумева да се у низ на позицију i упише вредност v ($0 \leq i < n$, $0 \leq v \leq 10$).
- `z` a b – извршавање овог упита подразумева да се израчуна и на стандардни излаз испише збир елемената низа који су на позицијама $[a, b]$.

Излаз: Стандардни излаз садржи резултате `z` упита (сваки у посебној линији).

Пример

Улаз	*Излаз*

`5`
`1 2 3 4 5`
`5`
`z 0 4`
`z 2 3`
`p 2 5`
`p 3 6`
`z 0 4`
	`15`
	`7`
	`19`

Решење: Решење грубом силом подразумева да се одржава низ, да се упити `p` извршавају директном променом елемената низа (то се ради у $O(1)$), а да се упити `z` извршавају сабирањем елемената низа (то се ради у времену $O(n)$). Укупна сложеност таквог приступа је $O(mn)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <numeric>
```

```
using namespace std;

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> niz(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> niz[i];
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    string upit;
    cin >> upit;
    if (upit == "p") {
      int i, v;
      cin >> i >> v >> ws;
      niz[i] = v;
    } else if (upit == "z") {
      int a, b;
      cin >> a >> b;
      cout << accumulate(next(begin(niz), a), next(begin(niz), b+1), 0) << '\n';
    }
  }
  return 0;
}
```

Задатак можемо ефикасније решити ако збирове одржавамо у сегментном дрвету. Операције над дрветом можемо реализовати навише (од листова према корену).

Формирање сегментног дрвета на основу датог низа је веома једноставно. Прво се елементи полазног низа прекопирају у дрво, кренувши од позиције n. Затим се сви унутрашњи чворови дрвета (од позиције $n-1$, па уназад до позиције 1) попуњавају као збирови своје деце (на позицију k уписујемо збир елемената на позицијама $2k$ и $2k+1$). Сложеност ове операције је очигледно линеарна у односу на дужину низа n.

За све унутрашње елементе сегмента смо сигурни да се њихов збир налази у чворовима изнад њих. Једини изузетак могу да буду елементи на крајевима сегмента. Ако је елемент на левом крају сегмента лево дете (што је еквивалентно томе да се налази на парној позицији) тада се у његовом родитељском чвору налази његов збир са елементом десно од њега који такође припада сегменту који треба сабрати (осим евентуално у случају једночланог сегмента). У супротном (ако се налази на непарној позицији), у његовом родитељском чвору је његов збир са елементом лево од њега, који не припада сегменту који сабирамо. У тој ситуацији, тај елемент ћемо посебно додати на збир и искључити из сегмента који сабирамо помоћу родитељских чворова. Ако је елемент на десном крају сегмента лево дете (ако се налази на парној позицији), тада се у његовом родитељском чвору налази његов збир са елементом десно од њега, који не припада сегменту који сабирамо. И у тој ситуацији, тај елемент ћемо посебно додати на збир и искључити из сегмента који сабирамо помоћу родитељских чворова.

На крају, ако се крајњи десни елемент налази у десном чвору (ако је на непарној позицији), тада се у његовом родитељском чвору налази његов збир са елементом лево од њега који припада сегменту који сабирамо (осим евентуално у случају једночланог сегмента). Пошто се у сваком кораку дужина сегмента $[a, b]$ полови, а она је у почетку сигурно мања или једнака n, сложеност ове операције је $O(\log n)$.

Приликом ажурирања неког елемента потребно је ажурирати све чворове на путањи од тог листа до корена. С обзиром да знамо позицију родитеља сваког чвора и ова операција се може веома једноставно имплементирати. Пошто се k полови у сваком кораку петље, а крећа од вредности највише $2n - 1$, и сложеност ове операције је $O(\log n)$.

```
#include <iostream>
#include <algorithm>

using namespace std;

// najmanji stepen dvojke veci ili jednak od n
int stepenDvojke(int n) {
  int s = 1;
  while (s < n)
    s <<= 1;
  return s;
}

// na osnovu datog niza a dužine n
// u kom su elementi smešteni od pozicije 0
// formira se segmentno drvo i elementi mu se smeštaju u niz
// drvo krenuvši od pozicije 1
vector<int> formirajDrvo(const vector<int>& a) {
  int n = stepenDvojke(a.size());
  vector<int> drvo(2*n, 0);
  // kopiramo originalni niz u listove
  copy(begin(a), end(a), next(begin(drvo), n));
  // ažuriramo roditelje već upisanih elemenata
  for (int k = n-1; k >= 1; k--)
    drvo[k] = drvo[2*k] + drvo[2*k+1];
  return drvo;
}

// izračunava se zbir elemenata polaznog niza dužine n koji se
// nalaze na pozicijama iz segmenta [a, b] na osnovu segmentnog drveta
// koje je smešteno u nizu drvo, krenuvši od pozicije 1
int zbirSegmenta(const vector<int>& drvo, int a, int b) {
  int n = drvo.size() / 2;
  a += n; b += n;
  int zbir = 0;
  while (a <= b) {
```

```
    if (a % 2 == 1) zbir += drvo[a++];
    if (b % 2 == 0) zbir += drvo[b--];
    a /= 2;
    b /= 2;
  }
  return zbir;
}

// ažurira segmentno drvo smešteno u niz drvo od pozicije 1
// koje sadrži elemente polaznog niza a dužine n u kom su elementi
// smešteni od pozicije 0, nakon što se na poziciju i polaznog
// niza upiše vrednost v
void postavi(vector<int>& drvo, int i, int v) {
  int n = drvo.size() / 2;
  // prvo ažuriramo odgovarajući list
  int k = i + n;
  drvo[k] = v;
  // ažuriramo sve roditelje izmenjenih čvorova
  for (k /= 2; k >= 1; k /= 2)
    drvo[k] = drvo[2*k] + drvo[2*k+1];
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> a(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> a[i];
  vector<int> drvo = formirajDrvo(a);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    string upit;
    cin >> upit;
    if (upit == "p") {
      int i, v;
      cin >> i >> v >> ws;
      postavi(drvo, i, v);
    } else if (upit == "z") {
      int a, b;
      cin >> a >> b;
      cout << zbirSegmenta(drvo, a, b) << '\n';
    }
  }
  return 0;
}
```

Претходни приступ формира дрво одоздо навише (прво се попуне листови, па онда корен). Још један начин је да се дрво формира рекурзивно, одозго наниже. Иако је ова имплементација компликованија и мало неефикаснија, приступ одозго наниже је у неким каснијим операцијама неизбежан, па га илуструјемо на овом једноставном примеру. Сваки чвор дрвета представља збир одређеног сегмента позиција полазног низа. Сегмент је једнозначно одређен позицијом k у низу који одговара сегментном дрвету, али да бисмо олакшали имлементацију границе тог сегмента можемо кроз рекурзију прослеђивати као параметар функције, заједно са вредношћу k (нека је то сегмент $[x, y]$). Дрво крећемо да градимо од корена где је $k = 1$ и $[x, y] = [0, n - 1]$. Ако родитељски чвор покрива сегмент $[x, y]$, тада лево дете покрива сегмент $[x, \lfloor \frac{x+y}{2} \rfloor]$, а десно дете покрива сегмент $[\lfloor \frac{x+y}{2} \rfloor + 1, y]$. Дрво попуњавамо рекурзивно, тако што прво попунимо лево поддрво, затим десно и на крају вредност у корену израчунавамо као Дрво попуњавамо рекурзивно, тако што прво попунимо лево поддрво, затим десно и на крају вредност у корену израчунавамо као збир вредности у левом и десном детету. Излаз из рекурзије представљају листови, које препознајемо по томе што покривају сегменте дужине 1, и у њих само копирамо елементе са одговарајућих позиција полазног низа.

И за операцију сабирања можемо направити и рекурзивну имплементацију која врши израчунавање одозго наниже. За сваки чвор у сегментном дрвету функција враћа колики је допринос сегмента који одговара том чвору и његовим наследницима траженом збиру елемената на позицијама из сегмента $[a, b]$ у полазном низу. На почетку крећемо од корена и рачунамо допринос целог дрвета збиру елемената из сегмента $[a, b]$. Постоје три различита могућа односа између сегмента $[x, y]$ који одговара текућем чвору и сегмента $[a, b]$ чији збир елемената тражимо. Ако су дисјунктни, допринос текућег чвора збиру сегмента $[a, b]$ је нула. Ако је $[x, y]$ у потпуности садржан у $[a, b]$, тада је допринос потпун, тј. цео збир сегмента $[x, y]$ (а то је број уписан у низу на позицији k) доприноси збиру елемената на позицијама из сегмента $[a, b]$. На крају, ако се сегменти секу, тада је допринос текућег чвора једнак збиру доприноса његовог левог и десног детета. Иако није сасвим очигледно, и ова процедура ће имати сложност $O(\log n)$.

И операцију промене вредности елемената можемо имплементирати одозго наниже. Сложеност је опет $O(\log n)$, јер се дужина интервала $[x, y]$ у сваком кораку бар два пута смањује.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

// od elemenata niza a sa pozicija [x, y]
// formira se segmentno drvo i elementi mu se smeštaju u niz
// drvo krenuvši od pozicije k
void formirajDrvo(const vector<int>& a, vector<int>& drvo,
                  size_t k, size_t x, size_t y) {
  if (x == y)
```

```
    // u listove prepisujemo elemente polaznog niza
    drvo[k] = x < a.size() ? a[x] : 0;
  else {
    // rekurzivno formiramo levo i desno poddrvo
    int s = (x + y) / 2;
    formirajDrvo(a, drvo, 2*k, x, s);
    formirajDrvo(a, drvo, 2*k+1, s+1, y);
    // izračunavamo vrednost u korenu
    drvo[k] = drvo[2*k] + drvo[2*k+1];
  }
}

// najmanji stepen dvojke veci ili jednak od n
int stepenDvojke(int n) {
  int s = 1;
  while (s < n)
    s <<= 1;
  return s;
}

// na osnovu datog niza a duzine n u kom su elementi smesteni od
// pozicije 0 formira se segmentno drvo i elementi mu se smeštaju u
// niz drvo krenuvši od pozicije 1
vector<int> formirajDrvo(const vector<int>& a) {
  // niz implicitno dopunjujemo nulama tako da mu duzina postane
  // najblizi stepen dvojke
  int n = stepenDvojke(a.size());
  vector<int> drvo(n * 2);
  // krećemo formiranje od korena koji se nalazi u nizu drvo
  // na poziciji 1 i pokriva elemente na pozicijama [0, n-1]
  formirajDrvo(a, drvo, 1, 0, n - 1);
  return drvo;
}


// izračunava se zbir onih elemenata polaznog niza koji se
// nalaze na pozicijama iz segmenta [a, b] koji se nalaze u
// segmentnom drvetu koje čuva elemente polaznog niza koji se
// nalaze na pozicijama iz segmenta [x, y] i smešteno je u nizu
// drvo od pozicije k
int zbirSegmenta(const vector<int>& drvo, int k, int x, int y, int a, int b) {
  // segmenti [x, y] i [a, b] su disjunktni
  if (b < x || a > y) return 0;
  // segment [x, y] je potpuno sadržan unutar segmenta [a, b]
  if (a <= x && y <= b)
      return drvo[k];
  // segmenti [x, y] i [a, b] se seku
```

```
  int s = (x + y) / 2;
  return zbirSegmenta(drvo, 2*k, x, s, a, b) +
         zbirSegmenta(drvo, 2*k+1, s+1, y, a, b);
}

// izračunava se zbir elemenata polaznog niza dužine n koji se
// nalaze na pozicijama iz segmenta [a, b] na osnovu segmentnog drveta
// koje je smešteno u nizu drvo, krenuvši od pozicije 1
int zbirSegmenta(const vector<int>& drvo, int a, int b) {
  int n = drvo.size() / 2;
  // krećemo od drveta smeštenog od pozicije 1 koje
  // sadrži elemente polaznog niza na pozicijama iz segmenta [0, n-1]
  return zbirSegmenta(drvo, 1, 0, n-1, a, b);
}

// ažurira segmentno drvo smešteno u niz drvo od pozicije k
// koje sadrži elemente polaznog niza a dužine n sa pozicija iz
// segmenta [x, y], nakon što se na poziciju i niza upiše vrednost v
void postavi(vector<int>& drvo, int k, int x, int y, int i, int v) {
   if (x == y)
     // ažuriramo vrednost u listu
     drvo[k] = v;
   else {
     // proveravamo da li se pozicija i nalazi levo ili desno
     // i u zavisnosti od toga ažuriramo odgovarajuće poddrvo
     int s = (x + y) / 2;
     if (x <= i && i <= s)
       postavi(drvo, 2*k, x, s, i, v);
     else
       postavi(drvo, 2*k+1, s+1, y, i, v);
     // pošto se promenila vrednost u nekom od dva poddrveta
     // moramo ažurirati vrednost u korenu
     drvo[k] = drvo[2*k] + drvo[2*k+1];
   }
}

// ažurira segmentno drvo smešteno u niz drvo od pozicije 1
// koje sadrži elemente polaznog niza a dužine n u kom su elementi
// smešteni od pozicije 0, nakon što se na poziciju i polaznog
// niza upiše vrednost v
void postavi(vector<int>& drvo, int i, int v) {
  int n = drvo.size() / 2;
  // krećemo od drveta smeštenog od pozicije 1 koje
  // sadrži elemente polaznog niza na pozicijama iz segmenta [0, n-1]
  postavi(drvo, 1, 0, n-1, i, v);
}
```

```
int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> a(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> a[i];
  vector<int> drvo = formirajDrvo(a);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    string upit;
    cin >> upit;
    if (upit == "p") {
      int i, v;
      cin >> i >> v >> ws;
      postavi(drvo, i, v);
    } else if (upit == "z") {
      int a, b;
      cin >> a >> b;
      cout << zbirSegmenta(drvo, a, b) << '\n';
    }
  }
  return 0;
}
```

Додатна решења овог задатка су доступна на страни 64.

Фенвикова стабла

Фенвикова дрвета тј. *бинарно индексирана дрвета* (енгл. binary indexed tree, BIT) користе мало мање меморије и могу бити за константни фактор бржа од сегментних дрвета (иако је сложеност операција асимптотски једнака). Са друге стране, за разлику од сегментних дрвета која су погодна за различите операције, Фенвикова дрвета су специјализована само за асоцијативне операције које имају инверз (нпр. збирови или производи елемената сегмената се могу налазити уз помоћ BIT, али не и минимуми, нзд-ови и слично). Сегментна дрвета могу да ураде све што и Фенвикова, док обратно не важи.

Иако се назива дрветом, Фенвиково дрво заправо представља низ вредности збирова неких паметно изабраних сегмената. Избор сегмената је у тесној вези са бинарном репрезентацијом индекса. Поново ћемо једноставности ради претпоставити да се вредности у низу смештају од позиције 1 (вредност на позицији 0 је ирелевантна) и то и у полазном низу и у низу у ком се смешта дрво. Прилагођавање кода ситуацији у којој су у полазном низу елементи смештени од позиције нула, веома је једноставно (само је на почетку сваке функције која ради са дрветом индекс полазног низа потребно увећати за један пре даље обраде). Ако је полазни низ дужине n, елементи дрвета ће се

смештати у посебан низ на позиције $[1, n]$.

Кључна идеја Фенвиковог дрвета је следећа: *у дрвету се на позицији k чува збир вредности полазног низа из сегмента позиција облика $(f(k), k]$ где је $f(k)$ број који се добије од броја k тако што се из бинарног записа броја k обрише прва јединица сдесна*.

На пример, на месту $k = 21$ записује се збир елемената полазног низа на позицијама из интервала $(20, 21]$, јер се број 21 бинарно записује као 10101 и брисањем јединице добија се бинарни запис 10100 тј. број 20 (важи да је $f(21) = 20$). На позицији број 20 налази се збир елемената са позиција из интервала $(16, 20]$, јер се брисањем јединице добија бинарни запис 10000 тј. број 16 (важи да је $f(20) = 16$). На позицији 16 се чува збир елемената са позиција из интервала $(0, 16]$, јер се брисањем јединице из бинарног записа броја 16 добија 0 (важи да је $f(16) = 0$).

За низ $3, 4, 1, 2, 6, 5, 1, 4$, Фенвиково дрво би чувало следеће вредности.

```
0    1      2     3     4     5     6     7     8  k
     1     10    11   100   101   110   111  1000  k  binarno
     0      0    10     0   100   100   110     0  f(k) binarno
 (0,1]  (0,2] (2,3] (0,4] (4,5] (4,6] (6,7] (0,8]  interval
     3      4     1     2     6     5     1     4  niz
     3      7     1    10     6    11     1    26  drvo
```

Надовезивањем интервала $(0, 16]$, $(16, 20]$ и $(20, 21]$ добија се интервал $(0, 21]$ тј. префикс низа до позиције 21. Збир елемената у префиксу се, дакле, може добити као збир неколико елемената записаних у Фенвиковом дрвету. Ово, наравно, важи за произвољни индекс (не само за 21). Број елемената чијим се сабирањем добија збир префикса је само $O(\log n)$. Наиме, у сваком кораку се број јединица у бинарном запису текућег индекса смањује, а број n се записује са највише $O(\log n)$ бинарних јединица.

Имплементација је веома једноставна, када се пронађе начин да се из бинарног записа броја уклони прва јединица здесна тј. да се за дати број k израчуна $f(k)$. Под претпоставком да су бројеви записани у потпуном комплементу, изразом `k & -k` може се добити број који садржи само једну јединицу и то на месту последње јединице у запису броја `k`. Одузимањем те вредности од броја `k` тј. изразом `k - (k & -k)` добијамо ефекат брисања последње јединице у бинарном запису броја `k` и то представља имплементацију функције f. Други начин да се то уради је да се израчуна вредност `k & (k-1)`.

Збир префикса $[0, k]$ полазног низа можемо онда израчунати наредном функцијом.

```
// na osnovu Fenvikovog drveta smeštenog u niz drvo
// izračunava zbir prefiksa (0, k] polaznog niza
int zbirPrefiksa(int drvo[], int k) {
  int zbir = 0;
  while (k > 0) {
     zbir += drvo[k];
     k -= k & -k;
  }
}
```

Када знамо збир префикса, збир произвољног сегмента $[a, b]$ можемо израчунати као разлику збира префикса $(0, b]$ и збира префикса $(0, a - 1]$. Пошто се оба рачунају у времену $O(\log n)$, и збир сваког сегмента можемо израчунати у времену $O(\log n)$. Напоменимо и то да је због ове операције важно да асоцијативна операција која се користи у Фенвиковом дрвету има инверз (у овом случају да бисмо могли да одузимањем две вредности префикса добијамо збир произвољног сегмента).

Основна предност Фенвикових дрвета у односу на низ свих збирова префикса је то што се могу ефикасно ажурирати. Размотримо функцију која ажурира дрво након увећања елемента у полазном низу на позицији k за вредност x. Тада је за x потребно увећати све оне збирове у дрвету у којима се као сабирак јавља и елемент на позицији k. Ти бројеви се израчунавају веома слично као у претходној функцији, једино што се уместо одузимања вредности `k & -k` број `k` у сваком кораку увећава за `k & -k`.

На пример, ако би се у претходном примеру елемент на позицји 3 увећао за вредност 4, било би потребно повећати за 4 вредности елемената Фенвиковог дрвета на позицијама 3, 4 и 8. До ових позиција бисмо дошли почев од бинарног записа броја 3 који износи 11 сабирањем са 1 (број који садржи тачно једну јединицу на позицији последње јединице у бинарном запису датог броја) чиме бисмо добили 100 што одговара броју 4, а након тога бисмо ову вредност сабрали са 100 чиме бисмо добили 1000 (бинарни запис броја 8). Овде се процедура завршава с обзиром на то да смо стигли до последњег елемента у Фенвиковом дрвету.

```
// Ažurira Fenvikovo drvo smešteno u niz drvo nakon što se
// u originalnom nizu element na poziciji k uveća za x
void dodaj(int drvo[], int n, int k, int x) {
  while (k <= n) {
    drvo[k] += x;
    k += k & -k;
  }
}
```

Објаснимо и докажимо коректност претходне имплементације. Потребно је ажурирати све оне позиције m чији придружени сегмент садржи вредност k, тј. све оне позиције m такве да је $k \in (f(m), m]$, тј. $f(m) < k \leq m$. Ово никако не може да важи за бројеве $m < k$, а сигурно важи за број $m = k$, јер је $f(k) < k$, када је $k > 0$ (а ми претпостављамо да је $1 \leq k \leq n$). За бројеве $m > k$, сигурно важи десна неједнакост и потребно је утврдити да важи лева. Нека је $g(k)$ број који се добија од k тако што се k сабере са бројем који има само једну јединицу у свом бинарном запису и то на позицји на којој се налази последња јединица у бинарном запису броја k. На пример, за број $k = 101100$, број $g(k) = 101100 + 100 = 110000$. У имплементацији се број $g(k)$ лако може израчунати као `k + (k & -k)`. Тврдимо да је најмањи број m који задовољава услов $f(m) < k < m$ управо $g(k)$. Заиста, очигледно важи $k < g(k)$ и $g(k)$ има све нуле од позиције последње јединице у бинарном запису броја k (укључујући и њу), па до краја, па се брисањем његове последње јединице, тј. израчунавањем $f(g(k))$ сигурно добија број који је строго мањи од k. Ниједан број m између k и $g(k)$ не може да задовољи услов да је $f(m) < k$. Наиме, сви ти бројеви се поклапају са бројем k на свим позицијама пре крајњих нула, а на позицијама крајњих нула броја k имају бар неку јединицу, чијим се брисањем добија број који

је већи или једнак k. По истом принципу закључујемо да наредни тражени број мора бити $g(g(k))$, затим $g(g(g(k)))$ итд. све док се не добије неки број који превазилази n. Заиста, важи да је $k < g(k) < g(g(k))$. Важи да је $f(g(g(k))) < f(g(k)) < k$, па $g(g(k))$ задовољава услов. Ниједан број између $g(k)$ и $g(g(k))$ не може да задовољи услов, јер се сви они поклапају са $g(k)$ у свим бинарним цифрама, осим на његовим крајњим нулама где имају неке јединице. Брисањем последње јединице се добија број који је већи или једнак $g(k)$, па добијени број не може бити мањи од k. Отуда следи да су јединe позиције које треба ажурирати управо позиције из серије k, $g(k)$, $g(g(k))$ итд., све док су оне мање или једнаке n, па је наша имплементација коректна.

Остаје још питање како у старту формирати Фенвиково дрво, међутим, формирање се може свести на то да се креира дрво попуњено само нулама, а да се затим увећава вредност једног по једног елемента низа претходном функцијом.

```
// Na osnovu niza a u kom su elementi smešteni
// na pozicijama iz segmenta [1, n] formira Fenvikovo drvo
// i smešta ga u niz drvo (na pozicije iz segmenta [1, n])
void formirajDrvo(int drvo[], int n, int a[]) {
  fill_n(a+1, n, 0);
  for (int k = 1; k <= n; k++)
     dodaj(drvo, n, k, a[k]);
}
```

Задатак: Суме сегмената променљивог низа

Поставка: *Овај задатак је поновљен. Види текст задатка*

Решење: Задатак је могуће решити коришћењем Фенвиковог дрвета.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

// na osnovu Fenvikovog drveta smestenog u niz drvo
// izracunava zbir prefiksa [0, k) polaznog niza
int zbirPrefiksa(const vector<int>& drvo, int k) {
  int zbir = 0;
  while (k > 0) {
     zbir += drvo[k];
     k -= k & -k;
  }
  return zbir;
}

// na osnovu Fenvikovog drveta smestenog u niz drvo
// racuna zbir segmenta [a, b] polaznog niza
int zbirSegmenta(const vector<int>& drvo, int a, int b) {
```

```
  return zbirPrefiksa(drvo, b+1) - zbirPrefiksa(drvo, a);
}

// vraca element originalnog niza na poziciji a
int element(const vector<int>& drvo, int a) {
  return zbirSegmenta(drvo, a, a);
}

// azurira Fenvikovo drvo smesteno u niz drvo nakon sto se
// u originalnom nizu element na poziciji a uveca za x
void dodaj(vector<int>& drvo, int a, int x) {
  int k = a + 1;
  int n = drvo.size();
  while (k < n) {
    drvo[k] += x;
    k += k & -k;
  }
}

// azurira Fenvikovo drvo smesteno u niz drvo nakon sto se
// u originalnom nizu element na poziciji a postavi na x
void postavi(vector<int>& drvo, int a, int x) {
  dodaj(drvo, a, x - element(drvo, a));
}

// na osnovu niza a u kom su elementi smesteni na pozicijama [0, n)
// formira Fenvikovo drvo i smesta ga u niz drvo
// (na pozicije iz segmenta [1, n])
vector<int> formirajDrvo(const vector<int>& a) {
  int n = a.size();
  vector<int> drvo(n + 1, 0);
  for (int k = 0; k < n; k++)
    dodaj(drvo, k, a[k]);
  return drvo;
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> a(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> a[i];
  vector<int> drvo = formirajDrvo(a);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
```

```
    string upit;
    cin >> upit;
    if (upit == "p") {
      int i, v;
      cin >> i >> v >> ws;
      postavi(drvo, i, v);
    } else if (upit == "z") {
      int a, b;
      cin >> a >> b;
      cout << zbirSegmenta(drvo, a, b) << '\n';
    }
  }
  return 0;
}
```

Задатак: Увећања сегмената и читање елемената

Поставка: Напиши програм који омогућава две врсте упита над низом целих бројева: увећавање елемената датог сегмента за неку дату вредност и очитавање појединачних елемената низа. Почетна вредност свих елемената низа је 0.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава димензија низа n ($1 \leq n \leq 50000$), затим из наредне линије број упита q и након тога у наредних q линија описи упита. Упити су описани на следећи начин:

- `u` a b k – након извршавања овог упита сви елементи низа на позицијама из интервала $[a, b]$ треба да буду увећани за вредност k (важи $0 \leq a \leq b < n$ и $-10 \leq k \leq 10$).
- `e` i – извршавање овог упита подразумева да се на стандардни излаз испише вредност елемента низа на позицији i (важи $0 \leq i < n$).

Излаз: На стандардни излаз исписати вредности свих `e` упита (сваки број у посебној линији).

Пример

Улаз	*Излаз*
`10`	`5`
`6`	`3`
`u 3 5 2`	`-2`
`u 4 8 3`	
`e 4`	
`e 7`	
`u 1 7 -5`	
`e 6`	

Објашњење

Након првог упита стање низа је `0 0 0 2 2 2 0 0 0 0`, након другог `0 0 0 2 5 5 3 3 3 0`. Тада се очитавају елементи на позицијама 4 и 7. Након трећег упита стање

низа је `0 -5 -5 -3 0 0 -2 -2 3 0`. Након тога се очитава елемент на позицији 6.

Решење:

Директно решење

Задатак можемо решити директно одржавајући низ елемената. Сложеност операције увећања елемената је $O(n)$, а очитавања вредности је $O(1)$. Укупна сложеност је, дакле, $O(qn)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);
  int n; cin >> n;
  vector<int> niz(n);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    string upit;
    cin >> upit;
    if (upit == "u") {
      int a, b, v;
      cin >> a >> b >> v;
      for (int i = a; i <= b; i++)
        niz[i] += v;
    } else if (upit == "e") {
      int a;
      cin >> a;
      cout << niz[a] << '\n';
    }
  }
}
```

Фенвиково дрво низа разлика

У задатку видели смо да се увећавање сегмената може урадити у времену $O(1)$, ако се уместо оригиналног низа одржава низ разлика суседних елемената. Међутим, тада операција читања елемената захтева израчунавање збира префикса низа разлика, то је операција сложености (n). Ако уместо класичног низа, низ разлика одржавамо у Фенвиковом дрвету, тада и ажурирање елемената и сабирање префикса вршимо у времену $O(\log n)$, што је добар компромис. Увећавање сегмената оригиналног низа ће се свести на два увећавања елемената низа разлика, што су две операције над Фенвиковим дрветом сложености $(\log n)$. Читање елемената оригиналног низа ће се свести на израчунавање збира префикса низа разлика, што је једна операција над Фенвиковим дрветом сложености $O(\log n)$. Укупна сложеност ће бити $(q \log n)$.

```
#include <iostream>
```

```
#include <vector>

using namespace std;

// operacije za rad sa Fenvikovim drvetom

// azurira Fenvikovo drvo smesteno u niz drvo nakon sto se
// u originalnom nizu element na poziciji k uveca za x
void dodaj(vector<int>& drvo, int k, int x) {
  k++;
  int n = drvo.size();
  while (k < n) {
    drvo[k] += x;
    k += k & -k;
  }
}

// na osnovu Fenvikovog drveta smestenog u niz drvo
// izracunava zbir prefiksa [0, k) originalnog niza
int zbirPrefiksa(const vector<int>& drvo, int k) {
  int zbir = 0;
  while (k > 0) {
    zbir += drvo[k];
    k -= k & -k;
  }
  return zbir;
}

void uvecajSegment(vector<int>& drvo, int a, int b, int v) {
  dodaj(drvo, b+1, -v);
  dodaj(drvo, a, v);
}

int element(const vector<int>& drvo, int a) {
  return zbirPrefiksa(drvo, a+1);
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);
  int n; cin >> n;
  vector<int> drvo(n+1);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    string upit;
    cin >> upit;
    if (upit == "u") {
```

```
      int a, b, v;
      cin >> a >> b >> v;
      uvecajSegment(drvo, a, b, v);
    } else if (upit == "e") {
      int a;
      cin >> a;
      cout << element(drvo, a) << '\n';
    }
  }
  return 0;
}
```

Задатак: К-ти парни број

Поставка: Написати програм који омогућава да се у низу природних бројева који је на почетку испуњен нулама, али чији се елементи често мењају током извршавања програма ефикасно проналази позиција k-тог парног броја по реду.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава дужина низа n ($1 \leq n \leq 50000$), а затим и број упита m ($1 \leq m \leq 50000$). Извршавањем упита облика $u\ p\ x$ се у низ на позицију $1 \leq p \leq n$ уписује број x, док се упитом $c\ k$ на стандардни излаз исписује позиција k-тог парног броја у текућем садржају низа (позиције се броје од 1).

Излаз: На стандардном излазу приказати резултате извршавања упита `c`. Ако у неком случају у низу има мање парних бројева од вредности k, тада уместо позиције исписати `-`.

Пример

Улаз	*Излаз*
5	5
8	4
u 3 1	4
c 4	-
u 1 7	
u 2 5	
c 1	
u 1 2	
c 2	
c 4	

Решење: Директно решење подразумева да се елементи уписују у низ и да се позиција k-тог парног одређује применом линеарне претраге. Ако имамо m_1 операција ажурирања и m_2 операција претраге сложеност таквог решења је $O(m_1 + m_2 \cdot n)$, што може бити прилично неефикасно.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;
```

```
int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);
  // elementi niza - dodajemo jedan element vise, jer se pozicije broje od 1
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> niz(n+1, 0);
  // broj upita
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    char c;
    cin >> c;
    if (c == 'u') {
      // upit upisa elementa u niz
      int p, x;
      cin >> p >> x;
      niz[p] = x;
    } else if (c == 'c') {
      // upit odredjivanja k-tog parnog broja
      int k;
      cin >> k;
      // linearnom pretragom odredjujemo poziciju k-tog parnog broja
      int brojParnih = 0;
      for (int p = 1; p <= n; p++)
        if (niz[p] % 2 == 0) {
          brojParnih++;
          if (brojParnih == k) {
            cout << p << '\n';
            break;
          }
        }
      // ako nema k parnih brojeva, ispisujemo -
      if (brojParnih < k)
        cout << "-" << '\n';
    }
  }
  return 0;
}
```

На основу низа можемо формирати низ нула и јединица такав да се јединице налазе на месту парних елемената. Тада је позиција k-тог по реду парног броја најмања позиција таква да је збир свих јединица закључно са том позицијом једнак k. Ако низ нула и јединица одржавамо у Фенвиковом стаблу, врло ефикасно можемо да израчунавамо збирове сваког фиксираног префикса. Захваљујући чињеници да су збирови префикса монотоно неопадајући (када се префикси продужавају) тражену позицију можемо ефикасно одредити алгоритмом бинарне претраге. Ако имамо m_1 операција ажурирања и m_2 операција претраге укупна сложеност ће бити $O(m_1 \log(n) + m_2 \log^2 n)$, тј.

$O(m \log^2 n)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

// operacije za rad sa Fenvikovim drvetom

void dodaj(vector<int>& drvo, int k, int v) {
  while (k < (int)drvo.size()) {
    drvo[k] += v;
    k += k & -k;
  }
}

int zbirPrefiksa(const vector<int>& drvo, int k) {
  int zbir = 0;
  while (k > 0) {
    zbir += drvo[k];
    k -= k & -k;
  }
  return zbir;
}

// vraca prvu poziciju p tako da je zbir niza na pozicijama [1, p]
// veci ili jednak k
int prefiksK(const vector<int>& drvo, int k) {
  // poziciju pronalazimo binarnom pretragom po vrednosti zbira prefiksa
  int l = 1, d = drvo.size() - 1;
  while (l <= d) {
    int s = l + (d - l) / 2;
    if (zbirPrefiksa(drvo, s) < k)
      l = s + 1;
    else
      d = s - 1;
  }
  return l;
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);
  int n;
  cin >> n;
  // gradimo Fenvikovo drvo i inicijalizujemo ga jedinicama
  vector<int> drvo(n + 1, 0);
  for (int k = 1; k <= n; k++)
    dodaj(drvo, k, 1);
```

```
  // elementi niza
  vector<int> niz(n + 1, 0);

  // broj upita
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    char c;
    cin >> c;
    if (c == 'u') {
      // upit upisa elementa u niz
      int p, x;
      cin >> p >> x;
      if (x % 2 == 0 && niz[p] % 2 != 0)
        // upisan je novi paran element na poziciju p
        dodaj(drvo, p, 1);
      else if (x % 2 != 0 && niz[p] % 2 == 0)
        // upisan je novi neparan element na poziciju p
        dodaj(drvo, p, -1);
      niz[p] = x;
    } else if (c == 'c') {
      // upit odredjivanja k-tog parnog elementa
      int k;
      cin >> k;
      // trazimo najkraci prefiks ciji je zbir jednak k
      int p = prefiksK(drvo, k);
      // proveravamo da li takav prefiks zaista postoji
      if (p <= n)
        cout << p << "\n";
      else
        cout << "-" << "\n";
    }
  }
  return 0;
}
```

Задатак: Трик са картама

Поставка: Мали мађионичар хоће да сложи карте тако да са њима изведе следећи трик. У првом кораку једну карту са врха шпила пребацује на дно шпила, узима следећу карту са врха шпила и испоставља се да је на њој број 1. У другом кораку пребацује два пута карту са врха шпила на дно шпила, узима следећу карту са врха шпила испоставља се да је на њој број два. Наставља да ради по истом приниципу, пребацујући у сваком кораку по једну карту више са врха на дно шпила, да би се након тога са врха шпила скинула управо карта са наредним редним бројем.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број карата у шпилу n ($1 \leq n \leq 50000$).

Излаз: На стандардни излаз исписати редослед карата у шпилу, од врха ка дну (након сваке карте исписати један размак).

Пример

Улаз	*Излаз*
12	7 1 4 9 2 11 10 8 3 6 5 12

Решење: Ако кренемо од празног низа (можемо га иницијално попунити нулама), карте можемо попунити тако што кренемо од почетка, затим прескочимо једно празно место и упишемо јединицу, затим прескочимо два празна места и упишемо двојку, затим прескочимо три празна места и упишемо тројку и тако даље. Можемо приметити да када се број повећа и број празних места смањи, прескакање празних места и по неколико пута обилази низ. Ако прескочимо сва празна места у низу (којих у k-том кораку има $n-k+1$ долазимо на исто место са ког смо пошли, па се убрзање може постићи тако што пре прескакања k празних места пронађемо остатак тог броја при дељењу са $n-k+1$.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> karta(n, 0);
  // trenutna pozicja
  int p = n-1;
  for (int k = 1; k <= n; k++) {
    // treba da preskocimo k praznih pozicija
    // posto je preostalo n-k+1 praznih, one se ciklicno ponavljaju,
    // pa je dovoljno preskociti k % (n-k+1) praznih pozicija
    for (int i = 1; i <= (k % (n-k+1)) + 1; i++) {
      // pomeramo se na narednu poziciju i preskacemo sve
      // pune pozicije do naredne prazne
      while (karta[p = (p + 1) % n] != 0)
        ;
    }
    // upisujemo broj k na trenutnu poziciju
    karta[p] = k;
  }
  // ispisujemo konacan rezultat
  for (int k : karta)
    cout << k << " ";
  cout << endl;
  return 0;
}

#include <iostream>
```

```
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> karta(n, 0);
  // trenutna pozicja
  int p = n-1;
  for (int k = 1; k <= n; k++) {
    // treba da preskocimo k praznih pozicija
    // posto je preostalo n-k+1 praznih, one se ciklicno ponavljaju,
    // pa je dovoljno preskociti k % (n-k+1) praznih pozicija
    for (int i = 1; i <= (k % (n-k+1)) + 1; i++) {
      // pomeramo se na narednu poziciju i preskacemo sve
      // pune pozicije do naredne prazne
      while (karta[p = (p + 1) % n] != 0)
        ;
    }
    // upisujemo broj k na trenutnu poziciju
    karta[p] = k;
  }
  // ispisujemo konacan rezultat
  for (int k : karta)
    cout << k << " ";
  cout << endl;
  return 0;
}
```

Празна места (тј. њихове позиције) можемо чувати у листи, јер нам она даје могућност да веома ефикасно избацимо елемент из средине. Приликом кретања по листи морамо водити рачуна о томе да када стигнемо до краја, обилазак кренемо из почетка.

Међутим, још ефикасније решење од употребе листе је то да слободну позицију која следи након прескакања k слободних позиција одредимо као m-ту слободну позицију у низу. Наиме, ако знамо да пре текуће позиције постоји p слободних позиција тада уместо да од текуће позиције прескачемо p позиција можемо од почетка низа прескочити $p + k$ позиција и елемент `k` уписати на позицију `p+k+1`. На пример, ако у низу `. 1 . . 2 . . . . .` тражимо позицију на коју треба да упишемо број `3` од елемента `2` треба да прескочимо 3 празне позиције, међутим, пошто пре елемента `2` постоји 3 празне позиције од почетка низа прескачемо $3 + 3 = 6$ празних позиција и елемент `3` уписујемо на седму празну позицију у низу чиме добијамо `. 1 . . 2 . . 3 . .`. Ичак, треба бити обазрив, јер се некада долази до краја низа, па се бројање враћа на почетак низа. Зато број празне позиције на коју треба уписати елемент `k` заправо није увек $p + k + 1$, већ је једнак $\mod (p + k)(n - k + 1) + 1$. Нпр. ако у низу `. 1 . . 2 . . . 3 .` желимо да одредимо позицију елемента `4` знамо да се пре елемента `3` налази 6 празних позиција, што значи да елемент `4` треба да упишемо на празну по-

зицију чији је редни број $\mod(6+4)7+1=4$, чиме добијамо низ `. 1 . . 2 4 . . 3 .`. Слично, пошто пре елемента 4 има 3 празне позиције елемент 5 уписујемо на позицију са редним бројем $\mod(3+5)6+1=3$ чиме добијамо низ `. 1 . 5 2 4 . . 3 .`.

Остаје питање како одредити k-ту празну позицију у низу, међутим, то можемо урадити истом техником којом смо у задатку К-ти парни број одређивали k-ти по реду паран број у низу који се мења (овде је ажурирање само такво да празне позиције могу постати непразне).

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

// operacije za rad sa Fenvikovim drvetom

void dodaj(vector<int>& drvo, int k, int v) {
  while (k < drvo.size()) {
    drvo[k] += v;
    k += k & -k;
  }
}

int zbirPrefiksa(const vector<int>& drvo, int k) {
  int zbir = 0;
  while (k > 0) {
    zbir += drvo[k];
    k -= k & -k;
  }
  return zbir;
}

// vraca prvu poziciju p tako da je zbir niza na pozicijama [1, p]
// veci ili jednak k
int prefiksK(const vector<int>& drvo, int k) {
  // poziciju pronalazimo binarnom pretragom po vrednosti zbira prefiksa
  int l = 1, d = drvo.size() - 1;
  while (l <= d) {
    int s = l + (d - l) / 2;
    if (zbirPrefiksa(drvo, s) < k)
      l = s + 1;
    else
      d = s - 1;
  }
  return l;
}
```

```
int main() {
  // broj i niz karata
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> karta(n, 0);

  // Fenvikovo drvo nad nizom koji cuva 1 na praznim i 0 na
  // zauzetim pozicijama (brojanje krece od 1)
  vector<int> drvo(n + 1, 0);
  for (int k = 1; k <= n; k++)
    dodaj(drvo, k, 1);

  // trenutna slobodna pozicija
  int p = 0;
  for (int k = 1; k <= n; k++) {
    // treba da se pomerimo za k praznih pozicija

    // posto je preostalo n-k+1 praznih, one se ciklicno ponavljaju,
    // pa je dovoljno preskociti k % (n-k+1) praznih pozicija

    // odredjujemo najmanju poziciju takvu da se zakljucno sa njom
    // nalazi za k slobodnih pozicija vise nego sto se nalazi
    // zakljucno sa trenutnom slobodnom pozicijom (sve po modulu n-k+1)
    p = prefiksK(drvo, (zbirPrefiksa(drvo, p) + k) % (n-k+1) + 1);

    // upisujemo kartu, poziciju oznacavamo punom i azuriramo drvo drvo
    karta[p-1] = k;
    dodaj(drvo, p, -1);
  }

  // ispisujemo konacan raspored karata
  for (int k : karta)
    cout << k << " ";
  cout << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Инверзије након избацивања сегмената

Поставка: Дат је низ a, који се састоји од n позитивних целих бројева. Написати програм који ће да преброји колико има парова бројева l и r таквих да је $1 \leq l < r \leq n$ и да низ $b = a_1 a_2 \ldots a_l a_r a_{r+1} \ldots a_n$ нема више од k инверзија.

Два цела броја у низу b образују инверзију када се већи број појављује пре мањег броја, тј. за пар b_i, b_j чланова низа b кажемо да образују инверзију ако важи да је $1 \leq i < j \leq |b|$ и $b_i > b_j$, где је $|b|$ величина низа b.

Улаз: У првој линији стандардног улаза дата су два цела броја k и n ($2 \leq n \leq 10^5, 0 \leq k \leq 10^{18}$) – максималан број дозвољених инверзија и величина низа a. Следећа линија садржи n позитивних целих бројева раздвојених са по једним размаком $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \leq a_i \leq 10^9$) – елементи низа a.

Излаз: У јединој линији стандардног излаза исписати само један број – број парова (решење задатка).

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**		**Пример 4**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`1 3` `1 3 2`	`3`	`0 3` `1 3 2`	`1`	`2 5` `1 5 4 1 100`	`6`	`4 5` `1 5 4 1 100`	`10`

Решење:

Решење грубом силом

Решење грубом силом подразумева да се обраде сви парови (l, r) и да се за сваки пар преброје инверзије низа. Пошто парова има $O(n^2)$, ово решење је веома неефикасно, чак и када се инверзије броје на неки ефикасан начин (као што је приказано у задатку Број инверзија). Наиме, број инверзија датог низа се може грубом силом одредити у сложености $O(n^2)$, што доводи до укупне сложености од чак $O(n^4)$. Ефикаснијим алгоритмима се број инверзија може одредити у сложености $O(n \log n)$, што доводи до укупне сложености $O(n^3 \log n)$ што је и даље недопустиво велико.

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
  long long maksInverzija;
  cin >> maksInverzija;

  int n;
  cin >> n;
  vector<int> a(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> a[i];
  int brojParova = 0;
  for (int l = 0; l < n-1; l++) {
    for(int r = l + 1; r < n; r++) {
      int brojInverzija = 0;
      for (int i = 0; i < n && brojInverzija <= maksInverzija; i++)
        if (i <= l || i >= r)
          for (int j = i+1; j < n && brojInverzija <= maksInverzija; j++)
            if (j <= l || j >= r)
              if (a[i] > a[j])
                brojInverzija++;
      if (brojInverzija <= maksInverzija)
        brojParova++;
```

```
    }
  }
  cout << brojParova << endl;
  return 0;
}
```

Техника два показивача

У основи ефикаснијег решења лежи техника два показивача која нам омогућава да експлицитно проверимо само линеарни број парова (l, r).

Означимо са $I(l, r)$ број инверзија низа одређеног паром (l, r) (тј. број инверзија низа $a_0, \ldots, a_l, a_r, \ldots, a_{n-1}$ и са I_{max} максимални допуштени број инверзија.

Желимо да за сваки десни крај r одредимо број левих крајева l таквих да је је $I(l, r) \leq I_{max}$.

Ако пронађемо највећу вредност $l_{max} < r$ такву да је $I(l_{max}, r) \leq I_{max}$, знамо да ће важити и да је $I(0, r) \leq I_{max}$, $I(1, r) \leq I_{max}$, ..., $I(l_{max}, r) \leq I_{max}$ (јер за мање вредност левог краја број искључених елемената низа расте, па инверзија може бити само мање него у низу одређеном паром (l_{max}, r)), док ће са друге стране важити $I(l_{max} + 1, r) > I_{max}$, ..., $I(r - 1, , r) > I_{max}$ (јер за веће вредности левог краја број ислкучених елемената низа опада, па инверзија може бити само више него у низу одређеном паром (l_{max}, r)). То значи да се налажењем те највеће вредности l_{max} може утврдити да постоји тачно $l_{max} + 1$ један пар са десним крајем r који одређује низ са допуштеним бројем инверзија.

Још један случај који се може јавити је да ни за једно l не важи да је да је број инверзија низа одређеног паром (l, r) унутар допуштеног прага тј. да је $I(0, r) > I_{max}$ и тада смо сигурни да не постоји ни један пар одређен десним крајем r који одређује низ са допуштеним бројем инверзија, па ни вредност l_{max} није коректно дефинисана.

Зато свако r дефинишимо функцију која одређује тражену вредност l, тј. нека је $l(r) = l_{max}$ ако таква вредност постоји, односно да је $l(r) = 0$ ако таква вредност не постоји и тражени број парова једнак је збиру вредности $l(r) + 1$ за оне r за које је $l(r) = l_{max}$ тј. за које је $I(0, r) \leq I_{max}$ (оне вредности r за које је $I(0, r) > I_{max}$ не доприносе броју парова).

Имплементацију организујемо око петље у којој се одржавају две променљиве $l < r$ и променљива I у којој чувамо број инверзија $I(l, r)$. Вредности иницијализујемо на $l = 0$ и $r = 1$, док број инверзија иницијализујемо на укупан број инверзија у низу (о његовом ефикасном израчунавању биће речи мало касније).

За свако r покушавамо да пронађемо $l(r)$. Ако $I = I(l, r) \leq I_{max}$ и ако је $l + 1 < r$, тада је $l(r) \geq l$. Увећањем вредности l у низ који се разматра се додаје елемент a_{l+1}, чиме се број инверзија увећава тачно за број инверзија у којима учествује тај елемент. Тај број је одређен елеменатима у интервалу $[0, l]$ који су строго већи од a_{l+1} и елементима у интервалу $[r, n)$ који су строго мањи од a_{l+1} (и о начину њиховог ефикасног проналажења ће бити мало више речи касније). Ако је збир текућег броја инверзија I и броја инверзија одређеног елементом a_{l+1} мањи или једнак од допуштеног прага l се увећава и поступак се понавља све док l не достигне вредност $r - 1$ или док се не пронађе вредност l таква да се укључивањем елемента $l + 1$ број инверзија повећава

изнад прага (то је тражена вредност $l(r) = l_{max}$). На тај начин одређујемо нашу тражену последњу вредност l и број пронађених парова повећавамо за $l + 1$. Ако је $l = 0$ и ако је $I(l, r) > I_{max}$, тада је $l(r) = 0$.

Након проналажења вредности $l(r)$ за тренутну вредност r, можемо прећи на наредну вредност десног краја тј. на вредност $r + 1$. Потребно је да одредимо $l(r + 1)$. Повећањем вредности r из низа избацујемо вредност a_r и број инверзија ажурирамо тако што одузмемо тачно оне инверзије у којима је учествовао елемент a_r. Тај број је одређен свим елементима из интервала $[0, l]$ који су строго већи од a_r и свим елементима из интервала $[r + 1, n)$ који су строго мањи од a_r (и о њиховом ефикасном одређивању биће више речи касније). Након тога се увећава r и потребно је одредити $l(r)$ за увећано r. Кључна опаска је да l не морамо тражити из почетка, већ претрагу можемо наставити од тренутне вредности l, јер је $l(r)$ моното неопадајућа функција по r. Наиме, ако је $l(r) = 0$ и ако је $I(0, r) > I_{max}$, тада је тривијално $l(r+1) \geq 0$. У супротном, ако је $l(r) = l_{max}$ тада је $I(l, r) \leq I_{max}$, па је $I(l, r+1) \leq I(l, r)$ (повећавањем вредности r број инверзија се само може смањити), па је онда $l(r + 1) \geq l_{max}$ (важи да је $I(l_{max}, r) \leq I_{max}$, па се последња позиција l_{max} за увећано r може налазити само десно од последње позиције $l = l_{max}$ пре увећања r). Зато након увећања r, претрагу за $l(r)$ настављамо од текуће вредности l, тако што l увећавамо све док не достигне вредност $r - 1$ или вредност такву да је $I(l, r) \leq I_{max}$ и $I(l + 1, r) > I_{max}$ (то је онда вредност l_{max}).

С обзиром на то да се и l и r само могу увећавати, највећи број итерација ове петље је $2n$.

Остаје још неколико питања које је потребно решити да би се добила ефикасна имплементација:

- како одредити почетни број инверзија,
- како одређивати број инверзија за елемент a_{l+1} који се убацује у низ и
- како одређивати број инверзија за елемент a_r који се избацује из низа?

Један начин је да се ово уради грубом силом. Почетни број инверзија се може грубом силом одредити у сложености $O(n^2)$ и то се ради само једном. Број инверзија са сваки конкретан елемент се може грубом силом урадити у сложености $O(n)$. Тај корак се извршава $O(n)$ пута (приликом сваке промене вредности l и r). Све заједно сложеност је $O(n^2)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
using namespace std;

long long brojInverzija(const vector<int>& a) {
  int broj = 0;
  for (int i = 0; i < a.size(); i++)
    for (int j = i+1; j < a.size(); j++)
      if (a[i] > a[j])
        broj++;
  return broj;
```

```
}

int levoVecih(const vector<int>& a, int l, int x) {
  int broj = 0;
  for (int i = 0; i <= l; i++)
    if (a[i] > x)
      broj++;
  return broj;
}

int desnoManjih(const vector<int>& a, int r, int x) {
  int broj = 0;
  for (int i = r; i < a.size(); i++)
    if (a[i] < x)
      broj++;
  return broj;
}

int main() {
  long long maksInverzija;
  cin >> maksInverzija;
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> a(n);
  for(int i = 0; i < n; i++)
    cin >> a[i];

  long long brojParova = 0;
  int l = 0, r = 1;
  long long inverzija = brojInverzija(a);
  while (r < a.size()) {
    while (true) {
      if (l+1 == r)
        break;
      int uvecanje = levoVecih(a, l, a[l+1]) + desnoManjih(a, r, a[l+1]);
      if (inverzija + uvecanje > maksInverzija)
        break;
      l++;
      inverzija += uvecanje;
    }
    if (inverzija <= maksInverzija)
      brojParova += l + 1;
    int umanjenje = levoVecih(a, l, a[r]) + desnoManjih(a, r+1, a[r]);
    inverzija -= umanjenje;
    r++;
  }
  cout << brojParova << endl;
```

```
  return 0;
}
```

Структуре података

За ефикасно одређивање укупног броја инверзија и броја инверзија датог елемента можемо употребити ефикасне структуре података. У сва три случаја потребно је да имамо структуру података која подржава следеће операције: додавање елемента у скуп, избацивање елемента из скупа одређивање броја елемената скупа који су мањи од дате вредности и одређивање броја елемената скупа који су већи од дате вредности. Пошто у низу може бити једнаких елемената, уместо скупа је потребно употребити неки облик мултискупа.

Мултискупови

Делује наизглед да добро решење може бити библиотечка колекција `multiset`. Уметање и брисање је могуће извршити у времену $O(\log n)$. Број елемената строго већих од датог можемо одредити тако што пронађемо итератор на први елемент који је строго већи од датог (методом `upper_bound`) и одредимо његово растојање од краја низа (функцијом `distance`). Слично, број елемената који су строго мањи од датог можемо одредити тако што пронађемо итератор на први елемент који је већи или једнак од датог (методом `lower_bound`) и пронађемо растојање од почетка низа до тог елемента (функцијом `distance`). Методе `lower_bound` и `upper_bound` су ефикасне (захтевају логаритамско време у односу на број елемената скупа), међутим, растојање између два итератора колекције `multiset` тј. функција `distance` захтева линеарно време (за разлику од итератора у линеарним колекцијама попут вектора, где је то време константно). Због тога је укупна временска сложеност овог приступа квадратна (линеарни број пута се померају границе l и r и при сваком померању морамо да урадимо операције над скупом које су линеарне сложености).

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <algorithm>
using namespace std;

// broj elemenata u skupu koji su strogo veci od vrednosti k
long long brojVecihOd(int k, const multiset<int>& skup) {
  return distance(skup.upper_bound(k), skup.end());
}

// broj elemenata u skupu koji su strogo manji od vrednosti k
long long brojManjihOd(int k, const multiset<int>& skup) {
  return distance(skup.begin(), skup.lower_bound(k));
}


int main() {
  // ucitavamo ulazne podatke
```

```
long long maksInverzija;
cin >> maksInverzija;
int n;
cin >> n;
vector<int> a(n);
for(int i = 0; i < n; i++)
  cin >> a[i];

// brojimo ukupan broj inverzija polaznog niza
long long brojInverzija = 0;
multiset<int> vidjeni;
for (int i = 0; i < n; i++) {
  brojInverzija += brojVecihOd(a[i], vidjeni);
  vidjeni.insert(a[i]);
}

// trazeni broj parova (l, r)
long long brojParova = 0;

// krecemo od para (0, 1)
int l = 0, r = 1;

// skup elemenata na pozicijama [0, L]
multiset<int> DoL;
DoL.insert(a[0]);
// skup elemenata na pozicijama [R, n)
multiset<int> OdR = vidjeni;
OdR.erase(OdR.find(a[0]));

// za svaku mogucu vrednost desnog kraja
while (r < a.size()) {
  // odredjujemo poslednju vrednost l takvu da je broj inverzija kada se
  // izbace elementi iz intervala (l, r) manji od zadate granice
  while (true) {
    // posto mora da vazi l < r, l vise nije moguce uvecati
    if (l+1 == r)
      break;
    // ispitujemo da li je moguce povecati l, tj. ubaciti element a[l+1]
    int uvecanje = brojVecihOd(a[l+1], DoL) + brojManjihOd(a[l+1], OdR);
    // ako nije, trenutno l je poslednje moguce
    if (brojInverzija + uvecanje > maksInverzija)
      break;
    // u suprotnom ubacujemo a[l+1] u skup, azuiramo broj inverzija
    // i povecavamo l
    brojInverzija += uvecanje;
    DoL.insert(a[l+1]);
    l++;
```

```
    }

    // ako je broj inverzija za trenutni par (l, r) ispod dopustene
    // granice, takav je i broj inverzija za sve parove
    // (0, r), (1, r), ..., (l, r)
    if (brojInverzija <= maksInverzija)
      brojParova += l + 1;

    // uvecavamo r tako sto izbacujemo a[r] iz skupa i azuriramo broj
    // inverzija
    int umanjenje = brojVecihOd(a[r], DoL) + brojManjihOd(a[r], OdR);
    brojInverzija -= umanjenje;
    OdR.erase(OdR.find(a[r]));
    r++;
  }

  // ispisujemo konacan rezultat
  cout << brojParova << endl;

  return 0;
}
```

Фенвиково дрво

Ако знамо да елементи скупа долазе из неког интервала облика $[1, n]$, мултискуп можемо реализовати помоћу низа у ком на свакој позицији i чувамо број појављивања елемента i. Пошто не знамо унапред распон вредности, на почетку рада елементе низа преводимо у њихов ранг тј. редослед у сортираном низу, при чему ранг бројимо од 1. Та операција не утиче на број инверзија.

Додавање елемента у скуп се своди на увећање броја његових појављивања за 1, а уклањање елемента из скупа на умањивање броја његових појављивања за 1. Број елемената мањих од датог елемента i одређујемо као збир префикса низа на позицијама $[1, i)$, а број елемената већих од датог елемента i као збир суфикса низа на позицијама $[i, n)$. Дакле, потребна нам је структура података која нам допушта да у низу чији се елементи често мењају ефикасно израчунавамо збирове произвољних префикса и суфикса.

Једно ефикасно решење можемо добити ако употребимо *Фенвиково дрво* (тј. *бинарно-индексирано дрво*, BIT). Подсетимо се, оно у листовима чува вредности неког низа, док у унутрашњим чворовима чува парцијалне збирове одређених сегмената који нам онда омогућавају да у логаритамској сложености одредимо збир произвољног префикса дрвета. Пошто се збир било ког сегмента (укључујући и суфиксе) може добити као разлика збира два префикса, Фенвиково дрво нам омогућава да ефикасно одредимо збир било ког сегмента оригиналног низа.

Овим сложеност операције додавања елемента у мултискуп, брисања елемента из мултискупа, као и одређивања броја елемената мањих од датог и одређивања броја елемената већих од датог постаје логаритамска у односу на број елемената у мултискупу. Зато је одређивање броја инверзија сваког појединачног елемента сложености $O(\log n)$,

па одређивање почетног броја инверзија има сложеност $n \log n$. Свако померање индекса l и r постаје сложености $O(n)$, па пошто се индекси померају $O(n)$ пута, укупна сложеност алгоритма постаје $O(n \log n)$, што је прилично ефикасно у односу на сва раније решења.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
using namespace std;

/* Fenvikovo drvo */

// uvecava se element na poziciji k Fenvikovog drveta za vrednost v i
// azurira se drvo
void uvecaj(vector<int>& drvo, int k, int v) {
  while (k < drvo.size()) {
    drvo[k] += v;
    k += k & -k;
  }
}

// ubacuje element k u Fenvikovo drvo koje predstavlja skup
void ubaci(vector<int>& drvo, int k) {
  uvecaj(drvo, k, +1);
}

// izbacuje element k iz Fenvikovog drveta koje predstavlja skup
void izbaci(vector<int>& drvo, int k) {
  uvecaj(drvo, k, -1);
}

// zbir prefiksa [1, k] Fenvikovog drveta
long long zbirPrefiksa(const vector<int>& drvo, int k) {
  long long zbir = 0;
  while (k > 0) {
    zbir += drvo[k];
    k -= k & -k;
  }
  return zbir;
}

// zbir sufiksa (k, n] Fenvikovog drveta
long long zbirSufiksa(const vector<int>& drvo, int k) {
  return zbirPrefiksa(drvo, drvo.size() - 1) - zbirPrefiksa(drvo, k);
}

// broj elemenata u skupu predstavljenim Fenvikovim drvetom koji su
// strogo veci od vrednosti k
```

```
long long brojVecihOd(int k, const vector<int>& drvo) {
  return zbirSufiksa(drvo, k);
}

// broj elemenata u skupu predstavljenim Fenvikovim drvetom koji su
// strogo manji od vrednosti k
long long brojManjihOd(int k, const vector<int>& drvo) {
  return zbirPrefiksa(drvo, k-1);
}


int main() {
  // ucitavamo ulazne podatke
  long long maksInverzija;
  cin >> maksInverzija;
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> a(n);
  for(int i = 0; i < n; i++)
    cin >> a[i];

  // odredjujemo rang svakog elementa da bismo elemente mogli da
  // smestamo u Fenvikovo drvo
  vector<int> b = a;
  sort(begin(b), end(b));
  for (int i = 0; i < n; i++)
    a[i] = distance(begin(b), lower_bound(begin(b), end(b), a[i])) + 1;


  // brojimo ukupan broj inverzija polaznog niza
  long long brojInverzija = 0;
  vector<int> BIT(n+1, 0);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    brojInverzija += brojVecihOd(a[i], BIT);
    ubaci(BIT, a[i]);
  }

  // trazeni broj parova (l, r)
  long long brojParova = 0;

  // krecemo od para (0, 1)
  int l = 0, r = 1;

  // skup elemenata na pozicijama [0, L]
  vector<int> BITDoL(n+1, 0);
  ubaci(BITDoL, a[0]);
  // skup elemenata na pozicijama [R, n)
```

```
  vector<int> BITOdR = BIT;
  izbaci(BITOdR, a[0]);

  // za svaku mogucu vrednost desnog kraja
  while (r < a.size()) {
    // odredjujemo poslednju vrednost l takvu da je broj inverzija kada se
    // izbace elementi iz intervala (l, r) manji od zadate granice
    while (true) {
      // posto mora da vazi l < r, l vise nije moguce uvecati
      if (l+1 == r)
        break;
      // ispitujemo da li je moguce povecati l, tj. ubaciti element a[l+1]
      long uvecanje = brojVecihOd(a[l+1], BITDoL) +
                      brojManjihOd(a[l+1], BITOdR);
      // ako nije, trenutno l je poslednje moguce
      if (brojInverzija + uvecanje > maksInverzija)
        break;
      // u suprotnom ubacujemo a[l+1] u skup, azuiramo broj inverzija
      // i povecavamo l
      brojInverzija += uvecanje;
      ubaci(BITDoL, a[l+1]);
      l++;
    }

    // ako je broj inverzija za trenutni par (l, r) ispod dopustene
    // granice, takav je i broj inverzija za sve parove
    // (0, r), (1, r), ..., (l, r)
    if (brojInverzija <= maksInverzija)
      brojParova += l + 1;

    // uvecavamo r tako sto izbacujemo a[r] iz skupa i azuriramo broj
    // inverzija
    long umanjenje = brojVecihOd(a[r], BITDoL) +
                     brojManjihOd(a[r], BITOdR);
    brojInverzija -= umanjenje;
    izbaci(BITOdR, a[r]);
    r++;
  }

  // ispisujemo konacan rezultat
  cout << brojParova << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Број различитих елемената у сегментима

Поставка: Напиши програм који одређује број различитих елемената у сваком од m датих сегмената низа од n елемената.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број n ($1 \leq n \leq 50000$), а затим n целих бројева $a_1, \ldots, a_n$, чије су вредности између 1 и 100000. Након тога се учитава број m ($1 \leq m \leq 50000$) а затим у наредних m редова лева и десна граница затвореног сегмента $[l_i, d_i]$, раздвојене са по једним размаком ($1 \leq l_i \leq d_i \leq n$).

Излаз: На стандардни излаз исписати m бројева од којих сваки представља број различитих елемената у сегменту $a_{l_i}, \ldots a_{d_i}$.

Пример

Улаз	*Излаз*
5	3
1 1 2 1 3	2
3	3
1 5	
2 4	
3 5	

Решење: Решење грубом силом подразумева да за сваки сегмент избројимо различите елементе (на пример, коришћењем структуре података за чување скупова). Оно је прилично неефикасно.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <unordered_set>

using namespace std;

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> a(n + 1);
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    cin >> a[i];
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    int l, d;
    cin >> l >> d;
    unordered_set<int> elementi;
    for (int j = l; j <= d; j++)
      elementi.insert(a[j]);
    cout << elementi.size() << endl;
  }
  return 0;
}
```

Основна идеја ефикасног решења задатка је да ако знамо позиције последњих појављивања елемената низа унутар неког сегмента позиција $[1, d]$ тада можемо лако одредити број различитих елемената у сваком од сегмената $[l, d]$ као број таквих позиција које припадају том сегменту. Можемо креирати низ дужине d који садржи јединице на местима на којима се елемент јавља последњи пут у сегменту и нуле на местима на којима се налазе елементи који се у том сегменту јављају и касније. На пример, ако је дато 10 елемената низа $3, 4, 1, 3, 2, 5, 4, 7, 2, 3$, тада можемо направити низ $0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1$. За сваки сегмент облика $[l, d]$ (за фиксиран десни крај d) број различитих елемената можемо добити израчунавањем броја јединица у одговарајућем сегменту низа нула и јединица. Заиста, за сваку групу једнаких елемената само постоји само једна јединица и сваки елемент се броји само једном. За сваки елемент који припада сегменту $[l, d]$ постоји бар једна јединица у том сегменту која му одговара (ако је тренутно појављивање елемента последње, онда је јединица на његовом месту, а ако није, онда сигурно постоји јединица негде иза њега која му одговара). Приметимо да то не мора да важи за сегменте који се не завршавају на позицији d.

Низ нула и јединица можемо одржавати инкрементално. Наиме, за сваки нови елемент полазног низа на крај низа додајемо јединицу (ово његово појављивање је сигурно последње). Додатно, можемо проверити да ли се раније појављивао и ако јесте пронаћи позицију његовог ранијег последњег појављивања и променити јединицу на тој позицији у нулу. Позиције последњих појављивања елемената можемо чувати у засебној мапи.

Ово нам указује на то да би добро било да унете сегменте сортирамо на основу десних крајева и обрађивати их у том редоследу. Низ нула и јединица можемо чувати у Фенвиковом или сегментном стаблу, што нам омогућава да ефикасно ажурирамо појединачне вредности и одређујемо збирове његових суфикса.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <unordered_map>
#include <algorithm>

using namespace std;

// operacije za rad sa Fenvikovim drvetom

void dodaj(vector<int>& drvo, int k, int v) {
  while (k < drvo.size()) {
    drvo[k] += v;
    k += k & -k;
  }
}

int zbirPrefiksa(const vector<int>& drvo, int k) {
  int zbir = 0;
  while (k > 0) {
    zbir += drvo[k];
    k -= k & -k;
```

```
  }
  return zbir;
}

int zbirSegmenta(const vector<int>& drvo, int l, int d) {
  return zbirPrefiksa(drvo, d) - zbirPrefiksa(drvo, l-1);
}


int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> a(n + 1);
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    cin >> a[i];

  int m;
  cin >> m;

  struct Upit {
    int l, d, i;
  };

  vector<Upit> upiti(m);
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    cin >> upiti[i].l >> upiti[i].d;
    upiti[i].i = i;
  }

  sort(begin(upiti), end(upiti),
       [](const auto& u1, const auto& u2) {
         return u1.d < u2.d;
       });

  unordered_map<int, int> prethodna_pozicija;
  vector<int> drvo(n + 1, 0);
  vector<int> rezultat(m);
  int tekuci_upit = 0;
  for (int i = 1; tekuci_upit < upiti.size() && i <= n; i++) {
    auto it = prethodna_pozicija.find(a[i]);
    if (it != prethodna_pozicija.end()) {
      dodaj(drvo, it->second, -1);
      it->second = i;
    } else {
      prethodna_pozicija[a[i]] = i;
    }
```

```
    dodaj(drvo, i, 1);
    while (tekuci_upit < upiti.size() && upiti[tekuci_upit].d == i) {
      rezultat[upiti[tekuci_upit].i] =
        zbirSegmenta(drvo, upiti[tekuci_upit].l, i);
      tekuci_upit++;
    }
  }

  for (int x : rezultat)
    cout << x << '\n';

  return 0;
}
```

Лења сегментна дрвета

Видели смо да и сегментна и Фенвикова дрвета подржавају ефикасно израчунавање статистика одређених сегмената (распона) низа и ажурирање појединачних елемената низа. Ажурирање целих сегмената низа одједном није директно подржано. Ако се оно сведе на појединачно ажурирање свих елемената унутар сегмента, добија се лоша сложеност.

Могуће је једноставно употребити Фенвиково дрво тако да се ефикасно подржи увећавање свих елемената из датог сегмента одједном, али онда се губи могућност ефикасног израчунавања збирова елемената сегмената, већ је само могуће ефикасно враћати вредности појединачних елемената полазног низа. Основна идеја је да се одржава низ разлика суседних елемената полазног низа и да се тај низ разлика чува у Фенвиковом дрвету. Увећавање свих елемената сегмената полазног низа за неку вредност x, своди се на промену два елемента низа разлика, док се реконструкција елемента полазног низа на основу низа разлика своди на израчунавање збира одговарајућег префикса, што се помоћу Фенвиковог дрвета може урадити веома ефикасно. На овај начин и ажурирање целих сегмената низа одједном и очитавање појединачних елемената можемо постићи у сложености $O(\log n)$, што није било могуће само уз коришћење низа разлика (увећавања свих елемената неког сегмента је тада било сложености $O(1)$, али је очитавање вредности из низа било сложености $O(n)$).

Ефикасно увећање свих елемената у датом сегменту за исту вредности и израчунавање збирова сегмената могуће је имплементирати помоћу одржавања два Фенвикова дрвета или помоћу тзв. *сегментних дрвета са лењом пропагацијом* (енгл. lazy propagation). Ове технике ћемо описати у наредном задатку.

Задатак: Увећања и збирови сегмената

Поставка: Напиши програм који учитава низ елемената, а затим да се више пута сви елементи низа у неком распону позиција увећају за одређену вредност и да се израчунају вредности задатих сегмената низа.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се број n ($1 \leq n \leq 100000$), а у наредној линији низ од n елемената (елементи су цели бројеви између 0 и 10, раздвојени са по једним размаком). У наредној линији налази се број m ($1 \leq m \leq 100000$), а у наредних m линија упити. Подржане су две врсте упита:

- `u` a b v – извршавање овог упита подразумева да се сви елементи низа на позицијама $[a, b]$ увећају за вредност v ($0 \leq i < n$, $-10 \leq v \leq 10$).
- `z` a b – извршавање овог упита подразумева да се израчуна и на стандардни излаз испише збир елемената низа који су на позицијама $[a, b]$.

Излаз: Стандардни излаз садржи резултате `z` упита (сваки у посебној линији).

Пример

Улаз	*Излаз*
`5`	`15`
`1 2 3 4 5`	`20`
`7`	`26`
`z 0 4`	`20`
`u 0 4 1`	`13`
`z 0 4`	
`u 1 3 2`	
`z 0 4`	
`z 0 3`	
`z 3 4`	

Решење: Решење грубом силом подразумева да се и увећавање и израчунавање збирова сегмената врши у сложености $O(n)$, па је укупна сложеност (mn).

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
  int n; cin >> n;
  vector<int> niz(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> niz[i];
  int m; cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    string upit;
    cin >> upit;
    if (upit == "u") {
      int a, b, v;
      cin >> a >> b >> v >> ws;
      for (int j = a; j <= b; j++)
        niz[j] += v;
    } else if (upit == "z") {
      int a, b;
      cin >> a >> b;
```

```
      int zbir = 0;
      for (int j = a; j <= b; j++)
        zbir += niz[j];
      cout << zbir << '\n';
    }
  }
  return 0;
}
```

Ефикасније решење можемо добити помоћу сегментног дрвета са лењом пропагацијом.

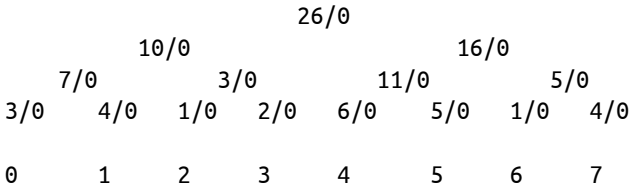
За лењу пропагацију нам је битно да знамо рад са сегментним дрветом одозго наниже.

Сваки чвор у сегментном дрвету се односи на одређени сегмент елемената полазног низа и чува збир тог сегмента. Ако се тај сегмент у целости садржи унутар сегмента који се ажурира, можемо унапред израчунати за колико се повећава вредност у корену. Наиме, пошто се свака вредност у сегменту повећава за v, тада се вредност збира тог сегмента повећава за $k \cdot v$, где је k број елемената у том сегменту. Вредност збира у корену тиме бива ажурирана у константном времену, али вредности збирова унутар поддрвета којима је то корен (укључујући и вредности у листовима које одговарају вредностима полазног низа) и даље остају неажурне. Њихово ажурирање захтевало би линеарно време, што нам је недопустиво. Кључна идеја је да се ажурирање тих вредности одложи и да се оне не ажурирају одмах, већ само током неке касније посете тим чворовима, до које би дошло и иначе (не желимо да те чворове посећујемо само због овог ажурирања, већ ћемо ажурирање урадити успут, током неке друге посете тим чворовима која би се свакако морала десити). Поставља се питање како да сигнализирамода вредности збирова у неком поддрвету нису ажурне и додатно оставимо упутство на који начин се могу ажурирати. У том циљу проширујемо чворове и у сваком од њих поред вредности збира сегмента чувамо и додатни *коефицијент лење пропагације*. Ако дрво у свом корену има коефицијент лење пропагације c који је различит од нуле, то значи да вредности збирова у целом том дрвету нису ажурне и да је сваки од листова тог дрвета потребно повећати за c и у односу на то ажурирати и вредности збирова у свим унутрашњим чворовима тог дрвета (укључујући и корен). Ажурирање се може одлагати све док вредност збира у неком чвору не постане заиста неопходна, а то је тек приликом упита израчунавања вредности збира неког сегмента. Ипак, вредности збирова у чворовима ћемо ажурирати и чешће и то заправо приликом сваке посете чвору – било у склопу операције увећања вредности из неког сегмента позиција полазног низа, било у склопу упита израчунавања збира неког сегмента. На почетку обе рекурзивне функције ћемо проверавати да ли је вредност коефицијента лење пропагације различита од нуле и ако јесте, ажурираћемо вредност збира тако што ћемо га увећати за производ тог коефицијента и броја елемената у сегменту који тај чвор представља, а затим коефицијенте лење пропагације оба његова детета увећати за тај коефицијент (тиме корен дрвета који тренутно посећујемо постаје ажуран, а његовим поддрветима се даје упутство како их у будућности ажурирати). Приметимо да се избегава ажурирање целог дрвета одједном, већ се ажурира само корен, што је операција сложености $O(1)$.

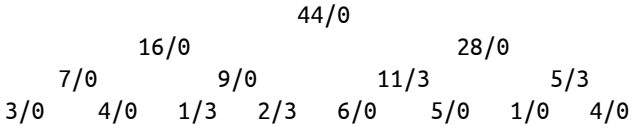
Имајући ово у виду, размотримо како се може имплементирати функција која врши

увећање свих елемената неког сегмента. Њена инваријанта ће бити да сви чворови у дрвету или садрже ажурне вредности збирова или ће бити исправно обележени за каснија ажурирања (преко коефицијента лење пропагације), а да ће након њеног извршавања корен дрвета на ком је позвана садржати актуелну вредност збира. Након почетног обезбеђивања да вредност у текућем чвору постане ажурна, могућа су три случаја. - Ако је сегмент у текућем чвору дисјунктан у односу на сегмент који се ажурира, тада су сви чворови у поддрвету којем је он корен већ или ажурни или исправно обележени за касније ажурирање и није потребно ништа урадити. - Ако је сегмент који одговара текућем чвору потпуно садржан у сегменту чији се елементи увећавају, тада се његова вредност ажурира (увећавањем за $k \cdot v$, где је k број елемената сегмента који одговара текућем чвору, а v вредност увећања), а његовој деци се коефицијент лење пропагације увећава за v. - Ако се два сегмента секу, тада се прелази на рекурзивну обраду два детета. Након извршавања функције над њима, сигурни смо да ће сви чворови у левом и десном поддрвету задовољавати услов инваријанте и да ће оба корена имати ажурне вредности. Ажурну вредност у корену постизаћемо сабирањем вредности два детета.

Прикажимо рад ове функције на једном примеру.



Прикажимо како бисмо све елементе из сегмента позиција $[2, 7]$ увећали за 3. Сегменти $[0, 7]$ и $[2, 7]$ се секу, па стога ажурирање препуштамо наследницима и након њиховог ажурирања, при повратку из рекурзије вредност одређујео као збир његових ажурираних вредности. На левој страни се сегмент $[0, 3]$ сече са $[2, 7]$ па и он препушта ажурирање наследницима и ажурира се тек при повратку из рекурзије. Сегмент $[0, 1]$ је дисјунктан у односу на $[2, 7]$ и ту онда није потребно ништа радити. Сегмент $[2, 3]$ је цео садржан у $[2, 7]$, и код њега директно можемо да знамо како се збир увећава. Пошто имамо два елемента и сваки се увећава за 3, збир се увећава укупно за $2 \cdot 3 = 6$ и поставља се на 9. У овом тренутку избегавамо ажурирање свих вредности у дрвету у ком је тај елемент корен, већ само наследницима уписујемо да је потребно пропагирати увећање за 3, али саму пропагацију одлажемо за тренутак када она постане неопходна. У повратку из рекурзије, вредност 10 увећавамо на $7 + 9 = 16$. Што се тиче десног поддрвета, сегмент $[4, 7]$ је цео садржан у сегменту $[2, 7]$, па и ту можемо израчунати вредност збира. Пошто се 4 елемента увећавају за по 3, укупан збир се увећава за $4 \cdot 3 = 12$. Зато се вредност 16 мења у 28. Пропагацију ажурирања кроз поддрво одлажемо и само његовој деци бележимо да је увећање за 3 потребно извршити у неком каснијем тренутку. При повратку из рекурзије вредност у корену ажурирамо са 26 на $16 + 28 = 44$. Након тога добија се следеће дрво.



```
0      1      2      3      4      5      6      7
```

Претпоставимо да се сада елементи из сегмента $[0, 5]$ увећавају за 2. Поново се креће од врха и када се установи да се сегмент $[0, 7]$ сече са $[0, 5]$ ажурирање се препушта деци и вредност се ажурира тек при повратку из рекурзије. Сегмент $[0, 3]$ је цео садржан у $[0, 5]$, па се зато вредсност 16 увећава за $4 \cdot 2 = 8$ и поставља на 24. Поддрвета се не ажурирају одмах, већ се само њиховим коренима уписује да је све вредности потребно ажурирати за 2. У десном поддрвету сегмент $[4, 7]$ се сече са $[0, 5]$, па се рекурзивно обрађују поддрвета. При обради чвора 11, примећује се да је он требао да буде ажуриран, међутим, још није, па се онда његова вредност ажурира и увећава за $2 \cdot 3$ и са 11 мења на 17. Његови наследници се не ажурирају одмах, већ само ако то буде потребно и њима се само уписује лења вредност 3. Тек након тога се примећује да се сегмент $[4, 5]$ цео садржи у $[0, 5]$, па се онда вредност 17 увећава за $2 \cdot 2 = 4$ и поставља на 21. Поддрвета се не ажурирају одмах, већ само по потреби тако што се у њиховим коренима постави вредност лењог коефицијена. Пошто је у њима већ уписана вредност 5 и пошто оно није ажурно, прво се та вредност 5 увећава за $2 \cdot 3 = 6$ и поставља на 11, а његовој деци се лењи коефицијент поставља на 3. Након тога се примећује да је сегмент $[6, 7]$ дисјунктан са $[0, 5]$ и не ради се ништа. У повратку кроз рекурзију се ажурирају вредности родитељских чворова и долази се до наредног дрвета.

```
                    56/0
          24/0                    32/0
    7/2         9/2         21/0         11/0
3/0   4/0   1/3   2/3   6/5   5/5   1/3   4/3

0      1      2      3      4      5      6      7
```

Функција израчунавања вредности збира сегмента остаје практично непромењена, осим што се при уласку у сваки чвор врши његово ажурирање. Прикажимо сада такве функције на текућем примеру. Размотримо како се сада израчунава збир елемената у сегменту $[3, 5]$. Крећемо од врха. Сегмент $[0, 7]$ се сече са $[3, 5]$, па се рекурзивно обрађују деца. У левом поддрвету сегмент $[0, 3]$ такође има пресек са $[3, 5]$ па прелазимо на наредни ниво рекурзије. Приликом посете чвора у чијем је корену вредност 7 примећује се да његова вредност није ажурна, па се користи прилика да се она ажурира, тако што се увећа за $2 \cdot 2 = 4$, а наследницима се лењи коефицијент увећа за 2. Пошто је сегмент $[0, 1]$ дисјунктан са $[3, 5]$, враћа се вредност 0. Приликом посете чвора у чијем је корену вредност 9 примећује се да његова вредност није ажурна, па се користи прилика да се она ажурира, тако што се увећа за $2 \cdot 2 = 4$, а наследницима се лењи коефицијент увећа за 2. Сегмент $[2, 3]$ се сече са $[3, 5]$, па се рекурзивно врши обрада поддрвета. Вредност 1 се прво ажурира тако што се повећа за $1 \cdot 5 = 5$, а онда, пошто је $[2, 2]$ дисјунктно са $[3, 5]$ враћа се вредност 0. Вредност 2 се такође прво ажурира тако што се повећа за $1 \cdot 5 = 5$, а пошто је сегмент $[3, 3]$ потпуно садржан у $[3, 5]$ враћа се вредност 7. У десном поддрвету је чвор са вредношћу 32 ажуран, сегмент $[4, 7]$ се сече са $[3, 5]$, па се прелази на обраду наследника. Чвор са вредношћу 21 је ажуран, сегмент $[4, 5]$ је цео садржан у $[3, 5]$, па се враћа вредност 21. Чвор са вредношћу 11 је такође ажуран, али је сегмент $[6, 7]$ дисјунктан у односу на $[3, 5]$, па се враћа вредност 0. Дакле, чворови 13 и 24 враћају

вредност 7, чвор 32 враћа вредност 21, па чвор 56 враћа вредност 28. Стање дрвета након извршавања упита је следеће.

```
                    56/0
          24/0                    32/0
   11/0         13/0        21/0         11/0
3/2    4/2   6/0   7/0   6/5    5/5   1/3    4/3

0      1     2     3     4      5     6      7
```

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

// ažurira elemente lenjog segmentnog drveta koje je smešteno u nizove
// drvo i lenjo od pozicije k u kome se čuvaju zbirovi elemenata
// originalnog niza sa pozicija iz segmenta [x, y] nakon što su u
// originalnom nizu svi elementi sa pozicija iz segmenta [a, b]
// uvećani za vrednost v
void uvecaj(vector<int>& drvo, vector<int>& lenjo, int k, int x, int y,
            int a, int b, int v) {
  // ažuriramo vrednost u korenu, ako nije ažurna
  if (lenjo[k] != 0) {
    drvo[k] += (y - x + 1) * lenjo[k];
    // ako nije u pitanju list propagaciju prenosimo na decu
    if (x != y) {
      lenjo[2*k] += lenjo[k];
      lenjo[2*k+1] += lenjo[k];
    }
    lenjo[k] = 0;
  }
  // ako su intervali disjunktni, ništa nije potrebno raditi
  if (b < x || y < a) return;
  // ako je interval [x, y] ceo sadržan u intervalu [a, b]
  if (a <= x && y <= b) {
    drvo[k] += (y - x + 1) * v;
    // ako nije u pitanju list propagaciju prenosimo na decu
    if (x != y) {
      lenjo[2*k] += v;
      lenjo[2*k+1] += v;
    }
  } else {
    // u suprotnom se intervali seku,
    // pa rekurzivno obilazimo poddrveta
    int s = (x + y) / 2;
    uvecaj(drvo, lenjo, 2*k, x, s, a, b, v);
    uvecaj(drvo, lenjo, 2*k+1, s+1, y, a, b, v);
```

```
    drvo[k] = drvo[2*k] + drvo[2*k+1];
  }
}

// ažurira elemente lenjog segmentnog drveta koje je smešteno
// u nizove drvo i lenjo od pozicije 1 u kome se čuvaju zbirovi
// elemenata originalnog niza sa pozicija iz segmenta [0, n-1]
// nakon što su u originalnom nizu svi elementi sa pozicija iz
// segmenta [a, b] uvećani za vrednost v
void uvecaj(vector<int>& drvo, vector<int>& lenjo,
            int a, int b, int v) {
  int n = drvo.size() / 2;
  uvecaj(drvo, lenjo, 1, 0, n-1, a, b, v);
}

// na osnovu lenjog segmentnog drveta koje je smešteno u nizove drvo i
// lenjo od pozicije k u kome se čuvaju zbirovi elemenata polaznog
// niza sa pozicija iz segmenta [x, y] izračunava se zbir elemenata
// polaznog niza sa pozicija iz segmenta [a, b]
int zbirSegmenta(vector<int>& drvo, vector<int>& lenjo,
                 int k, int x, int y, int a, int b) {
  // ažuriramo vrednost u korenu, ako nije ažurna
  if (lenjo[k] != 0) {
     drvo[k] += (y - x + 1) * lenjo[k];
     if (x != y) {
       lenjo[2*k] += lenjo[k];
       lenjo[2*k+1] += lenjo[k];
     }
     lenjo[k] = 0;
  }

  // intervali [x, y] i [a, b] su disjunktni
  if (b < x || a > y) return 0;
  // interval [x, y] je potpuno sadržan unutar intervala [a, b]
  if (a <= x && y <= b)
      return drvo[k];
  // intervali [x, y] i [a, b] se seku
  int s = (x + y) / 2;
  return zbirSegmenta(drvo, lenjo, 2*k, x, s, a, b) +
         zbirSegmenta(drvo, lenjo, 2*k+1, s+1, y, a, b);
}

// na osnovu lenjog segmentnog drveta koje je smešteno
// u nizove drvo i lenjo od pozicije 1 u kome se čuvaju zbirovi
// elemenata polaznog niza sa pozicija iz segmenta [0, n-1]
// izračunava se zbir elemenata polaznog niza sa pozicija
// iz segmenta [a, b]
```

```
int zbirSegmenta(vector<int>& drvo, vector<int>& lenjo, int a, int b) {
  // računamo doprinos celog niza,
  // tj. elemenata iz intervala [0, n-1]
  int n = drvo.size() / 2;
  return zbirSegmenta(drvo, lenjo, 1, 0, n-1, a, b);
}

// od elemenata niza a sa pozicija [x, y]
// formira se segmentno drvo i elementi mu se smeštaju u niz
// drvo krenuvši od pozicije k
void formirajDrvo(const vector<int>& a, vector<int>& drvo,
                  size_t k, size_t x, size_t y) {
  if (x == y)
    // u listove prepisujemo elemente polaznog niza
    drvo[k] = x < a.size() ? a[x] : 0;
  else {
    // rekurzivno formiramo levo i desno poddrvo
    int s = (x + y) / 2;
    formirajDrvo(a, drvo, 2*k, x, s);
    formirajDrvo(a, drvo, 2*k+1, s+1, y);
    // izračunavamo vrednost u korenu
    drvo[k] = drvo[2*k] + drvo[2*k+1];
  }
}

// najmanji stepen dvojke veci ili jednak od n
int stepenDvojke(int n) {
  int s = 1;
  while (s < n)
    s <<= 1;
  return s;
}

// na osnovu datog niza a duzine n u kom su elementi smesteni od
// pozicije 0 formira se segmentno drvo i elementi mu se smeštaju u
// niz drvo krenuvši od pozicije 1
void formirajDrvo(const vector<int>& a, vector<int>& drvo, vector<int>& lenjo) {
  // niz implicitno dopunjujemo nulama tako da mu duzina postane
  // najblizi stepen dvojke
  int n = stepenDvojke(a.size());
  drvo.resize(n * 2);
  lenjo.resize(n * 2, 0);
  // krećemo formiranje od korena koji se nalazi u nizu drvo
  // na poziciji 1 i pokriva elemente na pozicijama [0, n-1]
  formirajDrvo(a, drvo, 1, 0, n - 1);
}
```

```
int main() {
  int n; cin >> n;
  vector<int> a(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> a[i];
  vector<int> drvo, lenjo;
  formirajDrvo(a, drvo, lenjo);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    string upit;
    cin >> upit;
    if (upit == "u") {
      int a, b, v;
      cin >> a >> b >> v >> ws;
      uvecaj(drvo, lenjo, a, b, v);
    } else if (upit == "z") {
      int a, b;
      cin >> a >> b;
      cout << zbirSegmenta(drvo, lenjo, a, b) << '\n';
    }
  }

  return 0;
}
```

Задатак је могуће ефикасно решити и применом Фенвикових дрвета. Збир сваког сегмента $[a, b]$ увећаног низа разложићемо на збир сегмента $[a, b]$ полазног низа и збир свих увећања елемената сегмента $[a, b]$.

Пошто се оригинални низ не мења, збирове сегмената оригиналног низа можемо израчунати коришћењем збирова префикса (као у задатку Збирови сегмената).

Да бисмо могли ефикасно да израчунавамо збирове увећања користићемо следећу идеју. Замислимо да одржавамо низ увећања свих елемената. Он је иницијализован нулама и приликом сваког увећања неког сегмента оригиналног низа увећава се и његов одговарајући сегмент. На пример, након увећања сегмента $[a, b]$ у низ увећања има следећи облик.

U_0	$\ldots$	U_{a-1}	U_a	U_{a+1}	$\ldots$	U_b	U_{b+1}	$\ldots$	U_{n-1}
0	$\ldots$	0	v	v	$\ldots$	v	0	$\ldots$	0

Размотримо шта се дешава са префиксним збировима увећања. Познавање ових префиксних збирова нам омогућавају да лако израчунамо збир сваког сегмента $[l, d]$ и то као $Z_{d+1} - Z_l$. Нека је $Z_0 = 0$ и $Z_k = \sum_{i=0}^{k-1} U_i = U_0 + \ldots + U_{k-1}$.

Z_0	$\ldots$	Z_a	Z_{a+1}	$\ldots$	Z_b	Z_{b+1}	Z_{b+2}	$\ldots$	Z_n

0	$\ldots$	0	v	$\ldots$	$(b-a)v$	$(b-a+1)v$	$(b-a+1)v$	$\ldots$	$(b-a+1)v$

Збирови префикса Z_k увећања се могу разложити на два дела, тј. за свако $0 \leq k \leq n$ можемо дефинисати X_k и Y_k тако да је $Z_k = X_k + Y_k$.

X_0	$\ldots$	X_a	X_{a+1}	$\ldots$	X_b	X_{b+1}	X_{b+2}	$\ldots$	X_n
0	$\ldots$	0	$(a+1)v$	$\ldots$	bv	$(b+1)v$	0	$\ldots$	0
Y_0	$\ldots$	Y_a	Y_{a+1}	$\ldots$	Y_b	Y_{b+1}	Y_{b+2}	$\ldots$	Y_n
0	$\ldots$	0	$-av$	$\ldots$	$-av$	$-av$	$(b-a+1)v$	$\ldots$	$(b-a+1)v$

Можемо приметити да је $0 \leq k \leq n$ важи да је $X_k = k\bar{U}_k$, где је $\bar{U}_0 = 0$ и за $1 \leq k \leq n$ је $\bar{U}_k = U_{k-1}$. Вредности тога низа су следеће.

$\bar{U}_0$	$\ldots$	$\bar{U}_a$	$\bar{U}_{a+1}$	$\ldots$	$\bar{U}_b$	$\bar{U}_{b+1}$	$\bar{U}_{b+2}$	$\ldots$	$\bar{U}_n$
0	$\ldots$	0	v	$\ldots$	v	v	0	$\ldots$	0

Стога је за израчунавање вредности Z_k довољно познавати вредности низова $\bar{U}$ и Y. Директно ажурирање ова два низа приликом увећања сегмента захтева линеарно време. Међутим, пошто су суседни елементи ових низова у највећој мери једнаки, ефикасније је одржавати их одржавањем низова разлика њихових суседних елемената (елементи ових низова се лако могу реконструисати израчунавањем префиксних сума следећих низова разлика). Обележимо са $u_k = \bar{U}_{k+1} - \bar{U}_k$, за $0 \leq k < n$ низ разлика низа $\bar{U}$. Слично, обележимо са $y_k = Y_{k+1} - Y_k$, за $0 \leq k < n$ низ разлика низа Y.

u_0	$\ldots$	u_{a-1}	u_a	u_{a+1}	$\ldots$	u_b	u_{b+1}	$\ldots$	u_{n-1}
0	$\ldots$	0	v	0	$\ldots$	0	$-v$	$\ldots$	0
y_0	$\ldots$	y_{a-1}	y_a	y_{a+1}	$\ldots$	y_b	y_{b+1}	$\ldots$	y_{n-1}
0	$\ldots$	0	$-av$	0	$\ldots$	0	$(b+1)v$	$\ldots$	0

За $1 \leq k \leq n$ важи да је $\bar{U}_k = \sum_{i=0}^{k-1} u_i = u_0 + \ldots + u_{k-1}$ и да је $Y_k = \sum_{i=0}^{k-1} y_i = y_0 + \ldots + y_{k-1}$. Да бисмо могли да ефикасно израчунавамо њихове префиксне збирове, оба низа можемо одржавати у Фенвиковим дрветима. Тада познајући вредности низова u и y веома једноставно можемо одредити било који парцијални збир Z_k. У времену $O(\log n)$ можемо одредити $\bar{U}_k$ и Y_k, и затим $X_k = k\bar{U}_k$ и $Z_k = X_k + Y_k$.

Дакле, приликом увећања сваког елемента сегмента $[a, b]$ оригиналног низа за вредност v, у првом Фенвиковом дрвету у ком чувамо низ u елемент на позицији a увећавамо за v, елемент на позицији $b+1$ за вредност $-v$, док у другом дрвету у ком чувамо низ y елемент на позицији a увећавамо за вредност $-av$, а елемент на позицији $b+1$ за вредност $(b+1) \cdot v$. Имајући у виду особине Фенвиковог дрвета, све ово се остварује у времену $O(\log n)$.

Приликом израчунавања укупног збира увећања на позицијама сегмента $[l, d]$ рачунамо $Z_{d+1} - Z_l$. Да бисмо израчунали Z_{d+1} израчунавамо $(d+1) \cdot \bar{U}_{d+1} - Y_{d+1}$, а да

бисмо израчунали Z_l израчунавамо $l \cdot \bar{U}_l - Y_l$, при чему се $\bar{U}_{d+1}$ израчунава као збир првих d елемената низа u, $\bar{U}_l$ израчунава као збир првих $l-1$ елемената низа u, $\bar{Y}_{d+1}$ израчунава као збир првих d елемената низа y, а $\bar{Y}_l$ израчунава као збир првих $l-1$ елемената низа y.

Докажимо да се ова веза између низова U, u, y и Z одржава након сваког увећања низа. Претпоставимо да су низови $\bar{U}$, X, Y и Z дефинисани као у претходној дискусији. Претпостављамо, дакле, да важи да је за $1 \leq k \leq n$ $k\bar{U}_k + Y_k = \sum_{i=0}^{k-1} U_i$.

Претпоставимо да се у низу увећава сегмент $[a, b]$. Тада за свако $a \leq k \leq b$ важи $U'_k = U_k + v$, док је остале вредности k важи $U'_k = U_k$. Такође, $u'_a = u_a + v$, $u'_{b+1} = u_{b+1} - v$, да је $y'_a = y_a - av$, $y'_{b+1} = y_{b+1} + (b+1)v$, док за све остале индексе k важи да је $u'_k = u_k$ и $y'_k = y_k$. Докажимо да за свако $1 \leq k \leq n$ важи $k\bar{U}'_k + Y'_k = \sum_{i=0}^{k-1} U'_i$. Размотримо следеће случајеве (случај $k = 0$ је тривијалан јер у њему сви низови имају вредност 0).

- Ако је $1 \leq k \leq a$, тада је $k\bar{U}'_k + Y'_k = k(\sum_{i=0}^{k-1} u'_i) + \sum_{i=0}^{k-1} y'_i = k(\sum_{i=0}^{k-1} u_i) + \sum_{i=0}^{k-1} y_i = k\bar{U}_k + Y_k = \sum_{i=0}^{k-1} U_i = \sum_{i=0}^{k-1} U'_i$.
- Ако је $a < k \leq b$ тада је $k\bar{U}'_k + Y'_k = k(\sum_{i=0}^{k-1} u'_i) + \sum_{i=0}^{k-1} y'_i = k(\sum_{i=0}^{k-1} u_i) + kv + \sum_{i=0}^{k-1} y_i - av = \sum_{i=0}^{k-1} U_i + (k-a)v = \sum_{i=0}^{a-1} U_i + \sum_{i=a}^{k-1} (U_i + v) = \sum_{i=0}^{k-1} U'_i$.
- На крају, ако је $b < k \leq n$, $k\bar{U}'_k + Y'_k = k(\sum_{i=0}^{k-1} u'_i) + \sum_{i=0}^{k-1} y'_i = k(\sum_{i=0}^{k-1} u_i) + k(v-v) + \sum_{i=0}^{k-1} y_i + (-a+b-1)v = \sum_{i=0}^{k-1} U_i + (b+1-a)v = \sum_{i=0}^{a-1} U_i + \sum_{i=a}^{b} (U_i + v) + \sum_{i=b+1}^{k-1} U_i = \sum_{i=0}^{k-1} U'_i$.

Сложеност овог приступа је $O(n + m \log n)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

// operacije za rad sa Fenvikovim drvetom

// azurira Fenvikovo drvo smesteno u niz drvo nakon sto se
// u originalnom nizu element na poziciji k uveca za x
void dodaj(vector<int>& drvo, int k, int x) {
  k++;
  int n = drvo.size();
  while (k < n) {
    drvo[k] += x;
    k += k & -k;
  }
}

// na osnovu Fenvikovog drveta smestenog u niz drvo
// izracunava zbir prefiksa [0, k) originalnog niza
int zbirPrefiksa(const vector<int>& drvo, int k) {
```

```
  int zbir = 0;
  while (k > 0) {
    zbir += drvo[k];
    k -= k & -k;
  }
  return zbir;
}

// azurira dva Fenvikova drveta na osnovu uvecanja elemenata segmenta
// originalnog niza na pozicijama [a, b] za vrednost v
void uvecaj(vector<int>& drvo1, vector<int>& drvo2,
            int a, int b, int v) {
  dodaj(drvo1, a, v);
  dodaj(drvo1, b+1, -v);
  dodaj(drvo2, a, -a*v);
  dodaj(drvo2, b+1, (b+1)*v);
}

// na osnovu dva Fenvikova drveta izracunava koliko se uvecao zbir
// elemenata na pozicijama prefiksa [0, k)
int zbirUvecanjaPrefiksa(const vector<int>& drvo1, const vector<int>& drvo2,
                         int k) {
  return k * zbirPrefiksa(drvo1, k) + zbirPrefiksa(drvo2, k);
}

// na osnovu dva Fenvikova drveta izracunava koliko se uvecao zbir
// elemenata na pozicijama segmenta [a, b]
int zbirUvecanjaSegmenta(const vector<int>& drvo1, const vector<int>& drvo2,
                         int a, int b) {
  return zbirUvecanjaPrefiksa(drvo1, drvo2, b+1) -
         zbirUvecanjaPrefiksa(drvo1, drvo2, a);
}


int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);
  // umesto niza cuvamo zbirove svih njegovih prefiksa
  // sto ce nam omoguciti da brzo odredimo zbirove segmenata
  // originalnog niza
  int n; cin >> n;
  vector<int> zbir(n+1);
  zbir[0] = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    cin >> x;
    zbir[i+1] = zbir[i] + x;
  }
```

```
  // zbirove uvecanja segmenata mozemo brzo odrediti uz pomoc dva
  // segmentna drveta
  vector<int> drvo1(n+1, 0), drvo2(n+2, 0);

  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    string upit;
    cin >> upit;
    if (upit == "u") {
      int a, b, v;
      cin >> a >> b >> v >> ws;
      uvecaj(drvo1, drvo2, a, b, v);
      for (int i = 0; i <= n; i++)
        cout << i << " ";
      cout << endl;
      for (int i = 0; i <= n; i++)
        cout << zbirPrefiksa(drvo1, i) << " ";
      cout << endl;
      for (int i = 0; i <= n; i++)
        cout << zbirUvecanjaPrefiksa(drvo1, drvo2, i) << " ";
      cout << endl;
      for (int i = 0; i <= n; i++)
        cout << i*zbirPrefiksa(drvo1, i) << " ";
      cout << endl;
      for (int i = 0; i <= n; i++)
        cout << zbirPrefiksa(drvo2, i) << " ";
      cout << endl;
    } else if (upit == "z") {
      int a, b;
      cin >> a >> b;
      // zbir segmenata [a, b] uvecanog niza racunamo iz dva dela
      // zbir segmenta polaznog niza i
      int polazniZbir = zbir[b+1] - zbir[a];
      // zbir svih uvecanja tog segmenta
      int zbirUvecanja = zbirUvecanjaSegmenta(drvo1, drvo2, a, b);
      // zbir segmenta [a, b] uvecanog niza
      int zbirSegmenta = polazniZbir + zbirUvecanja;
      cout << zbirSegmenta << '\n';
    }
  }
}
```

Глава 2

Графови

Граф $G = (V, E)$ се састоји од скупа *чворова* V и скупа *грана* E. Најчешће грана одговара пару различитих чворова, мада су понекад дозвољене и петље, односно гране које воде од чвора ка њему самом. Граф може бити *неусмерен* или *усмерен*. Гране усмереног графа су уређени парови чворова код којих је важан редослед два чвора које повезује грана. Ако се граф представља цртежом, онда се гране усмереног графа цртају као стрелице усмерене од једног чвора (почетка) ка другом чвору (крају гране). Гране неусмереног графа су неуређени парови: оне се цртају као обичне дужи. *Степен* чвора v, $d(v)$ је број грана суседних чвору v (односно број грана које чвор v повезују са неким другим чвором). У усмереном графу разликујемо *улазни степен* чвора v који је једнак броју грана за које је чвор v крај, односно *излазни степен* чвора v који је једнак броју грана за које је чвор v почетак.

Пут од чвора v_1 до чвора v_k је низ чворова $v_1, v_2, \ldots, v_k$ повезаних гранама (v_1, v_2), $(v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$. Пут је *прост*, ако се сваки чвор у њему појављује само једном. За чвор u се каже да је *достижан* из чвора v ако постоји пут (усмерен, односно неусмерен, зависно од графа) од чвора v до чвора u. По дефиницији је чвор v достижан из v. *Циклус* је пут чији се први и последњи чвор поклапају. Циклус је *прост* ако се, сем првог и последњег чвора, ни један други чвор у њему не појављује два пута. Граф без усмерених циклуса назива се *ациклични* граф.

Неусмерен облик усмереног графа $G = (V, E)$ је исти граф, без смерова на гранама (тако да су парови чворова у E неуређени). За граф се каже да је *повезан* ако (у његовом неусмереног облику) постоји пут између свака два произвољна чвора. *Шума* је граф који (у свом неусмереном облику) не садржи циклусе. *Дрво* је повезана шума. *Коренско дрво* је усмерено дрво са једним посебно издвојеним чвором, који се зове *корен*.

Граф $H = (U, F)$ је *подграф* графа $G = (V, E)$ ако је $U \subseteq V$ и $F \subseteq E$. *Повезујуће дрво* неусмереног графа G је његов подграф који је дрво и садржи све чворове графа G. Повезујућа шума неусмереног графа G је његов подграф који је шума и садржи све чворове графа G. Ако неусмерени граф $G = (V, E)$ није повезан, онда се он може на јединствен начин разложити у скуп повезаних подграфова, који се зову *компоненте*

јаке повезаности графа G.

Репрезентација графа

Уобичајена су два начина представљања графова, Први је *матрица повезаности*, односно *матрица суседства* графа. Нека је задат граф $G = (V, E)$, за који важи $|V| = n$ и $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Матрица повезаности графа G је квадратна матрица $A = (a_{ij})$ реда n, са елементима a_{ij} који су једнаки 1 ако и само ако $(v_i, v_j) \in E$; остали елементи матрице A су нуле. Ако је граф неусмерен, матрица A је симетрична. Врста i ове матрице је дакле низ дужине n чија је j-та координата једнака 1 ако из чвора v_i води грана ка чвору v_j, односно једнака 0 у противном. Недостатак матрице повезаности је то што она увек заузима простор величине n^2, независно од тога колико грана има граф. Ако је број грана у графу мали, већина елемената матрице повезаности биће нуле. Ако се за представљање графа користи матрица повезаности, сложеност операције уклањања неке гране из графа је $O(1)$ и сложеност испитивања да ли су два чвора у графу повезана је такође $O(1)$.

У језику C++ можемо употребити следећу репрезентацију матрице.

```
bool A[MAX][MAX];
```

или, ако не знамо унапред број чворова тј. ако број чворова n сазнајемо тек у фази извршавања програма

```
vector<vector<bool>> A(n);
for (int i = 0; i < n; i++)
   A[i].resize(n);
```

Уместо да се и све непостојеће гране експлицитно представљају у матрици повезаности, могу се формирати повезане листе од јединица из i-те врсте, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Овај други начин представљања графа зове се *листа повезаности*, односно *листа суседства*. Сваком чвору придружује се повезана листа, која садржи све гране које крећу из тог чвора (односно гране ка суседним чворовима). Листа може бити уређена према редним бројевима чворова који се налазе на крајевима њених грана. Граф се онда представља низом повезаних листа. Сваки елемент низа садржи име (индекс) чвора и показивач на његову листу суседа. Треба напоменути да иако име тако сугерише, имплементација овакве репрезентације графа не мора бити заснована на листама, већ се уместо повезаних листи може користити динамички низ или нека врста балансираних бинарних дрвета или пак хеш табела. У већини наредних алгоритама сматраћемо да је граф са којим радимо динамички и да је задат листом повезаности. У језику C++ можемо употребити следећу репрезентацију.

```
vector<vector<int>> susedi(n);
```

Нову грану можемо додати помоћу

```
susedi[cvorOd].push_back(cvorDo);
```

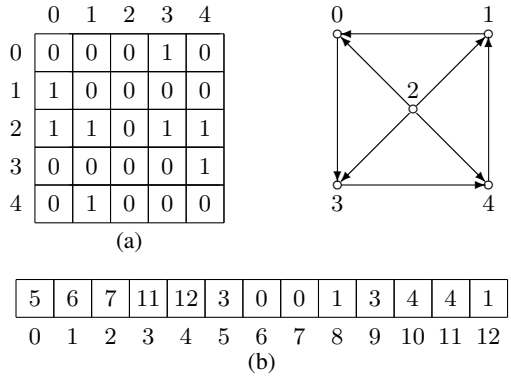
док итерацију кроз све суседне чворове задатог чвора можемо остварити помоћу

```
for (int cvorDo : susedi[cvorOd])
    ...
```

Оваква репрезентација омогућава да се у времену $O(1)$ нађу суседи сваког појединачног чвора у графу.

Матрице повезаности омогућавају да се у времену $O(1)$ испита да ли између два чвора постоји грана. С друге стране, листе повезаности омогућавају да се једноставније пронађу сви суседи неког датог чвора. Листе повезаности су меморијски ефикасније за графове са малим бројем грана (њихова меморијска сложеност је $O(V + E)$, за разлику од матрица повезаности чија је меморијска сложеност $O(V^2)$). У пракси се често ради са графовима који имају знатно мање грана од максималног могућег броја ($n*(n-1)/2$ неусмерених, односно $n*(n-1)$ усмерених грана), и тада је ефикасније користити листе повезаности.

Ако је граф *статички*, односно нису дозвољена уметања и брисања, онда се цео граф може представити помоћу једног низа целих бројева, на следећи начин. У основи је и даље репрезентација у облику листа повезаности. Користи се низ дужине $|V| + |E|$. Првих $|V|$ чланова низа су придружени чворовима. Компонента низа придружена чвору v_i садржи индекс почетка списка чворова суседних чвору v_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. На слици 2.1 на једном примеру је приказано представљање графа помоћу матрице повезаности и преко једног низа у коме се чувају све листе повезаности



Слика 2.1: Представљање графа (а) матрицом повезаности, (b) једним низом у коме су сачуване све листе повезаности.

Треба поменути да постоје и други начини за представљање графа, као што су матрице или листе инциденције где се за сваку грану чува информација са којим чворовима је инцидентна.

Претрага у дубину и ширину

Основни задаци над графом се често своде на то да се кренувши од неког почетног чвора и праћењем грана обиђу сви чворови графа који су достижни из тог полазног

чвора. Ако је граф повезан тиме ће се обићи сви његови чворови, а ако није, онда ће се обићи компонента јаке повезаности којој припада почетни чвор.

Постоје два основна алгоритма за обилазак графа: *претрага у дубину* и *претрага у ширину*.

Оба се могу представити следећом општом схемом.

```
dodaj pocetni cvor u kolekciju K
dok kolekcija K nije prazna:
    uzmi cvor c iz kolekcije K
    ako c nije oznacen:
        oznaci c
        za svaku granu cc'
           ubaci c' u kolekciju K
```

Означавањем чворова постижемо то да алгоритам не упада у бесконачну петљу. Ако је колекција K стек, тада се ради о претрази у дубину, ако је колекција K ред, ради се о претрази у ширину, а ако је у питању ред са приоритетом, ради се о претрази са приоритетом (њу у наставку нећемо детаљно описивати).

Претрага у дубину подразумева да се дуж неке путање спуштамо докле год можемо и тек када не можемо да нађемо више непосећених чворова, онда се враћамо назад и разматрамо друге гране из претходно посећених чворова. Претрага у ширину подразумева да се граф обилази по нивоима. Прво се обилази полазни чвор, затим они чворови до којих се из полазног може стићи само путем једне гране, затим они чворови до којих се из полазног може стићи само путем две гране и тако даље.

У наставку ћемо детаљније обрадити претрагу у дубину и ширину.

Претрага у дубину

Претрага у дубину се често имплементира и рекурзивно.

```
dfs(cvor c):
   ako c nije oznacen:
       oznaci c
       ulazna_obrada_cvora(c)
       za svaku granu cc'
          dfs(c')
       izlazna_obrada_cvora(c)
```

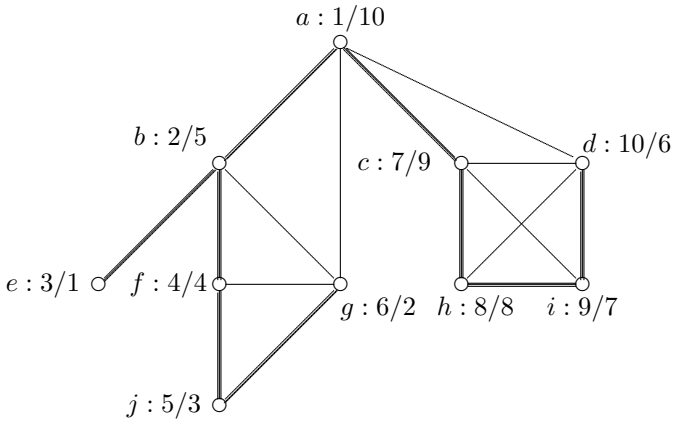
Размотримо проблем претраге у дубину када је граф задат листом повезаности и дат је чвор r графа из кога се започиње претрага. Чвор r се *означава* као посећен. Затим се у листи суседа чвора r пронађи први неозначени сусед r_1 чвора r, па се из чвора r_1 рекурзивно покреће претрага у дубину. Из неког нивоа рекурзије, покренутог из чвора v, излази се ако су сви суседи (ако их има) чвора v из кога је претрага покренута већ означени. Ако су у тренутку завршетка претраге из r_1 сви суседи чвора r означени, она се претрага за чвор r завршава. У противном се у листи суседа чвора r пронађи следећи неозначени сусед r_2, извршава се претрага полазећи од r_2, итд.

Претрага у дубину је практично иста за неусмерене и усмерене графове. Међутим, пошто желимо да испитамо неке особине графова које нису исте за неусмерене и усмерене графове, разматрање ће бити подељено на два дела.

У неким алгоритмима обраду чвора вршимо први пут када на њега наиђемо (то је тзв. **улазна обрада**), док у неким алгоритмима обраду вршимо тек на крају, када обрадимо све потомке чвора (то је тзв. **излазна обрада** чвора).

Неусмерени графови

Пример претраге графа у дубину приказан је на слици 2.2.



Слика 2.2: Пример претраге графа у дубину. Два броја уз чвор једнака су њиховим редним бројевима при долазној, односно одлазној DFS нумерацији.

Лема: Ако је граф G повезан, онда су по завршетку претраге у дубину сви чворови означени, а све гране графа G су прегледане бар по једном.

Доказ: Претпоставимо супротно, и означимо са U скуп неозначених чворова заосталих после извршавања алгоритма. Пошто је G повезан, бар један чвор u из U мора бити повезан граном са неким означеним чвором w (скуп означених чворова је непразан јер садржи бар чвор v). Међутим, овако нешто је немогуће, јер кад се посети чвор w, морају бити посећени (па дакле и означени) сви његови неозначени суседи, дакле и чвор u. Пошто су сви чворови посећени, а када се чвор посети, онда се прегледају све гране које воде из њега, закључујемо да су и све гране графа прегледане.

За неповезане графове се алгоритам DFS мора променити. Ако су сви чворови означени после првог покретања описаног алгоритма, онда је граф повезан, и обилазак је завршен. У противном, може се покренути нова претрага у дубину полазећи од произвољног неозначеног чвора, итд. Према томе, DFS се може искористити да би се установило да ли је граф повезан, односно за проналажење свих његових компоненти повезаности. Ми ћемо најчешће разматрати само повезане графове, јер се у општем случају проблем своди на посебну обраду сваке компоненте повезаности.

Приликом извршавања DFS алгоритма на неусмереном графу, свака грана се прегледа

тачно два пута, по једном са сваког краја. Према томе, укупан број извршавања тела `for` петље у свим рекурзивним позивима алгоритма DFS је $O(|E|)$. С друге стране, број рекурзивних позива је $|V|$, па се сложеност DFS алгоритма може описати изразом $O(|V| + |E|)$.

Приказаћемо сада две једноставне примене алгоритма DFS — формирање специјалног повезујућег дрвета, такозваног **DFS дрвета** и нумерацију чворова графа **DFS бројевима**.

Приликом обиласка графа G могу се у петљи којом се пролазе суседи чвора v издвојити све гране ка новоозначеним чворовима w. Преко издвојених грана достижни су сви чворови повезаног неусмереног графа, па је подграф кога чине издвојене гране повезан. Тај подграф нема циклусе, јер се од свих грана које воде у неки чвор, може издвојити само једна. Према томе, издвојене гране су гране подграфа графа G који је *дрво* — **DFS дрво графа** G. Полазни чвор је корен DFS дрвета. Чак и ако се дрво не формира експлицитно, многе алгоритме је лакше разумети разматрајући DFS дрво.

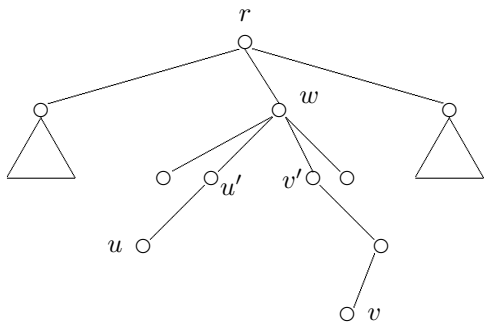
Постоје две варијанте DFS нумерације: чворови се могу нумерисати према редоследу означавања чворова (**долазна DFS нумерација**, односно *preOrder* нумерација), или према редоследу напуштања чворова (**одлазна DFS нумерација**, односно *postOrder* нумерација). Пример графа са чворовима нумерисаним на два начина приказан је на слици 2.2. Редни број чвора v при долазној нумерацији означаваћемо са $v.Pre$, а при одлазној нумерацији са $v.Post$.

Чвор v зове се *предак* чвора w у дрвету T са кореном r ако је v на јединственом путу од чвора r до w у дрвету T. Ако је v предак чвора w, онда је чвор w *потомак* чвора v. Претрага из чвора v почиње пре претраге из чвора w, па је $v.Pre < w.Pre$. С друге стране, претрага из чвора v завршава се после претраге из чвора w, па је $v.Post > w.Post$. DFS дрво обухвата све чворове повезаног графа G. Редослед синова сваког чвора у дрвету одређен је листом повезаности којом је задан граф G, па се за свака два сина може рећи који је од њих леви (први по том редоследу), а који десни. Релација леви–десни се преноси на произвољна два чвора u и v који нису у релацији предак-потомак (слика 2.3). За чворове u и v тада постоји јединствени заједнички предак w у DFS дрвету, као и синови u' и v' чвора w такви да је u' предак u и v' предак v. Кажемо да је u лево од v ако и само ако је u' лево од v'. Ако је чвор u лево од чвора v, онда је он приликом претраге означен пре чвора v, па је $u.Pre < v.Pre$. Обрнуто не важи увек: ако је $u.Pre < v.Pre$, онда је чвор u лево од чвора v, или је чвор u предак чвора v у DFS дрвету (тј. изнад чвора v). С друге стране, претрага из чвора u завршава се пре претраге из чвора v, па је $u.Post < v.Post$.

Лема: [Основна особина DFS дрвета неусмереног графа] Нека је $G = (V, E)$ повезан неусмерен граф, и нека је $T = (V, F)$ DFS дрво графа G. Свака грана $e \in E$ припада T (тј. $e \in F$) или спаја два чвора графа G, од којих је један предак другог у T.

Доказ: Нека је (v, u) грана у графу G, и претпоставимо да је у току DFS обиласка чвор v посећен пре чвора u. После означавања чвора v, у петљи се рекурзивно покреће DFS обилазак из сваког неозначеног суседа чвора v. У тренутку када дође ред на суседа u, ако је чвор u означен, онда је чвор u потомак чвора v у T, а у противном се из чвора u започиње DFS обилазак, па u постаје син чвора v у дрвету T.

Тврђење леме може се преформулисати на следећи начин: гране графа не могу бити

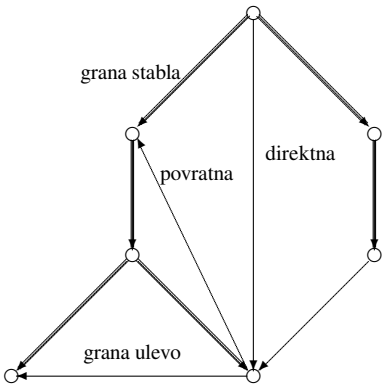


Слика 2.3: Илустрација релације ”лево–десно” на скупу чворова DFS дрвета.

попречне гране у односу на DFS дрво, односно гране које повезују чворове на раздвојеним путевима од корена (тј. таква два чвора u и v која нису у релацији предак-потомак).

Усмерени графови

Сама процедура претраге у дубину усмерених графова иста је као за неусмерене графове. Међутим, усмерена DFS дрвета имају нешто другачије особине. За њих, на пример, није тачно да немају попречне гране, што се може видети са примера на слици 2.4. У односу на DFS дрво гране графа припадају једној од четири категорије: *гране дрвета*, *повратне*, *директне* и *попречне* гране. Прве три врсте грана повезују два чвора од којих је један потомак другог у дрвету: грана дрвета повезује оца са сином, повратна грана потомка са претком, а директна грана претка са потомком. Једино попречне гране повезују чворове који нису “сродници” у дрвету. Попречне гране, међутим, морају бити усмерене “здесна улево”, као што показује следећа лема.

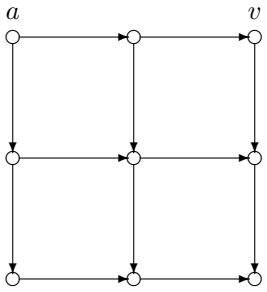


Слика 2.4: DFS дрво усмереног графа.

Лема: [Основна особина DFS дрвета усмереног графа] Нека је $G = (V, E)$ усмерени граф, и нека је $T = (V, F)$ DFS дрво графа G. Ако је $(v, w) \in E$ грана графа G за коју важи $v.Pre < w.Pre$, онда је чвор w потомак чвора v у дрвету T.

Доказ: Пошто према долазној DFS нумерацији чвор v претходи чвору w, w је означен након чвора v. Грана графа (v, w) мора бити разматрана у току рекурзивног позива DFS из чвора v. Ако у том тренутку чвор w није означен, онда се грана (v, w) мора укључити у дрво, тј. $(v, w) \in F$, па је тврђење леме тачно. У противном, w је означен у току извођења рекурзивног позива DFS из чвора v, па је w потомак чвора v у дрвету T.

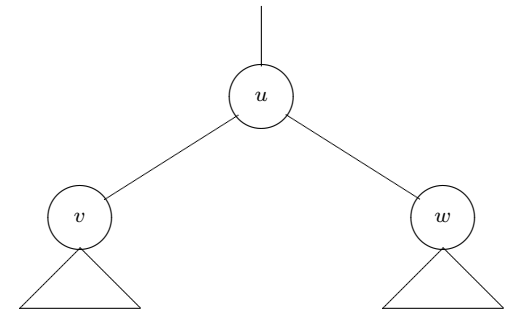
Алгоритам DFS за повезан неусмерени граф, започет из произвољног чвора, обилази цео граф. Аналогно тврђење не мора бити тачно за усмерене графове. Посматрајмо усмерени граф на слици 2.5. Ако се DFS обилазак започне из чвора v, онда ће бити достигнути само чворови у десној колони. DFS обилазак може да достигне све чворове графа само ако се започне из чвора a. Ако се чвор a уклони из графа заједно са две гране које излазе из њега, онда у графу не постоји чвор из кога DFS обилази цео граф. Према томе, увек када говоримо о DFS обиласку усмереног графа, сматраћемо да је DFS алгоритам покренут толико пута колико је потребно да би сви чворови били означени и све гране биле размотрене. Дакле, у општем случају усмерени граф уместо DFS дрвета има **DFS шуму**.



Слика 2.5: Пример када DFS обилазак усмереног графа (ако се покрене из чвора v) не обилази све чворове графа.

Непостојање грана графа које иду слева удесно говори нешто корисно о одлазној нумерацији чворова графа и о четири врсте грана у односу на DFS дрво. На слици 2.6(a) приказана су три чвора графа u, v и w у оквиру DFS дрвета графа. Чворови v и w су синови чвора u, а чвор w је десно од чвора v. На слици 2.6(b) приказани су временски интервали трајања рекурзивних позива DFS за сваки од ових чворова. Запажамо да је DFS обилазак из чвора v, потомка чвора u, активан само у подинтервалу времена за које је активан DFS из чвора u (претка чвора v). Специјално, DFS обилазак из чвора v завршава се пре завршетка DFS обиласка из чвора u. Према томе, из чињенице да је v потомак чвора u следи да је $v.Post < u.Post$. Поред тога, ако је w десно од чвора v, онда позив DFS обиласка из чвора w не може бити покренут пре него што се заврши DFS обилазак из чвора v. Према тома, ако је v лево од чвора w, онда важи $v.Post < w.Post$. Иако то није приказано на слици 2.6, исти закључак је тачан и ако су чворови v и w у различитим дрветима DFS шуме, при чему је дрво чвора v лево од дрвета чвора w.

Размотримо сада са произвољну грану (u, v) графа одлазних DFS бројева чворова u и v.



(a) Три чвора u DFS stablu

(b) Aktivni intervali za njihove pozive DFS

Слика 2.6: Однос између положаја чворова у DFS дрвету и трајања рекурзивних позива покренутих из ових чворова.

1. Ако је (u, v) грана дрвета или директна грана, онда је чвор v потомак чвора u, па је $v.Post < u.Post$.
2. Ако је (u, v) попречна грана, онда је због тога што је чвор v лево од чвора u, поново $v.Post < u.Post$.
3. Ако је (u, v) повратна грана и $v \neq u$, онда је v прави предак чвора u и $v.Post > u.Post$. Међутим, $v = u$ је могуће за повратну грану, јер је и петља повратна грана. Према томе, за повратну грану (u, v) знамо да је $v.Post \geq u.Post$.

Према томе, доказано је следеће тврђење.

Лема: Грана (u, v) усмереног графа $G = (V, E)$ је повратна ако и само ако према одлазној нумерацији чвор u претходи чвору v, односно $u.Post \leq v.Post$.

На основу вредности долазне и одлазне нумерације чворова у графу може се извршити класификација грана у графу у односу на DFS дрво. Дакле, за усмерену грану $(u, v) \in E$ важи:

- ако је $u.Post \leq v.Post$, онда је грана повратна
- ако је $u.Post > v.Post$ и $u.Pre > v.Pre$, онда је грана попречна
- ако је $u.Post > v.Post$ и $u.Pre < v.Pre$, онда ако је чвор u родитељ чвора v у DFS дрвету то је грана DFS дрвета, а иначе је директна грана

Алгоритам DFS претраге може се искористити за утврђивање да ли задати усмерени граф садржи усмерени циклус, тј. да ли је ациклички.

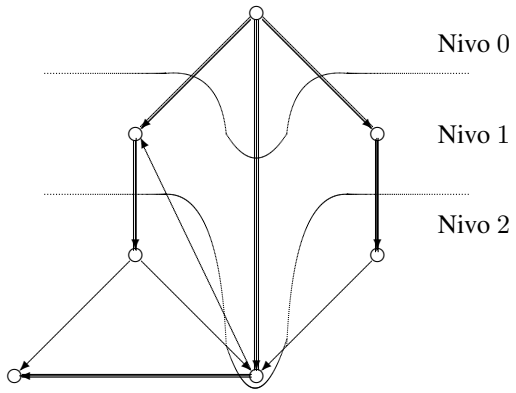
Лема: Нека је $G = (V, E)$ усмерени граф и нека је T DFS дрво графа G. Тада G садржи усмерени циклус ако и само ако G садржи повратну грану у односу на T.

Доказ: Ако је грана (u, v) повратна, онда она заједно са гранама дрвета на путу од v до u чини циклус. Супротно тврђење је такође тачно: ако у графу постоји циклус, тада је једна од његових грана повратна. Заиста, претпоставимо да у графу постоји циклус који чине гране (v_1, v_2), (v_2, v_3),..., (v_k, v_1), од којих ниједна није повратна у односу на T. Ако је $k = 1$, односно циклус је петља, онда је грана (v, v) повратна грана. Ако је пак $k > 1$, претпоставимо да ниједна од грана (v_1, v_2), (v_2, v_3),...(v_{k-1}, v_k) није повратна. Према претходној леми важе неједнакости $v_1.Post > v_2.Post > \cdots > v_k.Post$, из којих следи да је $v_k.Post < v_1.Post$, па је грана (v_k, v_1) повратна — супротно претпоставци. Тиме је доказано да у сваком циклусу постоји повратна грана у односу на DFS дрво.

Дакле, алгоритам за проверу да ли граф садржи циклус своди се на DFS нумерацију и проверу постојања повратне гране на основу леме.

Претрага у ширину

Претрага у ширину подразумева обилазак графа на систематичан начин, ниво по ниво, при чему се успут формира дрво претрага у ширину (BFS дрво). Ако полазимо од чвора v (v је корен BFS дрвета), онда се најпре посећују сви суседи чвора v редоследом одређеним редоследом у листи повезаности графа (синови чвора v у дрвету претраге, ниво један). Затим се долази до свих "унука" (ниво два), и тако даље (видети пример на слици 2.7). Приликом обиласка чворови се могу нумерисати BFS бројевима, слично као при DFS. Прецизније, чвор w има BFS број k ако је он k-ти по реду чвор означен у току BFS претраге. BFS дрво графа може се формирати укључивањем само грана ка новоозначеним чворовима. Запажа се да излазна обрада код претраге у ширину, за разлику од претраге у дубину, нема смисла; претрага нема повратак "навише", већ се, полазећи од корена, креће само наниже.



Слика 2.7: BFS дрво усмереног графа.

Лако је уверити се да се приликом BFS обиласка сваки чвор обрађује по једном и да се свака грана прегледа по једном. Стога је временска сложеност алгоритма BFS $O(|V| + |E|)$.

Лема: Ако грана (u, w) припада BFS дрвету и чвор u је отац чвора w, онда чвор u има најмањи BFS број међу чворовима из којих постоји грана ка w.

Доказ: Ако би у графу постојала грана (v, w), таква да чвор v има мањи BFS број од чвора u, онда би у тренутку обраде чвора v чвор w морао бити уписан у ред, па би грана (v, w) морала бити укључена у BFS дрво, супротно претпоставци.

Дефинишимо *растојање* $d(u, v)$ између чворова u и v као дужину најкраћег пута од чвора u до чвора v; под дужином пута подразумева се број грана које чине тај пут.

Лема: Пут од корена r BFS дрвета до произвољног чвора w кроз BFS дрво најкраћи је пут од чвора r до чвора w у графу G.

Доказ: Индукцијом по d доказаћемо да до сваког чвора w на растојању d од корена r (јединствени) пут кроз дрво од r до w има дужину d. За $d = 1$ тврђење је тачно: грана (r, w) је обавезно део дрвета, па између r и w постоји пут кроз дрво дужине 1. Претпоставимо да је тврђење тачно за све чворове који су на растојању мањем од d од корена, и нека је w неки чвор на растојању d од корена; другим речима, постоји низ чворова $w_0 = r$, w_1, $w_2, \ldots, w_{d-1}, w_d = w$ који чине пут дужине d од r до w, и не постоји краћи пут од r до w. Пошто је дужина најкраћег пута од чвора r до чвора w_{d-1} једнака $d-1$ према индуктивној хипотези пут од r до w_{d-1} кроз дрво има дужину $d - 1$. У тренутку обраде чвора w_{d-1}, ако чвор w није означен, пошто у G постоји грана (w_{d-1}, w_d), та грана се укључује у BFS дрво, па до чвора w_d постоји пут дужине d кроз дрво. У противном, ако је у том тренутку чвор w_d већ означен, онда до чвора w кроз дрво води грана из неког чвора w'_{d-1}, означеног пре чвора w_{d-1}, из чега следи да је ниво чвора w'_{d-1} највише $d - 1$, ниво чвора w највише d, односно до чвора w води пут кроз дрво дужине d.

Лема: Ако је $(v, w) \in E$ грана неусмереног графа $G = (V, E)$, онда та грана спаја два чвора чији се нивои разликују највише за један.

Доказ: Нека је нпр. чвор v први достигнут претрагом и нека је његов ниво d. Тада је ниво чвора w већи или једнак од d. С друге стране, ниво чвора w није већи од $d + 1$, јер до њега води грана дрвета или из чвора v, или из неког чвора који је означен пре v. Дакле, ниво чвора w је или d или $d + 1$.

Задатак: Достижни чворови

Поставка: За сваки рутер у рачунарској мрежи је познат списак рутера са којима је повезан. Напиши програм који проверава да ли је могуће послати поруку од једног до другог задатог рутера.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број рутера n ($1 \leq n \leq 100$), затим број веза између рутера m ($0 \leq m \leq n \times (n-1)$) и затим у наредних m линија по два различита броја између 1 и n раздвојена размаком која представљају рутере између којих је успостављена веза (први рутер може послати поруку другом). Свака веза се наводи само једном. Након тога се уноси број парова рутера p ($1 \leq p \leq 100$) чију повезаност треба испитати. Сваки пар се описује помоћу два различита броја $start$ и $cilj$ чије вредности су између 1 и n.

Излаз: За сваки пар рутера који треба исписати, на стандардни излаз исписати *da* ако је могуће послати поруку од рутера $start$ до рутера $cilj$, односно *ne* у супротном.

Пример 1

Улаз
```
4
4
1 2
1 3
3 2
2 4
2
2 3
1 4
```
Излаз
```
ne
da
```

Пример 2

Улаз
```
4
4
1 2
2 3
2 4
3 4
1
1 4
```
Излаз
```
da
```

Решење: Повезаност рутера се може описати усмереним графом. Претрагом у дубину или ширину од првог датог рутера обилазимо граф и проверавамо да ли се други рутер налази међу чворовима до којих стижемо током претраге у дубину.

Претрагу у дубину је најједноставније имплементирати рекурзивно.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

bool dfs(int r1, int r2, vector<bool>& posecen,
         const vector<vector<int>>& veze) {
  if (r1 == r2)
    return true;
  if (posecen[r1])
    return false;
  posecen[r1] = true;
  for (int r : veze[r1])
    if (dfs(r, r2, posecen, veze))
      return true;
  return false;
}

bool povezani(int r1, int r2, int brojRutera,
              const vector<vector<int>>& veze) {
  vector<bool> posecen(brojRutera, false);
  return dfs(r1, r2, posecen, veze);
}

int main() {
  int brojRutera;
  cin >> brojRutera;
  int brojVeza;
```

```
  cin >> brojVeza;
  vector<vector<int>> veze(brojRutera);
  for (int i = 0; i < brojVeza; i++) {
    int a, b;
    cin >> a >> b; a--; b--;
    veze[a].push_back(b);
  }

  int brojParova;
  cin >> brojParova;
  for (int i = 0; i < brojParova; i++) {
    int start, cilj;
    cin >> start >> cilj; start--; cilj--;

    if (povezani(start, cilj, brojRutera, veze))
      cout << "da" << endl;
    else
      cout << "ne" << endl;
  }

  return 0;
}
```

Уместо рекурзије, можемо употребити стек.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <stack>

using namespace std;

int main() {
  int brojRutera;
  cin >> brojRutera;
  int brojVeza;
  cin >> brojVeza;
  vector<vector<int>> veze(brojRutera);
  for (int i = 0; i < brojVeza; i++) {
    int a, b;
    cin >> a >> b; a--; b--;
    veze[a].push_back(b);
  }

  int brojParova;
  cin >> brojParova;
  for (int i = 0; i < brojParova; i++) {
    int start, cilj;
    cin >> start >> cilj; start--; cilj--;
```

```
    vector<bool> posecen(brojRutera, false);
    stack<int> ruteri;
    ruteri.push(start);
    posecen[start] = true;
    bool povezani = false;
    while (!ruteri.empty() && !povezani) {
      int r = ruteri.top(); ruteri.pop();
      for (auto rr : veze[r]) {
        if (rr == cilj) {
          povezani = true;
          break;
        }
        if (!posecen[rr]) {
          posecen[rr] = true;
          ruteri.push(rr);
        }
      }
    }
    if (povezani)
      cout << "da" << endl;
    else
      cout << "ne" << endl;
  }

  return 0;
}
```

Задатак: Компоненте повезаности у неусмереном графу

Поставка: Нека је дат неусмерени граф G. Одредити број и компоненте повезаности датог графа.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају чворове који су повезани у графу.

Излаз: На стандардни излаз исписати број компоненти повезаности а затим и све компоненте повезаности у засебним редовима. Сви чворови унутар једне компоненте треба да буду уређени растуће. Компоненте исписати у растућем поретку и то тако да компонента чији најмањи чвор има најмању ознаку буде исписана прва.

Пример

Улаз	*Излаз*
6 4 0 1 1 2 2 0 3 4	3 0 1 2 3 4 5

Решење: DFS обилазак у неусмереном графу гарантује посећивање свих чворова уколико је граф повезан. Уколико граф није повезан обићи ћемо све чворове у компоненти повезаности којој припада чвор из кога смо кренули у обилазак. Ако искористимо ову особину DFS обиласка графа, можемо да покренемо DFS из једног чвора, да обиђемо све чворове његове компоненте повезаности, да затим ако постоје непосећени чворови покренемо нову DFS претрагу из произвољног непосећеног чвора итд. Сваки пут кад покренемо DFS обилазак из неког непосећеног чвора знамо да смо нашли још једну компоненту повезаности. На овај начин одредићемо све компоненте повезаности датог графа.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <algorithm>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
    g.adjacency_list[u].push_back(v);
    g.adjacency_list[v].push_back(u);
}

void DFS(Graph &g, int u, std::set<int> &component)
{
    component.insert(u);
    g.visited[u] = true;

    for (int v : g.adjacency_list[u])
```

```
        if (!g.visited[v])
            DFS(g, v, component);
}

void find_components(Graph &g)
{
    std::vector<std::set<int>> components;
    int num_of_components = 0;

    for (int i = 0; i < g.V; i++)
        if (!g.visited[i]) {
            components.push_back({});
            DFS(g, i, components.back());
            num_of_components++;
        }

    std::sort(components.begin(), components.end());

    std::cout << num_of_components << "\n";

    for (auto &s : components) {
        for (int x : s)  {
            std::cout << x << " ";
        }

        std::cout << "\n";
    }
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, n);

  int x, y;
```

```
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  find_components(g);

  return 0;
}
```

Задатак: Класификација грана у ДФС стаблу

Поставка: За задати повезани усмерени граф G одредити класификацију грана у DFS стаблу. DFS претрагу графа покренути из чвора 0.

Улаз: Са стандарног улаза се уносе бројеви n и m који редом представљају број чворова и грана графа. Након тога се уноси m парова бројева који представљају чворове који су повезани у графу.

Излаз: На стандарни излаз исписати гране стабла, повратне, директне и попречне гране у доле наведеном формату. Гране треба да буду сортиране према чвору са мањим индексом.

Пример

Улаз

```
9 12
0 1
0 2
0 4
1 3
1 4
2 5
4 0
4 6
4 7
5 8
5 3
7 1
```

Излаз

```
Grane stabla:
0 1
0 2
1 3
1 4
2 5
4 6
4 7
5 8
Povratne grane:
4 0
7 1
Direktne grane:
0 4
Poprecne grane:
5 3
```

Решење: Да би се одредила класификација грана у DFS стаблу неопхпдно је покренути DFS претрагу графа из неког чвора (у нашем случају чвор 0). Приликом обилазака чворова у графу памти се улазна и излазна нумерација чворова. Улазна нумерација говори о томе којим редоследом "улазимо"у чворове а излазна о томе у ком редоследу"излазимо" из њих. Разматрамо 2 чвора u и v таква да постоји грана $u- > v$ у графу. Ако важи да је излазна нумерација чвора u мања или једнака од излазне нумерације чвора v грана $u- > v$ је повратна. Ако важи да је излазна нумерација чвора

u већа од излазне нумерације чвора v и да је улазна нумерација чвора u већа од улазна нумерације чвора v грана $u->v$ је попречна. Ако важи да је излазна нумерација чвора u већа од излазне нумерације чвора v и да је улазна нумерација чвора u мања од улазна нумерације чвора v и притом је чвор u родитељ чвора v у DFS стаблу грана $u->v$ је грана стабла, а иначе је грана $u->v$ директна грана.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <algorithm>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> in_enumeration;
  std::vector<int> out_enumeration;
  std::vector<int> parents;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list, cons
                      const std::vector<int> &out_enumeration, const std::vector<int> &pa
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.in_enumeration = in_enumeration;
  g.out_enumeration = out_enumeration;
  g.parents = parents;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
    g.adjacency_list[u].push_back(v);
}

void DFS(Graph &g, int u, int &in, int &out)
{
    g.in_enumeration[u] = in;
    in++;

    g.visited[u] = true;

    for (int v : g.adjacency_list[u])
        if (!g.visited[v]) {
            g.parents[v] = u;
            DFS(g, v, in, out);
        }
```

```
    g.out_enumeration[u] = out;
    out++;
}

void classify_edges(Graph &g)
{
    int in = 0;
    int out = 0;

    DFS(g, 0, in, out);

    std::vector<std::pair<int, int>> tree_edges;
    std::vector<std::pair<int, int>> forward_edges;
    std::vector<std::pair<int, int>> back_edges;
    std::vector<std::pair<int, int>> cross_edges;

    for (int i = 0; i < g.V; i++)
        for (int v : g.adjacency_list[i])
            if (g.out_enumeration[i] <= g.out_enumeration[v])
                back_edges.push_back({i, v});
            else if (g.out_enumeration[i] > g.out_enumeration[v] && g.in_enumeratio
                cross_edges.push_back({i, v});
            else if (g.out_enumeration[i] > g.out_enumeration[v] && g.in_enumeratio
                tree_edges.push_back({i, v});
            else
                forward_edges.push_back({i, v});

    std::cout << "Grane stabla:\n";
    for (auto &p : tree_edges)
        std::cout << p.first << " " << p.second << "\n";

    std::cout << "Povratne grane:\n";
    for (auto &p : back_edges)
        std::cout << p.first << " " << p.second << "\n";

    std::cout << "Direktne grane:\n";
    for (auto &p : forward_edges)
        std::cout << p.first << " " << p.second << "\n";

    std::cout << "Poprecne grane:\n";
    for (auto &p : cross_edges)
        std::cout << p.first << " " << p.second << " \n";
}

int main ()
{
```

```
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<int> in_enumeration;
  std::vector<int> out_enumeration;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> parents;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);
  parents.resize(n, -1);
  in_enumeration.resize(n);
  out_enumeration.resize(n);
  adjacency_list.resize(n);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, in_enumeration, out_enumeration, parents,

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  classify_edges(g);

  return 0;
}
```

Задатак: Пећине

Поставка: Спелеолози се налазе у улазној дворани пећине, на висини тла, чија је надморска висина позната. Пећина има укупно n дворана обележених бројевима од 0 до $n-1$ (улазна дворана је обележена бројем 0) и до сваке од њих се може стићи коришћењем $n-1$ ходника који их повезују. Ако се за сваки ходник зна које две дворане повезује и колика је висинска разлика између њих, написати програм који одређује најнижу надморску висину на коју се спелеолози у пећини могу спустити.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава висина тла (цео број), а затим, из следеће линије природни број n ($1 \leq n \leq 100$). У наредних $n-1$ линија налазе се по три цела броја раздвојена размацима, која описују ходник: редни број полазне дворане, редни број долазне дворане и висинску разлику између полазне и долазне дворане.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражену највећу дубину.

Пример

Улаз	*Излаз*
278 7 0 1 -20 0 2 -10 1 3 -5 1 4 10 2 5 -33 2 6 7	235

Решење: Пошто постоји n дворана повезаних са $n-1$ ходника и пошто се до сваке дворане може стићи, мрежа дворана чини једно дрво и нема циклуса. Висину најниже дворане можемо одредити обиласком дрвета, при чему захваљујући ацикличности не морамо да памтимо да ли смо у некој дворани већ раније били.

Претрагу можемо извршити у дубину и најједноставније је имплементирати је рекурзивно (алтернатива је да употребимо стек).

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

struct Hodnik {
  int dvoranaDo;
  int razlikaVisina;
  Hodnik(int dvoranaDo_, int razlikaVisina_) {
    dvoranaDo = dvoranaDo_;
    razlikaVisina = razlikaVisina_;
  }
};

int minVisinaDFS(int dvorana, int visina,
                 const vector<vector<Hodnik>>& hodnici) {
  int minVisina = visina;
  for (const Hodnik& h : hodnici[dvorana]) {
    int v = minVisinaDFS(h.dvoranaDo, visina + h.razlikaVisina, hodnici);
      if (v < minVisina)
        minVisina = v;
  }
  return minVisina;
}

int main() {
  int visinaTla;
  cin >> visinaTla;

  int n;
```

```
  cin >> n;

  vector<vector<Hodnik>> hodnici(n);
  for (int i = 0; i < n-1; i++) {
    int dvoranaOd, dvoranaDo, razlikaVisina;
    cin >> dvoranaOd >> dvoranaDo >> razlikaVisina;
    hodnici[dvoranaOd].push_back(Hodnik(dvoranaDo, razlikaVisina));
  }

  cout << minVisinaDFS(0, visinaTla, hodnici) << endl;

  return 0;
}
```

Претрагу можемо извршити и у ширину и имплементирати је уз помоћ реда.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>

using namespace std;

int main() {
  int visinaTla;
  cin >> visinaTla;

  int n;
  cin >> n;

  struct Hodnik {
    int dvoranaDo;
    int razlikaVisina;
    Hodnik(int dvoranaDo_, int razlikaVisina_) {
      dvoranaDo = dvoranaDo_;
      razlikaVisina = razlikaVisina_;
    }
  };

  vector<vector<Hodnik>> hodnici(n);
  for (int i = 0; i < n-1; i++) {
    int dvoranaOd, dvoranaDo, razlikaVisina;
    cin >> dvoranaOd >> dvoranaDo >> razlikaVisina;
    hodnici[dvoranaOd].push_back(Hodnik(dvoranaDo, razlikaVisina));
  }

  struct Dvorana {
    int broj, visina;
    Dvorana(int broj_, int visina_) {
```

```
      broj = broj_; visina = visina_;
    }
  };

  queue<Dvorana> q;
  q.push(Dvorana(0, visinaTla));
  int min_visina = visinaTla;
  while (!q.empty()) {
    Dvorana d = q.front();
    q.pop();
    if (d.visina < min_visina)
      min_visina = d.visina;
    for (const Hodnik& h : hodnici[d.broj])
      q.push(Dvorana(h.dvoranaDo, d.visina + h.razlikaVisina));
  }

  cout << min_visina << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Пећине са тунелима

Поставка: Спелеолози се налазе у улазној дворани пећине, на висини тла, чија је надморска висина позната. Пећина има укупно n дворана обележених бројевима од 0 до $n-1$ (улазна дворана је обележена бројем 0) и до сваке од њих се може стићи коришћењем неког од многих тунела који их повезују. Сви тунели су двосмерни. Ако се за сваки тунел зна које две дворане повезује и колика је висинска разлика између њих, написати програм који одређује најнижу надморску висину на коју се спелеолози у пећини могу спустити.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава висина тла (цео број), а затим, из следеће линије природни број n ($1 \leq n \leq 100$) који представља број дворана и затим природни број m ($1 \leq m \leq n \cdot (n-1)/2$) који представља број тунела. У наредних m линија налазе се по три цела броја раздвојена размацима, која описују тунел: редни број полазне дворане, редни број долазне дворане и висинску разлику између полазне и долазне дворане.

Излаз: На стандардни излаз исписати цео број који представља најнижу надморску висину на којој се налази нека дворана.

Пример

Улаз	*Излаз*
278 7 6 0 1 -20 0 2 -10 1 3 -5 1 4 10 2 5 -33 2 6 7	235

Решење: Обиласком графа тунела кренувши од улазне дворане можемо одредити и у низ уписати надморску висину сваке дворане. Након тога тражену најмању висину одређујемо као минимум тог низа. Обилазак можемо имплементирати рекурзивном претрагом у дубину, где у сваком позиву функције прослеђујемо тренутни број дворане и њену надморску висину. Да бисмо избегли циклусе морамо памтити и низ логичких вредности којим се региструју посећене дворане. Приликом поновног уласка у већ посећену дворану одмах прекидамо даљу претрагу.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

struct Hodnik {
  int dvoranaDo;
  int razlikaVisina;
  Hodnik(int dvoranaDo_, int razlikaVisina_) {
    dvoranaDo = dvoranaDo_;
    razlikaVisina = razlikaVisina_;
  }
};

void visineDFS(int dvorana, int visina,
               const vector<vector<Hodnik>>& hodnici,
               vector<bool>& posecena,
               vector<int>& visine) {
  if (posecena[dvorana])
    return;
  posecena[dvorana] = true;
  visine[dvorana] = visina;
  for (const Hodnik& h : hodnici[dvorana]) {
    visineDFS(h.dvoranaDo, visina + h.razlikaVisina,
              hodnici, posecena, visine);
  }
}
```

```
int minVisinaDFS(int dvorana, int visina,
                 const vector<vector<Hodnik>>& hodnici) {
  int n = hodnici.size();
  vector<bool> posecena(n, false);
  vector<int> visine(n);
  visineDFS(dvorana, visina, hodnici, posecena, visine);
  return *min_element(begin(visine), end(visine));
}


int main() {
  int visinaTla;
  cin >> visinaTla;

  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<Hodnik>> hodnici(n);

  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    int dvoranaOd, dvoranaDo, razlikaVisina;
    cin >> dvoranaOd >> dvoranaDo >> razlikaVisina;
    hodnici[dvoranaOd].push_back(Hodnik(dvoranaDo, razlikaVisina));
    hodnici[dvoranaDo].push_back(Hodnik(dvoranaOd, -razlikaVisina));
  }

  cout << minVisinaDFS(0, visinaTla, hodnici) << endl;

  return 0;
}
```

Обилазак можемо реализовати и претрагом у ширину (уз коришћење реда).

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>
#include <algorithm>
#include <tuple>

using namespace std;

struct Hodnik {
  int dvoranaDo;
  int razlikaVisina;
  Hodnik(int dvoranaDo_, int razlikaVisina_) {
    dvoranaDo = dvoranaDo_;
```

```
    razlikaVisina = razlikaVisina_;
  }
};

int minVisinaBFS(int dvorana, int visina,
                 const vector<vector<Hodnik>>& hodnici) {
  int n = hodnici.size();
  vector<bool> posecena(n, false);
  vector<int> visine(n);
  queue<pair<int, int>> red;
  red.push(make_pair(dvorana, visina));
  while (!red.empty()) {
    tie(dvorana, visina) = red.front();
    red.pop();
    posecena[dvorana] = true;
    visine[dvorana] = visina;
    for (const Hodnik& h : hodnici[dvorana])
      if (!posecena[h.dvoranaDo])
        red.push(make_pair(h.dvoranaDo, visina + h.razlikaVisina));
  }

  return *min_element(begin(visine), end(visine));
}


int main() {
  int visinaTla;
  cin >> visinaTla;

  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<Hodnik>> hodnici(n);

  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    int dvoranaOd, dvoranaDo, razlikaVisina;
    cin >> dvoranaOd >> dvoranaDo >> razlikaVisina;
    hodnici[dvoranaOd].push_back(Hodnik(dvoranaDo, razlikaVisina));
    hodnici[dvoranaDo].push_back(Hodnik(dvoranaOd, -razlikaVisina));
  }

  cout << minVisinaBFS(0, visinaTla, hodnici) << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Чудна мрежа

Поставка: У једном рачунарском кабинету потребно је успоставити необичну рачунарску мрежу. Потребно је поставити рачунаре на n столова, при чему на неким столовима могу да стоје обични рачунари (њих имамо на располагању у неограниченом броју), а на неким посебни сервери (њих посебно морамо купити по цени од c_s динара). Неке столове је могуће повезати директно мрежним кабловима, а неке није. Цена успостављања мрежног кабла између било која два стола је c_k динара. Написати програм који одређује најмању цену коју је потребно платити тако да је сваки рачунар или сервер или је мрежним каблом повезан са бар једним сервером (не обавезно директно).

Улаз: Са стандардног улаза се у првом реду уносе бројеви c_s ($0 \leq c_s \leq 1000$) и c_k ($0 \leq c_k \leq 1000$), раздвојени размаком. У наредном реду се уноси број рачунара n ($2 \leq n \leq 50000$) и број парова рачунара m између којих је могуће поставити мрежни кабл ($2 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$), раздвојени размаком. У наредних m редова уносе се парови бројева између 0 и $n-1$, раздвојени размаком који одређују рачунаре између којих је могуће поставити кабл.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражену најмању цену.

Пример

Улаз	*Излаз*

`850 350`
`7 6`
`0 1`
`0 4`
`4 2`
`1 4`
`3 5`
`6 5`
	`3450`

Решење: Ако је цена сервера мања или једнака цени једног кабла, тада је најјефтиније на сваки сто поставити по један сервер. Наиме замена сваког сервера обичним рачунаром подразумева повезивање тог рачунара са неким сервером помоћу једног кабла, што повећава укупну цену.

У супротном је оптимално у свакој компоненти повезаности графа поставити по један сервер и све остале столове у тој компоненти попунити обичним рачунарима повезаним са тим сервером. Заиста, ако у некој компоненти не би постојао бар један сервер, онда рачунари у тој компоненти не би могли бити повезани ни са једним сервером, што је супротно условима задатка. Уколико би постојала бар два сервера у некој компоненти, цена не би била оптимална. Наиме један од та два сервера би се могао заменити обичним рачунаром који би се каблом повезао са другим сервером у тој компоненти, чиме би се уместо цене сервера платила цена кабла која је мања.

Број компонената повезаности можемо једноставно одредити обиласком графа (на пример, рекурзивно имплементираним обиласком у дубину).

```
#include <iostream>
#include <vector>
```

```
using namespace std;

void dfs(const vector<vector<int>>& susedi,
     vector<int>& komponente,
     int cvor, int komponenta) {
  komponente[cvor] = komponenta;
  for (int sused : susedi[cvor])
    if (komponente[sused] == 0)
      dfs(susedi, komponente, sused, komponenta);
}

int broj_komponenata_povezanosti(const vector<vector<int>>& susedi,
                 int broj_cvorova) {
  vector<int> komponente(broj_cvorova, 0);
  int komponenta = 0;
  for (int cvor = 0; cvor < broj_cvorova; cvor++)
    if (komponente[cvor] == 0)
      dfs(susedi, komponente, cvor, ++komponenta);
  return komponenta;
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  int broj_racunara, broj_kablova;
  long long cena_servera, cena_kabla;
  cin >> cena_servera >> cena_kabla;
  cin >> broj_racunara >> broj_kablova;
  vector<vector<int>> susedi(broj_racunara);
  for (int i = 0; i < broj_kablova; i++) {
    int racunar1, racunar2;
    cin >> racunar1 >> racunar2;
    susedi[racunar1].push_back(racunar2);
    susedi[racunar2].push_back(racunar1);
  }

  if (cena_servera <= cena_kabla)
    cout << broj_racunara * cena_servera << endl;
  else {
    int broj_komponenata = broj_komponenata_povezanosti(susedi, broj_racunara);
    int broj_servera = broj_komponenata;
    int broj_obicnih = broj_racunara - broj_servera;
    cout << broj_servera * cena_servera + broj_obicnih * cena_kabla << endl;
  }

  return 0;
```

```
}
```

Задатак: Престолонаследници

Поставка: У једној земљи краљ је освојио трон и започео своју краљевску лозу. Његових наследника је јако пуно и свако од њих би желео да зна који је по реду да наследи круну. Правило наслеђивања је такво да краља наслеђује прво његов настарији син. Следећи на реду је најстарији унук (ако постоји) и тако редом. Ако неки наследник нема деце, онда је следећи на реду најстарији међу његовом браћом, затим његови потомци и тако даље. Напиши програм који одређује редослед наследства одређених краљевих потомака.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број n ($1 \leq n \leq 50000$) који представља укупан број особа у краљевом породичном стаблу (укључујући и краља). Након тога се уносе парови облика `roditelj dete` (сваки пар у посебном реду, раздвојен размаком), при чему су деца истог родитеља поређана опадајуће по старости. На крају се уносе имена потомака за које се жели одредити редослед наследства (сваки у посебном реду).

Излаз: За сваког потомка унетог након описа родитељских веза исписати који је по редоследу наследства.

Пример

Улаз	*Излаз*
19	Harry 6
Elisabeth Charles	Charles 1
Elisabeth Andrew	Charlotte 4
Elisabeth Edward	Louise 12
Elisabeth Anne	James 11
Charles William	Isla 16
Charles Harry	Andrew 7
William George	
William Charlotte	
William Louis	
Anne Peter	
Anne Zara	
Andrew Beatrice	
Andrew Eugenie	
Edward James	
Edward Louise	
Peter Savannah	
Peter Isla	
Zara Mia	
Harry	
Charles	
Charlotte	
Louise	
James	
Isla	
Andrew	

Решење: Услови дати у задатку говоре да је редослед наслеђивања идентичан редоследу обиласка дрвета у дубину (DFS), па задатак решавамо класичном имплементацијом тог алгоритма.

Потребно је пре тога решити неколико техничких детаља. Граф тј. дрво ћемо чувати у облику листе суседа. Чуваћемо асоцијативни низ (мапу, речник) у којој се сваком члану краљевске породице придружује низ (листа, вектор) његових наследника, сортираних по приоритету наслеђивања. Пошто у задатку није експлицитно задато ко је краљ, потребно је одредити га из података који се уносе, што се лако може остварити тако што сваком чвору придружимо податак да ли има родитеља или не - краљ ће бити једини ко нема родитеља (те информације можемо реализовати асоцијативним низом (мапом, тј. речником) који пресликава имена чланова краљевске породице у истинитосне вредности).

Када су формиране листе суседства и када је одређено ко је краљ, у једном обиласку у дубину обилазимо цело дрво и попуњавамо асоцијативно пресликавање које сваком члану породице додељује његов редни број.

Након што је за сваког одређен редни број, учитавамо једно по једном име и за сваког од њих из асоцијативног пресликавања читамо и на излаз исписујемо редни број који

одговара редоследу наслеђивања.

Обилазак у дубину можемо реализовати тако што на стеку чувамо чворове које треба посетити. На почетку на стек постављамо краља, а затим, све док се стек не испразни, скидамо елемент са врха стека, додељујемо му наредни редни број и његове наследнике додајемо на врх стека (у обратном редоследу).

```
#include <iostream>
#include <map>
#include <vector>
#include <string>
#include <stack>

using namespace std;

// iterativno implementirana pretraga u dubinu
void dfs(const map<string, vector<string>>& deca, const string& kralj,
         map<string, int>& redosled) {
  // redni broj tokom obilaska
  int r = 0;
  // stek
  stack<string> st;
  // obilazak krecemo od kralja
  st.push(kralj);
  while (!st.empty()) {
    // cvor koji je na vrhu steka je naredni u redosledu nasledstva
    string s = st.top();
    st.pop();
    redosled[s] = r++;
    // ako cvor s ima decu, postavljamo ih na stek u obratnom
    // redosledu (da bi se najstariji sin nasao na vrhu steka)
    auto it = deca.find(s);
    if (it != deca.end()) {
      const vector<string>& s_deca = it->second;
      for (auto it = s_deca.rbegin(); it != s_deca.rend(); it++)
    st.push(*it);
    }
  }
}

int main() {
  // da li osoba ima roditelja
  map<string, bool> ima_roditelja;
  // ko su sve deca osobe (poredjani po starosti)
  map<string, vector<string>> deca;
  // broj cvorova
  int n;
  cin >> n;
```

```
  // u drvetu postoji n-1 grana
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    // ucitavamo granu drveta
    string roditelj;
    string dete;
    cin >> roditelj >> dete;
    // nasli smo roditelja za ucitano dete
    ima_roditelja[dete] = true;
    // ako roditelja ucitavamo prvi put, upisujemo da on za sada nema roditelja
    if (ima_roditelja.find(roditelj) == ima_roditelja.end())
      ima_roditelja[roditelj] = false;
    // dodajemo dete u listu dece, na kraj
    deca[roditelj].push_back(dete);
  }

  // odredjujemo kralja, kao jedinu osobu koja nema roditelja
  string kralj;
  for (auto it : ima_roditelja)
    if (!it.second)
      kralj = it.first;

  // obilaskom u dubinu odredjujemo redosled nasledstva
  // svakom imenu pridruzujemo njegov redni broj
  map<string, int> redosled;
  dfs(deca, kralj, redosled);

  // obradjujemo pojedinacne upite
  string ime;
  while (cin >> ime)
    cout << ime << " " << redosled[ime] << endl;

  return 0;
}
```

Претрагу у дубину можемо имплементирати и рекурзивно. Функција прима тренутног родитеља и наредни слободан редни број у линији наследства, додељује тај број члану, и рекурзивно обрађује све његове потомке (додељујући им кроз рекурзију њихове редне бројеве) и на крају враћа први редни број који је слободан након обраде свих потомака тог родитеља. Алтернативно би се редни број могао чувати као глобална променљива.

```
#include <iostream>
#include <map>
#include <vector>
#include <string>
#include <stack>

using namespace std;
```

```
// rekurzivno implementirana pretraga u dubinu funkcija dodeljuje
// roditelju redni broj r, obradjuje sve njegove potomke i vraca
// naredni slobodan redni broj
int dfs(const map<string, vector<string>>& deca, const string& roditelj,
        map<string, int>& redosled, int r) {
  // roditelju pridruzujemo trenutni redni broj
  redosled[roditelj] = r;
  // ako roditelj ima decu, postavljamo ih na stek u obratnom
  // redosledu (da bi se najstariji sin nasao na vrhu steka)
  auto it = deca.find(roditelj);
  if (it != deca.end()) {
    const vector<string>& s_deca = it->second;
    for (auto it = s_deca.begin(); it != s_deca.end(); it++) {
      r = dfs(deca, *it, redosled, r+1);
    }
  }
  return r;
}

// rekurzivno implementirana pretraga u dubinu - funkcija omotac
void dfs(const map<string, vector<string>>& deca, const string& roditelj,
        map<string, int>& redosled) {
  dfs(deca, roditelj, redosled, 0);
}

int main() {
  // da li osoba ima roditelja
  map<string, bool> ima_roditelja;
  // ko su sve deca osobe (poredjani po starosti)
  map<string, vector<string>> deca;
  // broj cvorova
  int n;
  cin >> n;
  // u drvetu postoji n-1 grana
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    // ucitavamo granu drveta
    string roditelj;
    string dete;
    cin >> roditelj >> dete;
    // nasli smo roditelja za ucitano dete
    ima_roditelja[dete] = true;
    // ako roditelja ucitavamo prvi put, upisujemo da on za sada nema roditelja
    if (ima_roditelja.find(roditelj) == ima_roditelja.end())
      ima_roditelja[roditelj] = false;
    // dodajemo dete u listu dece, na kraj
    deca[roditelj].push_back(dete);
```

```
  }

  // odredjujemo kralja, kao jedinu osobu koja nema roditelja
  string kralj;
  for (auto it : ima_roditelja)
    if (!it.second)
      kralj = it.first;

  // obilaskom u dubinu odredjujemo redosled nasledstva
  // svakom imenu pridruzujemo njegov redni broj
  map<string, int> redosled;
  dfs(deca, kralj, redosled);

  // obradjujemo pojedinacne upite
  string ime;
  while (cin >> ime)
    cout << ime << " " << redosled[ime] << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Авионска преседања

Поставка: Једна авио-компанија заједно са својим партнерима изводи летове између познатих светских аеродрома. Напиши програм који одређује да ли је могуће да се коришћењем тих летова стигне са једног на други дати аеродром и ако јесте, колико је најмање летова потребно.

Улаз: Са стандардног улаза се задаје број m ($1 \leq m \leq 100$) летова које компанија изводи, а затим у наредних m редова опис тих летова (шифра полазног и шифра долазног аеродрома, раздвојени размаком). Након тога се уноси број k ($1 \leq k \leq 100$) путника који су заинтересовани за летове које пружа та компанија, и у наредних k линија описи релација на којима они путују (шифра полазног и шифра долазног аеродрома, раздвојени размаком).

Излаз: За сваког од k путника на стандардни излаз исписати најмањи број летова помоћу којих могу да остваре жељено путовање или реч `ne` ако такво путовање није могуће остварити помоћу летова које компанија изводи.

Пример

Улаз	*Излаз*
7	2
BEG FRA	ne
FRA MUC	3
FRA JFK	
BEG MUC	
MUC LAX	
LAX JFK	
LAX ORD	
3	
BEG JFK	
MUC BEG	
BEG ORD	

Објашњење

Од Београда (BEG) до Њујорка (JFK) може се стићи преко Франкфурта (FRA). Од Минхена (MUC) до Београда (BEG) није могуће организовати путовање. Од Београда (BEG) до Чикага (ORD) могуће је путовати преко Минхена (MUC) и Лос Анђелеса (LAX).

Решење: Најкраће путеве у оријентисаном, нетежинском графу можемо најједноставније пронаћи претрагом у ширину. Њу имплементирамо тако што у ред стављамо чворове у редоследу њиховог растојања од полазног чвора. На почетку стављамо полазни чвор, а затим у сваком кораку скидамо чвор са почетка реда и у ред додајемо његове суседе који раније нису посећени. Уз сваки чвор у ред постављамо и његово растојање од полазног чвора. У тренутку када у ред треба ставити долазни чвор, знамо његово најкраће растојање. Ако се ред испразни пре него што се долазни чвор постави у њега, онда полазни и долазни чвор нису повезани.

```
#include <iostream>
#include <map>
#include <vector>
#include <string>
#include <queue>
#include <set>

using namespace std;

int brojPresedanjaBFS(const string& aerodromOd, const string& aerodromDo,
                      const map<string, vector<string>>& letovi) {
  set<string> posecen;
  queue<pair<string, int>> red;
  red.emplace(aerodromOd, 0);
  while (!red.empty()) {
    string aerodrom;
    int broj;
    tie(aerodrom, broj) = red.front();
    red.pop();
```

```
    posecen.insert(aerodrom);

    auto it = letovi.find(aerodrom);
    if (it != letovi.end()) {
      for (const string& s : it->second) {
        if (posecen.find(s) != posecen.end())
          continue;
        if (s == aerodromDo)
          return broj+1;
        red.emplace(s, broj+1);
      }
    }
  }
  return -1;
}

int main() {
  int m;
  cin >> m;
  map<string, vector<string>> letovi;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    string aerodromOd, aerodromDo;
    cin >> aerodromOd >> aerodromDo;
    letovi[aerodromOd].push_back(aerodromDo);
  }

  int k;
  cin >> k;
  for (int i = 0; i < k; i++) {
    string aerodromOd, aerodromDo;
    cin >> aerodromOd >> aerodromDo;
    int broj = brojPresedanjaBFS(aerodromOd, aerodromDo, letovi);
    if (broj == -1)
      cout << "ne" << endl;
    else
      cout << broj << endl;
  }
  return 0;
}
```

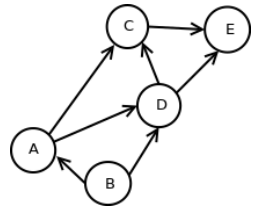
Тополошко сортирање

Претпоставимо да је задат скуп послова у вези са чијим редоследом извршавања постоје нека ограничења. Неки послови зависе од других, односно не могу се започети пре него што се ти други послови заврше. Све зависности су познате, а циљ је на-

правити такав редослед извршавања послова који задовољава сва задата ограничења; другим речима, тражи се такав распоред за који важи да сваки посао започиње тек кад буду завршени сви послови од којих он зависи. Потребно је конструисати ефикасни алгоритам за формирање таквог распореда. Овај проблем се зове *тополошко сортирање*. Задатим пословима и њиховим међузависностима може се на природан начин придружити граф. Сваком послу придружује се чвор, а усмерена грана од посла x до посла y постоји ако се посао y не може започети пре завршетка посла x. Јасно је да граф мора бити ациклички (без усмерених циклуса), јер се у противном неки послови никада не би могли започети.

Проблем: У задатом усмереном ацикличком графу $G = (V, E)$ који садржи n чворова, потребно је нумерисати чворове бројевима од 1 до n, тако да за произвољан чвор v нумерисан редним бројем k важи да сви чворови до којих постоји усмерени пут из v имају редни број већи од k.

На пример, у графу приказаном на слици 2.8 постоји само једно исправно тополошко уређење чворова: B, A, D, C, E. У општем случају може постојати већи број исправних тополошких уређења чворова.



Слика 2.8: Ациклични усмерени граф у којем постоји тачно једно тополошко уређење чворова B, A, D, C, E.

Канов алгоритам

Природна је следећа индуктивна хипотеза: умемо да нумеришемо на захтевани начин чворове свих усмерених ацикличких графова са мање од n чворова. Базни случај једног чвора, односно једног посла је тривијална. Поставља се питање како можемо поједноставити проблем уклањањем само једног чвора. Требало би тај чвор изабрати тако да остатак посла буде што једноставнији. С обзиром да је потребно нумерисати чворове, поставља се питање који је чвор најлакше нумерисати? То је очигледно чвор (посао) који не зависи од осталих послова, односно чвор са улазним степеном нула; њему се може доделити број 1.

Да ли се увек може пронаћи чвор са улазним степеном нула? Интуитивно се намеће потврдан одговор, јер се са означавањем негде мора започети. Следећа лема потврђује ову чињеницу.

Лема: Усмерени ациклични граф увек има чвор са улазним степеном нула.

Доказ:

Ако би сви чворови графа имали позитивне улазне степене, могли бисмо да кренемо из неког чвора "уназад" пролазећи гране у супротном смеру. Међутим, број чворова у графу је коначан, па се у том обиласку мора у неком тренутку наићи на неки чвор по други пут, што значи да у графу постоји циклус. Ово је међутим супротно претпоставци да се ради о ацикличком графу. Дакле у усмереном ацикличком графу увек постоји чвор са улазним степеном нула. Слично би се показало да постоји и чвор са излазним степеном нула.

Вратимо се сада на *индуктивну претпоставку*, да умемо да нумеришемо на захтевани начин чворове свих усмерених ацикличких графова са мање од n чворова.

Базни случај У усмереном ацикличном графу увек мора постојати чвор чији је улазни степен нула. Такав чвор ћемо нумерисати редним бројем 1. Након нумерисања тог чвора, уклањамо га из графа заједно са свим гранама које воде из њега (чиме смањујемо димензију проблема за 1 и смањујемо улазне степене чворова до којих воде те гране).

Индукцијска хипотеза Умемо да нумеришемо првих k чворова графа и желимо да одредимо чвор са редним бројем $k + 1$.

Претпоставимо да смо пронашли чвор са улазним степеном нула. Нумеришимо га са 1, уклонимо све гране које воде из њега, и нумеришимо остатак графа (који је такође ациклички) бројевима од 2 до n (према индуктивној хипотези они се могу нумерисати од 1 до $n-1$, а затим се сваки редни број може повећати за један). Види се да је после избора чвора са улазним степеном нула, остатак посла једноставан.

Једини проблем при реализацији овог алгоритма је како пронаћи чвор са улазним степеном нула и како поправити улазне степене чворова после уклањања гране. Можемо алоцирати низ $ulazniStepen$ димензије једнаке броју чворова у графу и иницијализовати га на вредности улазних степена чворова. Улазне степене можемо једноставно одредити проласком кроз скуп свих грана произвољним редоследом (све гране су наведене у листи повезаности) и повећавањем за један вредности $ulazniStepen[w]$ сваки пут кад се наиђе на грану (v, w). Чворови са улазним степеном нула стављају се у ред (или стек, што би било једнако добро). Према претходној леми, у графу постоји бар један чвор v са улазним степеном нула. Чвор v се као први у реду лако проналази и он се уклања из реда. Затим се за сваку грану (v, w) која излази из v вредност $ulazniStepen[w]$ смањује за један. Ако бројач при томе добије вредност нула, чвор w ставља се у ред. После уклањања чвора v граф остаје ациклички, па у њему према претходној леми поново постоји чвор са улазним степеном нула. Алгоритам завршава са радом када ред који садржи чворове степена нула постане празан, јер су у том тренутку сви чворови већ нумерисани. Интересантно је да не морамо из графа избацивати гране, већ је само важно да ажурирамо за сваки чвор његов улазни степен.

Задатак: Редослед послова

Поставка: Да би се изградио аутомобил, потребно је урадити низ послова. Неки послови зависе од других (на пример, пре него што се уграде точкови, потребно је да се уграде осовине). Напиши програм који одређује могући редослед извршавања ових послова у коме су сва ограничења задовољена.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број n ($1 \leq n \leq 50000$), затим број m ($1 \leq m \leq 10 \cdot n$) и након тога m парова бројева x_i, y_i ($0 \leq x_i, y_i < n$), раздвојених размаком, који означавају да је посао y_i неопходно урадити пре посла x_i.

Излаз: На стандардни излаз (у n редова) исписати редне бројеве послова у неком редоследу у ком их је могуће извршити (претпоставља се да ће такав редослед сигурно постојати).

Пример

Улаз	*Излаз*
6	2
6	5
3 1	0
3 2	1
4 2	3
4 5	4
1 0	
0 5	

Решење: Зависности између послова се могу описати графом у коме постоји грана од чвора x до чвора y ако и само ако посао x зависи од чвора y. Међутим, за неке алгоритме је згодно посматрати и обратан граф у коме постоји грана од чвора x до чвора y ако и само ако посао y зависи од чвора x — у овом решењу ћемо користити овакву репрезентацију графа.

Задатак се једноставно може решити тако што се пронађе неки од послова који се могу одрадити (који не зависи ни од једног другог посла), уради се тај посао (нпр. испише на стандардни излаз), означи се као *обрађен* и означе се као *обрађене* и све гране које воде из тог чвора. На тај начин се проблем редукује на проблем истог облика и мање димензије. Ова индуктивно-рекурзивна конструкција се завршава када не остане више ни један посао који треба урадити. Посао се може урадити ако и само ако не постоје послови од којих он зависи (тј. ако су у графу све гране које воде ка том послу већ *обрађене*, то су гране између тог посла и послова од којих он зависи). Овај алгоритам је познат под именом *Канов алгоритам*.

Пошто је у сваком кораку Кановог алгоритма потребно одредити послове који зависе од посла који се управо ради, граф ћемо репрезентовати обратно и за сваки чвор x ћемо чувати низ чворова који зависе од посла x. У таквом графу посао се може извршити ако му је улазни степен 0 и одржаваћемо низ улазних степена чворова. Када се неки посао уради, улазни степени свих свих његових суседа се смањују за 1.

У наивној имплементацији претрагу за неким неурађеним послом чији је улазни степен 0 вршимо линеарном претрагом тог низа. Сложеност те линеарне претраге је $O(n)$ и пошто се она спроводи за сваки чвор, сложеност проналажења посла који се може извршити је $O(n^2)$. Сложеност полазног учитавања улазних степена чворова је $O(n+m)$ (гради се низ од n елемената и обрађује се свака од m грана). Такође, улазни степени се ажурирају приликом сваког избацивања гране из графа, па ће ажурирање улазних степена чворова бити сложености $O(m)$. Наравно, потребно је $O(n+m)$ корака да се учита и складишти граф. Дакле, укупна сложеност овакве имплементације је $O(n^2+m)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>

using namespace std;

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> izlazni_stepen(n);
  vector<vector<int>> preci(n);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    int x, y;
    cin >> x >> y;
    izlazni_stepen[x]++;
    preci[y].push_back(x);
  }

  vector<bool> resen(n, false);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int cvor;
    for (cvor = 0; cvor < n; cvor++) {
      if (!resen[cvor] && izlazni_stepen[cvor] == 0)
        break;
    }

    if (cvor == n)
      return 1;

    cout << cvor << endl;
    resen[cvor] = true;
    for (int predak : preci[cvor])
      izlazni_stepen[predak]--;
  }

  return 0;
}
```

Имплементација се значајно може убрзати ако све послове за које знамо да су степена 0 и да се могу урадити чувају у радној листи (реду). Након израчунавања почетних улазних степена чворова, у ред стављамо све оне чворове који имају степен 0. Узимамо један по један чвор из реда, умањујемо улазне степене пословима који од њих зависе и ако детектујемо да се неки степен тиме редукује на 0, тај посао одмах додајемо на крај реда. Сваки посао највише једном бива стављен и скинут из реда, па је укупна сложеност идентификације послова који се наредни раде $O(n)$. И у овом случају, потребно је $O(n+m)$ корака да се учита и складишти граф, као и да се изра-

чунају улазни степени полазног графа, као и $O(m)$ корака да се ажурирају вредности степена чворова током избацивања свих грана. Укупна сложеност је, дакле, $O(n+m)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>

using namespace std;

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<int> stepen(n);
  vector<vector<int>> preci(n);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    int x, y;
    cin >> x >> y;
    stepen[x]++;
    preci[y].push_back(x);
  }

  queue<int> nezavisni_cvorovi;
  for (int cvor = 0; cvor < n; cvor++)
    if (stepen[cvor] == 0)
      nezavisni_cvorovi.push(cvor);

  while (!nezavisni_cvorovi.empty()) {
    int cvor = nezavisni_cvorovi.front();
    cout << cvor << endl;
    nezavisni_cvorovi.pop();
    for (int predak : preci[cvor])
      if (--stepen[predak] == 0)
        nezavisni_cvorovi.push(predak);
  }

  return 0;
}
```

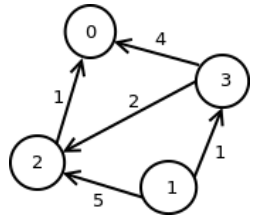
Другачији алгоритам може бити заснован на претрази у дубину. Знамо да посао мора бити урађен после свих послова од којих зависи. Зато приликом посете сваком чвору обрађујемо све све његове наследнике (у графу у којој грана од x ка y представља то да посао x зависи од посла y) и на крају серије рекурзивних позива текући чвор додајемо на врх стека. Претрагу позивамо из сваког чвора, и прекидамо је моментално ако установимо да је неки чвор раније био посећен. Након свих позива на стеку ће се наћи послови које треба урадити у обрнутом редоследу (посао који треба урадити последњи наћи ће се на врху стека). Сложеност овог приступа је $O(n+m)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <stack>

using namespace std;

void dfs(int cvor, vector<bool>& posecen, stack<int>& stek,
         const vector<vector<int>>& susedi) {
  // preskacemo sve ranije posecene cvorove
  if (posecen[cvor])
    return;
  posecen[cvor] = true;
  // pre tekuceg cvora moramo obraditi sve poslove od kojih on zavisi
  for (int sused : susedi[cvor])
    dfs(sused, posecen, stek, susedi);
  // sada mozemo obraditi i tekuci posao
  stek.push(cvor);
}

// topolosko sortiranje
vector<int> top_sort(const vector<vector<int>>& susedi) {
  int n = susedi.size();
  // pokrecemo pretragu u dubinu iz svakog cvora
  vector<bool> posecen(n, false);
  stack<int> stek;
  for (int cvor = 0; cvor < n; cvor++)
    dfs(cvor, posecen, stek, susedi);

  // obrcemo redosled poslova sa steka
  vector<int> redosled(n);
  for (int i = n-1; !stek.empty(); i--) {
    redosled[i] = stek.top();
    stek.pop();
  }
  return redosled;
}

int main() {
  // ucitavamo graf
  int n;
  cin >> n;
  int m;
  cin >> m;
  vector<vector<int>> susedi(n);
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    int x, y;
    cin >> x >> y;
```

```
    susedi[x].push_back(y);
  }

  // odredjujemo i ispisujemo topoloski redosled
  vector<int> redosled = top_sort(susedi);
  for (int cvor : redosled)
    cout << cvor << endl;

  return 0;
}
```

Најкраћи путеви од једног чвора

У наставку ћемо претпоставити да радимо са тежинским графовима тј. да је свакој грани графа $G = (V, E)$ придружена нека тежина (цео број, што обично може бити дужина гране тј. растојање између два суседна чвора).



Слика 2.9: Усмерени тежински граф.

Тежински граф можемо представити матрицом повезаности у којој се уместо логичких вредности чувају тежине грана (уз неку специјалну нумеричку вредност која означава да чворови нису повезани). Други начин за представљање тежинског графа је листа повезаности у којој k-ти елемент листе одговара чвору са редним бројем k, и чува податке о свим гранама које полазе из тог чвора, тј. чува векторе уређених парова који представљају индекс крајњег чвора до кога води та грана и тежину те гране.

У језику C++ репрезентација графа може бити било матрица облика

```
Tezina A[MAX][MAX];
```

било динамички алоцирана матрица облика

```
vector<vector<Tezina>> A(n);
for (int i = 0; i < n; i++)
   A[i].resize(n);
```

Ако користимо листе повезаности, онда можемо употребити структуру података облика

```
vector<vector<pair<Cvor, Tezina>> A(n);
```

која нам омогућава да веома једноставно додајемо нове гране.

```
A[cvorOd].emplace_back(cvorDo, tezina);
```

При том тип `Tezina` означава тежине грана (оне могу бити цели или реални бројеви), док тип `Cvor` означава индексе чворова (и они су по правилу целобројни).

На пример, усмерени тежински граф са слике 2.9 задајемо листама повезаности на следећи начин. На позицији 0 се налазе суседи (наследници) чвора означеног са 0 (у овом случају он нема наследника), на позицији 1 се налазе суседи чвора 1 (то су чворови 2 и 3, са тежинама грана које воде до њих редом 5, односно 1), на позицији 2 се налазе суседи чвора 2 (то је само чвор 0 са тежином гране 1), итд.

```
vector<vector<pair<int,int>>> listaSuseda
    {{}, {{2,5}, {3,1}}, {{0,1}}, {{0,4}, {2,2}}};
```

Ако је граф неусмерен, можемо га сматрати усмереним, при чему свакој његовој неусмереној грани одговарају две усмерене гране исте дужине, у оба смера. Према томе, алгоритми које ћемо разматрати се могу применити и на неусмерене графове.

Проблем:

За дати усмерени граф $G = (V, E)$ и његов задати чвор v пронаћи најкраће путеве од чвора v до свих осталих чворова у G. У првом тренутку ћемо се бавити само проналажењем дужина најкраћих путева (а не и самих најкраћих путева).

Постоји много ситуација у којима се појављује овај проблем. На пример, граф може одговарати ауто–карти: чворови су градови, а дужине грана су дужине директних путева између градова (или време потребно да се тај пут пређе, или изгради, итд, зависно од проблема).

Ациклички граф

Претпоставимо најпре да је граф G ациклички. У том случају проблем је лакши и његово решење помоћи ће нам у решавању општег случаја. Покушаћемо индукцијом по броју чворова.

Базни случај је тривијалан (када имамо само један чвор, удаљеност чвора од самог себе је 0).

Нека је број чворова графа $|V| = n$. Како смо претпоставили да је граф ациклички, можемо да искористимо тополошко сортирање графа из претходног одељка. Ако је редни број чвора v једнак k, онда се чворови са редним бројевима мањим од k не морају разматрати: не постоји начин да се до њих дође из v. Поред тога, редослед добијен тополошким сортирањем је погодан за примену индукције.

Посматрајмо последњи чвор, односно чвор z са редним бројем n. Претпоставимо (на основу индуктивне хипотезе) да знамо најкраће путеве од v до свих осталих чворова, сем до z. Означимо дужину најкраћег пута од v до произвољног чвора w са $w.SP$ (енг. *shortest path*). Да бисмо одредили дужину најкраћег пута од v до z, односно $z.SP$, довољно је да проверимо само оне путеве који пролазе кроз чворове w из којих постоји грана до z. Пошто се најкраћи путеви до осталих чворова већ знају, $z.SP$

једнако је минимуму збира $w.SP + duzina(w, z)$, по свим чворовима w из којих води грана до z. Да ли је тиме проблем решен? Питање је да ли додавање чвора z може да скрати пут до неког другог чвора. Међутим, пошто је z последњи чвор у тополошком редоследу, ни један други чвор није достижан из z, па се дужине осталих најкраћих путева не мењају. Дакле, уклањање z, налажење најкраћих путева без њега, и враћање z назад су основни делови алгоритма. Другим речима, следећа индуктивна хипотеза решава проблем.

Индуктивна хипотеза

Ако се зна тополошки редослед чворова, умемо да израчунамо дужине најкраћих путева од v до првих $n - 1$ чворова.

Кад је дат ациклички граф са n чворова (тополошки уређених), уклањамо n-ти чвор, индукцијом решавамо смањени проблем, налазимо најмању међу вредностима $w.SP + duzina(w, z)$ за све чворове w такве да $(w, z) \in E$ и њу проглашавамо за $z.SP$.

Сада ћемо покушати да усавршимо алгоритам тако да се тополошко сортирање обавља истовремено са налажењем најкраћих путева. Другим речима, циљ је објединити два пролаза (за тополошко сортирање и налажење најкраћих путева) у један.

Размотримо начин на који се алгоритам рекурзивно извршава (после налажења тополошког редоследа). Претпоставимо, због једноставности, да је редни број чвора v у тополошком редоследу 1 (чворови са редним бројем мањим од редног броја v ионако нису достижни из v). Први корак је позив рекурзивне процедуре. Процедура затим позива рекурзивно саму себе, све док се не дође до чвора v. У том тренутку се дужина најкраћег пута до v поставља на 0, и рекурзија почиње да се "размотава". Затим се разматра чвор u са редним бројем 2; дужина најкраћег пута до њега изједначује се са дужином гране (v, u), ако она постоји; у противном, не постоји пут од v до u. Следећи корак је провера чвора x са редним бројем 3. У овом случају у x улазе највише две гране (од v или u), па се упоређују дужине одговарајућих путева. Уместо оваквог извршавања рекурзије уназад, покушаћемо да исте кораке извршимо преко низа чворова са растућим редним бројевима.

Индукција се примењује према растућим редним бројевима почевши од v. Овај редослед ослобађа нас потребе да редне бројеве унапред знамо, па ћемо бити у стању да извршавамо истовремено оба алгоритма. Дакле, можемо размотрити наредну индуктивну хипотезу.

Индуктивна хипотеза

Ако се зна тополошки редослед чворова, умемо да израчунамо дужине најкраћих путева до чвора са редним бројевима од 1 до m.

Размотримо чвор са редним бројем $m + 1$, који ћемо означити са z. Да бисмо пронашли најкраћи пут до z, морамо да проверимо све гране које воде у z. Тополошки редослед гарантује да све такве гране полазе из чворова са мањим редним бројевима.

Према индуктивној хипотези ти чворови су већ разматрани, па се дужине најкраћих путева до њих знају. За сваку грану (w, z) знамо дужину $w.SP$ најкраћег пута до w, па је дужина најкраћег пута до z преко w једнака $w.SP + duzina(w, z)$. Поред тога, као и раније, не морамо да водимо рачуна о евентуалним променама најкраћих путева ка чворовима са мањим редним бројевима, јер се до њих не може доћи из z. Побољшани алгоритам приказан је у наставку.

Задатак: Најкраћи пут из једног чвора

Поставка: Градови су повезани путевима и за сваки пут је позната дужина између два града. Напиши програм који одређује најкраће путеве између почетног града (означеним чвором 0) и свих осталих градова. Претпоставка је да је граф који представља везу између градова, ациклички.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број градова n ($1 \leq n \leq 1000$), у наредном реду број путева m ($1 \leq m \leq n^2 - n$) и затим у наредних m редова описи путева (два цела броја који представљају редне бројеве градова, који се броје од нуле и након тога позитиван цео број који представља дужину пута између та два града).

Излаз: На стандардни излаз исписати, за сваки град, минималну дужину пута потребну да се стигне од стартног до циљног града као и градове кроз које се тим путем пролази.

Пример

Улаз

```
9
8
0 1 3
0 2 2
1 3 1
1 4 2
2 5 3
4 6 1
4 7 3
5 8 4
```

Излаз

```
Najkraci put do cvora 0 je: 0 i duzine je 0
Najkraci put do cvora 1 je: 0, 1 i duzine je 3
Najkraci put do cvora 2 je: 0, 2 i duzine je 2
Najkraci put do cvora 3 je: 0, 1, 3 i duzine je 4
Najkraci put do cvora 4 je: 0, 1, 4 i duzine je 5
Najkraci put do cvora 5 je: 0, 2, 5 i duzine je 5
Najkraci put do cvora 6 je: 0, 1, 4, 6 i duzine je 6
Najkraci put do cvora 7 je: 0, 1, 4, 7 i duzine je 8
Najkraci put do cvora 8 je: 0, 2, 5, 8 i duzine je 9
```

Решење: Свака грана се по једном разматра у току иницијализације улазних степенова, и по једном у тренутку кад се њен полазни чвор уклања из листе. Приступ листи

захтева константно време. Сваки чвор се разматра тачно једном. Према томе, временска сложеност алгоритма у најгорем случају је $O(|V| + |E|)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <limits>
#include <queue>

using namespace std;

typedef int Cvor;
typedef int Duzina;
typedef pair<Cvor, Duzina> Par;

const Duzina INF = numeric_limits<Duzina>::infinity();

// funkcija koja stampa put od izdvojenog cvora do datog cvora
// kroz grane drveta najkracih puteva
void odstampajPutDoCvora(int cvor, vector<int> roditelj) {
  if (roditelj[cvor] == -1)
    return;
  odstampajPutDoCvora(roditelj[cvor],roditelj);
  cout << ", " << cvor;
}

// funkcija koja stampa najkraci put do datog cvora i njegovu duzinu
void odstampajNajkraciPut(int cvor, vector<int> roditelj,
              vector<int> najkraciPut) {
  cout << "Najkraci put do cvora " << cvor << " je: 0";
  odstampajPutDoCvora(cvor,roditelj);
  cout << " i duzine je " << najkraciPut[cvor] << endl;
}

void aciklicki_najkraci_putevi(vector<vector<Par> > listaSuseda) {
  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  // niz koji za svaki cvor cuva njegov ulazni stepen
  vector<int> ulazniStepen(brojCvorova,0);

  // niz koji za svaki cvor cuva duzinu najkraceg puta do njega
  vector<int> najkraciPut(brojCvorova,numeric_limits<int>::max());

  // niz koji za svaki cvor cuva njegovog prethodnika u
  // najkracem putu
  vector<int> roditelj(brojCvorova,-1);
  najkraciPut[0] = 0;

  // inicijalizujemo niz ulaznih stepena cvorova
  for(int i=0; i<listaSuseda.size(); i++)
```

```
    for(int j=0; j<listaSuseda[i].size(); j++)
      ulazniStepen[listaSuseda[i][j].first]++;

  queue<int> cvoroviStepenaNula;
  // cvorove koji su ulaznog stepena 0 dodajemo u red
  for(int i=0; i<brojCvorova; i++)
    if(ulazniStepen[i] == 0)
      cvoroviStepenaNula.push(i);

  while(!cvoroviStepenaNula.empty()){
    // cvor sa pocetka reda numerisemo narednim brojem
    int cvor = cvoroviStepenaNula.front();
    cvoroviStepenaNula.pop();
    odstampajNajkraciPut(cvor,roditelj,najkraciPut);
    for(int i=0; i<listaSuseda[cvor].size(); i++){
      // ukoliko je kraci put do nekog cvora preko upravo razmatranog cvora
      // vrsimo azuriranje najkraceg rastojanja do tog cvora
      int sused = listaSuseda[cvor][i].first;
      int grana = listaSuseda[cvor][i].second;
      if(najkraciPut[cvor]+grana < najkraciPut[sused]){
    najkraciPut[sused] = najkraciPut[cvor] + grana;
    // azuriramo preko koji je pretposlednji cvor na najkracem putu
    roditelj[sused] = cvor;
      }

      ulazniStepen[sused]--;
      // ukoliko je stepen nekog od suseda pao na 0, dodajemo ga u red
      if(ulazniStepen[sused] == 0)
    cvoroviStepenaNula.push(sused);
    }
  }
}

int main() {

  // ucitavamo graf - koristimo liste suseda
  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<Par>> listaSuseda(n);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    Cvor cvorOd, cvorDo; Duzina duzina;
    cin >> cvorOd >> cvorDo >> duzina;
    listaSuseda[cvorOd].emplace_back(cvorDo, duzina);
  }
```

```
  aciklicki_najkraci_putevi(listaSuseda);
  return 0;
}
```

Дајкстрин алгоритам

Дајкстрин алгоритам је алгоритам који нам омогућава да ефикасно пронађемо дужине најкраћих путева од једног фиксираног чвора, до свих осталих чворова у графу. Посебно, њиме можемо наћи најкраће растојање између два унапред задата чвора. У наставку ћемо претпоставити да су дужине свих грана у графу ненегативне.

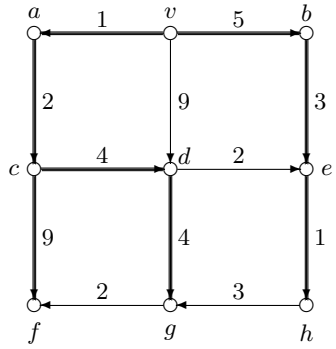
Инваријанта овог алгоритма је то да након k корака извршавања алгоритма умемо да пронађемо k чворова најближих почетном чвору v и дужине најкраћих путева до њих. У почетку знамо само да је чвор v најближи сам себи и да је дужина пута од v до v једна нули. Означимо са V_k скуп који се састоји од k најближих чворова чвору v, укључујући и v. Проблем је пронаћи чвор w који је најближи чвору v међу чворовима ван V_k, и пронаћи дужину најкраћег пута од v до w. Најкраћи пут од v до w може да садржи само чворове из V_k. Он не може да садржи неки чвор y ван V_k, јер би чвор y био ближи чвору v од w. Према томе, да бисмо пронашли чвор w, довољно је да проверимо гране које спајају чворове из V_k са чворовима који нису у V_k; све друге гране се за сада могу игнорисати. Нека је (u, z) грана таква да је $u \in V_k$ и $z \notin V_k$. Таква грана одређује пут од v до z који се састоји од најкраћег пута од v до u (који је већ познат) и гране (u, z). Довољно је упоредити све такве путеве и изабрати најкраћи међу њима. Дакле, чвор w је чвор за који је најмања дужина

$$\min\{d(v, u) + d(u, w) \mid u \in V_k\}.$$

При том, $d(v, u)$ нам је већ познато минимално растојање од v до u, док је $d(u, w)$ дужина гране између u и w.

У имплементацији можемо у једном низу одржавати текуће процене најкраћих растојања од v до свих осталих чворова. У почетку у низ на место чвора v уписујемо 0, док је дужина свих других путева непозната и у низ уписујемо $+\infty$. Чворове који се налазе у тренутном скупу V_k ћемо на неки начин означавати (на пример, одржавањем помоћног низа логичких вредности којима ћемо вредностима 1 обележавати чворове који припадају скупу V_k). У сваком кораку из низа бирамо онај неозначени чвор w који има тренутно најмање растојање и придодајемо га у скуп V_k тако што га означавамо. Његово тренутно растојање од чвора v (које је уписано у низу на месту чвора w) је уједно и најкраће растојање од чвора v до свих чворова ван V_k. Зато је w чвор који је $k + 1$ и њиме проширујемо скуп V_k. У том тренутку ажурирамо остала растојања у низу. Нагласимо да приликом проширивања скупа V_k чвором w нема потребе ажурирати путање из чворова који се већ налазе у V_k, већ је довољно ажурирати само путање које воде преко w. То радимо тако што за суседе чвора w проверавамо да ли је збир најкраћег пута од v до w (тренутна вредност у низу на месту чвора w) и дужине гране од w до тог чвора мања од тренутне процене најмање дужине пута дог тог чвора (тј. тренутне вредности у низу на месту тог чвора).

Пример извршавања Дајкстриног алгоритма за налажење најкраћих путева од чвора v у графу дат је на слици. Прва врста односи се само на путеве од једне гране из v. Бира се најкраћи пут, у овом случају он води ка чвору a. Друга врста показује поправке дужина путева укључујући сада све путеве од једне гране из v или a, и најкраћи пут сада води до c. У свакој линији бира се нови чвор, и приказују се дужине тренутних најкраћих путева од v до свих чворова. Подебљана су растојања за која се поуздано зна да су најкраћа (ти чворови су означени).



	v	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	1	5	∞	9	∞	∞	∞	∞
c	0	**1**	5	3	9	∞	∞	∞	∞
b	0	**1**	5	**3**	7	∞	12	∞	∞
d	0	**1**	**5**	**3**	7	8	12	∞	∞
e	0	**1**	**5**	**3**	**7**	8	12	11	∞
h	0	**1**	**5**	**3**	**7**	**8**	12	11	9
g	0	**1**	**5**	**3**	**7**	**8**	12	11	**9**
f	0	**1**	**5**	**3**	**7**	**8**	12	**11**	**9**

Слика 2.10: Пример примене Дајкстриног алгоритма.

Пошто је у сваком кораку потребно проналазити минимум скупа бројева и након тога уклањати минимум из скупа, уместо низа, можемо користити ред са приоритетом (тј. хип) у којем чувамо скуп неозначених чворова, уређен на основу тренутне процене растојања од чвора v. Кључни проблем ове имплементације је то што се након проширивања скупа V_k за неке чворове процене дужине пута смањују, па је потребно ажурирати њихове вредности у реду са приоритетом. Редови са приоритетом обично не подржавају директно такве операције. Један начин је да се креира специјализована имплементација која би подржала могућност смањивања вредности у реду, а други начин је да се употреби тзв. техника лењог брисања. У том случају се након смањивања процене растојања неког чвора у ред просто додаје нови елемент који представља смањено растојање. Тиме се за исти чвор у реду истовремено чува више различитих процена растојања. У тренутку када се чвор w убацује у V_k из реда ће бити извађено његово најмање растојање од v (ако за чвор w постоје неке раније процене, оне ће сигурно бити веће и још ће се налазити у реду). Ако се касније деси да се из реда извади чвор w на основу неке раније процене, то ћемо лако препознати на основу тога што је w већ раније био убачен у скуп V_k и означен, тако да ћемо тај елемент извађен из реда просто занемарити и прећи ћемо на наредни елемент из реда.

Задатак: Најкраћи пут између два града

Поставка: Градови су повезани путевима и за сваки пут је познато време потребно да се прође њиме (време потребно да се прође у једном и у другом смеру не мора бити исто). Напиши програм који одређује најкраћи пут између два дата града.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број градова n ($1 \leq n \leq 1000$), у наредном реду

број путева m ($1 \leq m \leq n^2 - n$) и затим у наредних m редова описи путева (два цела броја који представљају редне бројеве градова, који се броје од нуле и након тога позитиван реалан број који представља време да се пут пређе). У последња два реда се налазе редни број стартног и редни број циљног града.

Излаз: На стандардни излаз исписати минимално време потребно да се стигне од стартног до циљног града, заокружено на пет децимала, а затим, у наредном реду, редне бројеве градова на путу од старта до циља. Ако се од старта до циља не може стићи учитаним путевима, само исписати `ne`.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 6 0 1 1.2 1 2 1.3 0 2 2.0 0 3 5.7 1 3 4.6 2 3 2.1 0 3	4.10000 0 2 3

Решење: Задатак се решава Дајкстриним алгоритмом. Ако у сваком кораку алгоритма најближи чвор проналазимо обиласком низа тренутних растојања, сложеност алгоритма је $O(n^2)$.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
#include <stack>
#include <limits>
#include <utility>
#include <tuple>

using namespace std;

typedef int Cvor;
typedef double Duzina;
typedef pair<Duzina, Cvor> Par;

const Duzina INF = numeric_limits<Duzina>::infinity();

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  // ucitavamo graf - koristimo liste suseda
  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<Par>> susedi(n);
```

```
int m;
cin >> m;
for (int i = 0; i < m; i++) {
  Cvor cvorOd, cvorDo; Duzina duzina;
  cin >> cvorOd >> cvorDo >> duzina;
  susedi[cvorOd].emplace_back(duzina, cvorDo);
}
// ucitavamo startni i ciljni cvor
int start, cilj;
cin >> start >> cilj;

// za svaki cvor cuvamo duzinu najkraceg poznatog puta od startnog cvora
vector<Duzina> duzinaPuta(n, INF);
// zatim da li ta procena predstavlja upravo najkraci moguci put
vector<bool> resen(n, false);
// kao i prethodni cvor na tom trenutno procenjenom najkracem putu
vector<Cvor> roditelji(n, -1);
// u pocetku jedino znamo rastojanje do startnog cvora
duzinaPuta[start] = 0.0;
// dok ne odredimo najkraci put za sve cvorove
int brojResenih = 0;
while (brojResenih < n) {
  // odredjujemo nereseni cvor koji je trenutno najblizi startnom
  Cvor cvorMin = 0; Duzina minDuzina = INF;
  for (Cvor cvor = 0; cvor < n; cvor++)
    if (!resen[cvor] && duzinaPuta[cvor] < minDuzina) {
      cvorMin = cvor;
      minDuzina = duzinaPuta[cvor];
    }

  // nije moguce da postoji bolji put do cvoraMin - belezimo da je on
  // resen i povecavamo broj resenih cvorova
  resen[cvorMin] = true;
  brojResenih++;
  // ako je za ciljni cvor odredjeno rastojanje, nema potrebe vrsiti
  // dalju pretragu
  if (cvorMin == cilj)
    break;
  // analiziramo susede cvoraMin
  for (const auto& p : susedi[cvorMin]) {
    Cvor cvor; Duzina duzina;
    tie(duzina, cvor) = p;
    // ako je potrebno, azuriramo duzine puta do njegovih suseda
    if (!resen[cvor] && minDuzina + duzina < duzinaPuta[cvor]) {
      duzinaPuta[cvor] = minDuzina + duzina;
      roditelji[cvor] = cvorMin;
    }
```

```
    }
  }

  // ako put do cilja postoji
  if (duzinaPuta[cilj] < INF) {
    // ispisujemo duzinu najkraceg puta
    cout << fixed << showpoint << setprecision(5)
         << duzinaPuta[cilj] << endl;
    // pratimo put od cilja do starta, unatrag
    // da bismo obrnuli put, koristimo stek
    stack<Cvor> put;
    put.push(cilj);
    while (roditelji[cilj] != -1) {
      cilj = roditelji[cilj];
      put.push(cilj);
    }
    // ispisujemo put od starta do cilja
    while (!put.empty()) {
      cout << put.top() << " ";
      put.pop();
    }
    cout << endl;
  } else
    // prijavljujemo da put do cilja ne postoji
    cout << "ne" << endl;

  return 0;
}
```

Ефикасност је боља (осим у случају веома густих графова) ако користимо ред са приоритетом. Пошто у библиотечком реду не можемо једноставно ажурирати вредности елемената, користићемо веома једноставну технику лењог брисања (додајемо елемент са мањом вредношћу, а старији елемент, са већом вредношћу бришемо из реда тек када исплива као најмањи елемент реда - тада га просто игноришемо, јер знамо да је чвор коме тај елемент одговара већ обрађен).

Временска сложеност оваквог решења је $O((n+m)\cdot \log m)$, где је n број чворова, а m број грана у графу. Наиме, ако је циљни чвор најдаљи, тада је потребно извршити бар n операција вађења чворова из реда, за шта нам је потребно бар $O(n \log m)$ операција (јер је вађење минималног чвора операција која логаритамски зависи од броја елемената у реду, а у реду, због лењог брисања може постојати m елемената). Због лењог брисања може бити чак m операција вађења елемената из реда, што доноси $O(m \log m)$ операција. Такође је, због лењог брисања могуће да се изврши m уметања у ред што је такође $O(m \log m)$ операција. Дакле, укупан број операција је $O((n+m)\log m)$. Када би се уместо лењог брисања мењале вредности у реду (што тражи ручну имплементацију реда), у реду би увек било највише n елемената, па би сложеност била $O((n+m)\log n)$. Пошто је у графу увек $m = O(n^2)$ (усмерени граф има највише n^2 грана), асимптотска сложеност би била иста као и са лењим брисањем.

Без лењог брисања, са специфичним имплементацијама реда са приоритетом (помоћу тзв. Фибоначијевог хипа) могуће је постићи сложеност $O(m + n \log n)$, што није значајно боље. Сложеност је најгора у густом графу $O(n^2 \log n)$, што је асимптотски лошије него у случају имплементације без реда са приоритетом. Ако је граф редак тј. ако посматрамо класу графова у којој је $m = O(n)$, тада је сложеност повољнија и износи $O(n \log n)$.

Што се тиче меморијске сложености, са лењим брисањем ред са приоритетом заузима $O(m)$ додатне меморије. С обзиром да је за представљање графа потребно бар $O(n + m)$ меморије, ово не повећава асимптотски меморијску сложеност.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
#include <stack>
#include <queue>
#include <limits>
#include <utility>
#include <tuple>

using namespace std;

typedef int Cvor;
typedef double Duzina;
typedef pair<Duzina, Cvor> Par;
typedef tuple<Duzina, Cvor, Cvor> Trojka;

const Duzina INF = numeric_limits<Duzina>::infinity();

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  // ucitavamo graf - koristimo liste suseda
  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<Par>> susedi(n);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    Cvor cvorOd, cvorDo; Duzina duzina;
    cin >> cvorOd >> cvorDo >> duzina;
    susedi[cvorOd].emplace_back(duzina, cvorDo);
  }
  // ucitavamo startni i ciljni cvor
  int start, cilj;
  cin >> start >> cilj;

  // za svaki cvor cuvamo duzinu najkraceg poznatog puta od startnog cvora
  vector<Duzina> duzinaPuta(n, INF);
```

```
// zatim da li ta procena predstavlja upravo najkraci moguci put
vector<bool> resen(n, false);
// kao i prethodni cvor na tom trenutno procenjenom najkracem putu
vector<Cvor> roditelji(n, -1);
// u pocetku jedino znamo rastojanje do startnog cvora
duzinaPuta[start] = 0.0;
// da bismo brze odredjivali trenutno najblizi cvor, cvorove cuvamo u
// redu sa prioritetom - za svaki cvor znamo procenu najkraceg puta od
// starta i prethodni cvor na tom najkracem putu
priority_queue<Trojka, vector<Trojka>, greater<Trojka>> pq;
// krecemo od startnog cvora
pq.emplace(0.0, start, -1);
// dok ima jos cvorova do kojih se moze stici
while (!pq.empty()) {
  // vadimo iz reda cvor koji je trenutno najblizi startnom
  Cvor cvorMin, roditelj; Duzina minDuzina;
  tie(minDuzina, cvorMin, roditelj) = pq.top(); pq.pop();
  // zbog lenjog brisanja je moguce da je za taj cvor jos ranije
  // pronadjeno krace rastojanje - u tom slucaju je ovo zastareo
  // podatak i prosto ga ignorisemo
  if (resen[cvorMin])
    continue;
  // nije moguce da postoji bolji put do cvoraMin - belezimo da je on
  // resen, i u niz roditelja pamtimo prethodni cvor na najkracem putu
  resen[cvorMin] = true;
  roditelji[cvorMin] = roditelj;
  // ako je za ciljni cvor odredjeno rastojanje, nema potrebe vrsiti
  // dalju pretragu
  if (cvorMin == cilj)
    break;
  // analiziramo susede cvoraMin
  for (const auto& p : susedi[cvorMin]) {
    Cvor cvor; Duzina duzina;
    tie(duzina, cvor) = p;
    // ako je potrebno, azuriramo duzine puta do njegovih suseda
    if (!resen[cvor] && minDuzina + duzina < duzinaPuta[cvor]) {
      duzinaPuta[cvor] = minDuzina + duzina;
      pq.emplace(duzinaPuta[cvor], cvor, cvorMin);
    }
  }
}

// ako put do cilja postoji
if (duzinaPuta[cilj] < INF) {
  // ispisujemo duzinu najkraceg puta
  cout << fixed << showpoint << setprecision(5)
       << duzinaPuta[cilj] << endl;
```

```
    // pratimo put od cilja do starta, unatrag
    // da bismo obrnuli put, koristimo stek
    stack<Cvor> put;
    put.push(cilj);
    while (roditelji[cilj] != -1) {
      cilj = roditelji[cilj];
      put.push(cilj);
    }
    // ispisujemo put od starta do cilja
    while (!put.empty()) {
      cout << put.top() << " ";
      put.pop();
    }
    cout << endl;
  } else
    // prijavljujemo da put do cilja ne postoji
    cout << "ne" << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Најкраћи пут преко аеродрома

Поставка: Нека је дат скуп аеродрома. Путник треба да оде из једног града у други. Међутим, како наш путник воли да посећује аеродроме које до тад није видео он захтева да путује преко одређеног града односно аеродрома. Помозимо путнику да идући од почетног до крајњег аеродрома преко оног који захтева да посети пређе најмањи могући пут.

Улаз: Са стандардно улаза се уносе бројеви n и m који представљају број аеродрома и летова између њих. У наредних m линија се уносе по 2 целобројне и једна вреднсот у покретном зарезу које предтсављају аеродроме и километражу између њих. Након тога се уноси један цео број који представља аеродром преко ког путник жели да иде. Након тога се уносе још 2 вредности које представљају почетни и крајњи аеродром.

Излаз: На стандардни излаз исписати минималну километражу коју путник мора да пређе заокружену на 1 децималу.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 5 0 1 1.0 1 2 1.0 2 3 1.0 3 4 1.0 0 4 10.0 2 0 4	4.0

Решење: За решавање овог проблема можемо користити Дајкстринг алгоритам и то тако што прво одредимо најкраћи пут од почетног аеродрома до оног преко ког путник жели да иде а затим најкраћи пут од жељеног до крајњег аеродрома. Ове две вредности само саберемо и добијемо најмању километражу коју путник мора да пређе ако иде преко неког аеродрома. Треба додатно обратити пажњу на то да када нађемо пут од почетног до средњег чвора у графу треба "ресетовати" граф, односно ажурирати све вредности које се користе у алгоритму (shortest_path, distances и path_found) да би алгоритам исправно радио јер ми тражимо најкраће путеве из новог чвора, тј покрећемо алгоритам још једном и подаци морају бити одговарајући.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <climits>
#include <queue>
#include <stack>
#include <cfloat>
#include <iomanip>

#define INFINITY DBL_MAX

struct compare
{
  bool operator()(std::pair<double, int> &p1, std::pair<double, int> &p2)
  {
    return p1.first > p2.first;
  }
};

struct Graph {
  std::vector<std::vector<std::pair<int, double>>> adjacency_list;
  int V;
  std::vector<double> distances;
  std::vector<bool> path_found;
  std::vector<double> shortest_path;
};
```

```
void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<std::pair<int, double>>> &a
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.distances = distances;
  g.path_found = path_found;
  g.shortest_path = shortest_path;
  g.V = V;
}

void reset_graph(Graph &g)
{
  std::fill(g.distances.begin(), g.distances.end(), INFINITY);
  std::fill(g.path_found.begin(), g.path_found.end(), false);
  std::fill(g.shortest_path.begin(), g.shortest_path.end(), INFINITY);
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v, double weight)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(std::make_pair(v, weight));
  g.adjacency_list[v].push_back(std::make_pair(u, weight));
}

double dijkstra(Graph &g, int u, int v)
{
  std::priority_queue<std::pair<double, int>, std::vector<std::pair<double, int>>, compar

  g.distances[u] = 0;

  heap.push(std::make_pair(g.distances[u], u));

  std::pair<double, int> tmp;

  while (!heap.empty()) {
    tmp = heap.top();

    heap.pop();

    if (g.path_found[tmp.second])
      continue;

    g.path_found[tmp.second] = true;

    for (std::pair<int, double> &neighbour : g.adjacency_list[tmp.second]) {
      if (!g.path_found[neighbour.first] && g.distances[neighbour.first] > g.distances[tm
        g.distances[neighbour.first] = g.distances[tmp.second] + neighbour.second;
        heap.push(std::make_pair(g.distances[neighbour.first], neighbour.first));
      }
```

```
    }
  }

  return g.distances[v];
}

void find_path_via_airport(Graph &g, int a, int b, int x)
{
  double distance_to = dijkstra(g, a, x);

  reset_graph(g);

  double distance_from = dijkstra(g, x, b);

  std::cout << std::fixed << std::showpoint << std::setprecision(1) << distance_to

}

int main ()
{
  int n, m, x, y, a, b;

  double z;

  std::cin >> n >> m;

  std::vector<std::vector<std::pair<int, double>>> adjacency_list(n);
  std::vector<double> distances(n, INFINITY);
  std::vector<bool> path_found(n, false);
  std::vector<double> shortest_path(n, INFINITY);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, distances, path_found, shortest_path, n);

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y >> z;
    add_edge(g, x, y, z);
  }

  std::cin >> x;

  std::cin >> a >> b;

  find_path_via_airport(g, a, b, x);

  return 0;
}
```

Задатак: Најближа полицијска станица

Поставка: Нека је дато n градова који су повезани двосмерним путевима. У неким од градова постоје полицијске станице. За сваки од градова одредити његову удаљеност до најближе полицијске станице.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе бројеви n и m који представљају број градова и број путева између њих. У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају градове који су повезани путевима. Након тога се уноси број k који представља број градова који имају полицијске станице. У следећих k линија се уносе вредности које представљају градове који имају станице.

Излаз: На стандардни излаз за сваки град исписати удаљеност до најближе полицијске станице у наведеном формату.

Пример

Улаз
```
6 8
0 1
0 5
1 2
1 5
2 3
2 4
2 5
3 4
2
0
4
```

Излаз
```
0 0
1 1
2 1
3 1
4 0
5 1
```

Решење: Овај проблем може бити решен применом Дајкстриног алгоритма при чему ће тежина сваког пута (гране графа) бити 1. На овај начин ћемо наћи колико је удаљена најближа полицијска станица за сваки град. Удаљености за градове који имају полицијске станице одмах стављамо на 0 и њих одмах додајемо у ред са приоритетом (хип) а након тога примењујемо стандардни Дајкстринг алгоритам.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <climits>
#include <queue>
#include <stack>
#include <cfloat>
#include <iomanip>

#define INFINITY DBL_MAX

struct compare
{
  bool operator()(std::pair<double, int> &p1, std::pair<double, int> &p2)
  {
```

```
    return p1.first > p2.first;
  }
};

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  int V;
  std::vector<double> distances;
  std::vector<bool> path_found;
  std::vector<double> shortest_path;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.distances = distances;
  g.path_found = path_found;
  g.shortest_path = shortest_path;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
}

void dijkstra(Graph &g, const std::vector<int> &police_stations)
{
  std::priority_queue<std::pair<double, int>, std::vector<std::pair<double, int>>,

  for (int police_station : police_stations) {
    heap.push(std::make_pair(0, police_station));
    g.distances[police_station] = 0;
  }

  std::pair<double, int> tmp;

  while (!heap.empty()) {
    tmp = heap.top();

    heap.pop();

    if (g.path_found[tmp.second])
      continue;

    g.path_found[tmp.second] = true;
```

```
    for (int neighbour : g.adjacency_list[tmp.second]) {
      if (!g.path_found[neighbour] && g.distances[neighbour] > g.distances[tmp.second] +
        g.distances[neighbour] = g.distances[tmp.second] + 1;
        heap.push(std::make_pair(g.distances[neighbour], neighbour));
      }
    }
  }
}

void find_closest_police_stations(Graph &g, const std::vector<int> &police_stations)
{
    dijkstra(g, police_stations);

    for (int i = 0; i < g.V; i++)
        std::cout << i << " " << g.distances[i] << "\n";
}

int main ()
{
  int n, m, x, y;

  std::cin >> n >> m;

  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list(n);
  std::vector<double> distances(n, INFINITY);
  std::vector<bool> path_found(n, false);
  std::vector<double> shortest_path(n, INFINITY);
  std::vector<int> police_stations;

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, distances, path_found, shortest_path, n);

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  std::cin >> n;

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    std::cin >> x;
    police_stations.push_back(x);
  }

  find_closest_police_stations(g, police_stations);
```

```
  return 0;
}
```

Задатак: Парни ваљак

Поставка: Багериста вози багер који је спор и треба му пуно времена да убрза, укочи и промени смер кретања. Град кроз који се креће је веома правилан и састоји се од мреже правоугаоних улица. Багериста жели да прође од почетне раскрснице на којој се багер тренутно налази до крајње раскрснице на којој се налази градилиште. Потребно време да би багер прешао неко парче улице (од једне раскрснице до друге) зависи од тога да ли се багер на уласку у њу већ креће својом максималном брзином у одговарајућем смеру и ако на крају тог дела улице може да задржи своју максималну брзину. Ако је тако, онда је то време једнако времену учитаном са улаза (оно је једнако било да се багер улицом креће у једном или у другом смеру). Са друге стране, ако багер кретање започиње из мировања или ако на крају улице мора да се заустави, онда му је потребно двоструко више времена од оног које је учитано са улаза. Да би багер могао да скрене, он претходно мора да се заустави (скретање при максималној брзини није могуће). Багер креће из стања мировања и на градилишту опет мора да буде у стању мировања.

Напиши програм који одређује најмање време потребно багеру да стигне на градилиште.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси 6 целих бројева: број хоризонтално и број вертикално постављених улица у градској мрежи (V и K), позиција почетне раскрснице (v_p и k_p) и позиција крајње раскрснице (v_k и k_k), при чему важи $1 \leq v_p, v_k \leq V \leq 100$ и $1 \leq k_p, k_k \leq K \leq 100$. Након тога задају се бројеви који представљају времена потребна да се одговарајуће улице пређу под претпоставком да се багер креће својом максималном брзином. У непарним редовима налазе се бројеви који описују времена за хоризонталне сегменте улица, а у парним налазе се бројеви који описују времена за вертикалне сегменте улица. Број 0 означава да багер том улицом не може проћи. Ради јасније прегледности, бројеви могу бити раздвојени и са више размака.

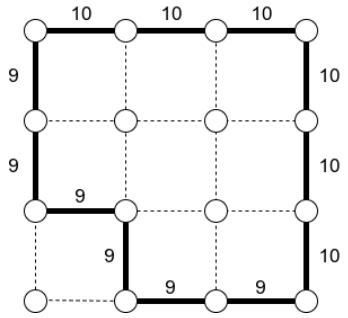
Излаз: На стандардни излаз исписати тражено најмање време.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 4 1 1 4 4 10 10 10 9 0 0 10 0 0 0 9 0 0 10 9 0 0 0 9 0 10 0 9 9	100

Објашњење

Улаз описује мрежу улица приказану на слици.



Слика 2.11: Мрежа улица

Иако се на први поглед чини да је боље ићи улицама кроз које се може прећи за 9 јединица времена, због потребе за скретањем, бољи је пут којим се иде улицама које се могу прећи за 10 јединица времена. Наиме, ако би се ишло првим путем, сваку улицу би багер прелазио за 18 јединица времена (било због тога што креће из стања мировања, било због тога што на крају улице мора да успори да би се припремио за скретање или што је стигао до градилишта). Укупно време било би једнако 108 јединица времена. Ако би се кретао горњим путем, прву улицу би прешао за 20 (јер креће из стања мировања), затим би наредну могао да пређе за 10 (јер је већ постигао брзину и не мора да успори на крају), затим би наредну прешао за 20 (јер на крају мора да успори да би се припремио за скретање), наредну такође за 20 (јер креће из мировања), наредну за 10 (јер у њу улази брзо и може да изађе брзо) и последњу за 20 (јер мора да се заустави на градилишту). То је укупно 100 јединица времена и брже је од горњег пута.

Решење: Задатак можемо решити Дајкстриним алгоритмом одређивања најкраћег пута између две тачке, међутим, граф морамо конструисати на специфичан начин који у обзир узима то да време преласка улице зависи од смера и брзине кретања багера.

Сваки чвор графа одговараће некој раскрсници и чуваће уређену четворку која садржи позицију багера, његов смер кретања (исток, запад, север и југ) и брзину (мировање или максимална брзина). За сваку (оријентисану) улицу формираћемо више грана између чворова графа. Не смемо заборавити да за сваку улицу у граф додамо могућност преласка те улице у два смера.

Сваку оријентисану улицу обрађујемо на следећи начин. Полазни чворови тих грана одговараће раскрсници на почетку улице и разматраћемо све могуће чворове за ту раскрсницу (8 чворова који одговарају свим комбинацијама положаја багера и његове брзине). У долазним чворовима усмереност багера биће једнозначно одређена правцем и смером улице коју је багер прешао, док ће брзина багера моћи да буде и максимална и мировање (као оба чвора која одговарају долазној раскрсници вучемо гране). Дакле, потенцијално се додаје 16 могућих грана. Међутим, на основу услова задатка да багер не може да скрене при максималној брзини елиминисаћемо све оне гране у којима се у полазном чвору багер креће максималном брзином, а није исто оријентисан као у долазном чвору. Таквих је 6 грана, па ћемо за сваку оријентисану

улицу у граф додати 10 грана. Тежина гране (време потребно да багер пређе улицу) ће се дуплирати у свим случајевима осим када је смер кретања багера исти и у полазној и у долазној раскрсници и брзина му је максимална у обе.

Почетни чвор графа може бити гранама тежине 0 спојен са чворовима који одговарају полазној раскрсници багера, на којима багер мирује (таква су 4 чвора, по један за сваку оријентацију багера). Крајњи чвор графа може гранама тежине 0 бити спојен са чворовима који одговарају долазној раскрсници багера, на којима багер мирује (таква су поново 4 чвора, по један за сваку оријентацију багера).

Након конструкције графа, Дајсктрин алгоритам спроводимо на потпуно уобичајен начин.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <queue>
#include <limits>

using namespace std;

typedef int Vreme;
typedef int Cvor;
typedef pair<Vreme, Cvor> Grana;

enum Smer {ISTOK = 0, ZAPAD, SEVER, JUG};
enum Brzina {SPORO = 0, BRZO};

// redni broj cvora u grafu (cvor je odredjen koordinatama raskrsnice,
// orijentacijom i brzinom kretanja valjka).
Cvor brojCvora(int r, int c, int C, Smer smer, Brzina brzina) {
  return r * (8 * C) + 8 * c + 2*smer + brzina;
}

// prosirivanje grafa svim granama koje spajaju cvorove koji odgovaraju
// raskrsnicama (vSa, kSa) i (vNa, kNa)
void dodajGrane(int V, int K, int vSa, int kSa, int vNa, int kNa,
                Smer smer, Vreme vreme,
                vector<vector<Grana>>& susedi) {
  // razmatramo sve moguce cvorove koji odgovaraju polaznoj raskrsnici
  for (int smerSa = ISTOK; smerSa <= JUG; smerSa++) {
    for (int brzinaSa = SPORO; brzinaSa <= BRZO; brzinaSa++) {
      // razmatramo moguce cvorove koji odgovaraju dolaznoj raskrsnici
      // u njima je smer valjka fiksiran, ali razmatramo dve brzine
      for (int brzinaNa = SPORO; brzinaNa <= BRZO; brzinaNa++) {
        // valjak ne sme da skrene pri punoj brzini
        if (smerSa != smer && brzinaSa == BRZO) continue;
        // brojevi pocetnog i zavrsnog cvora grane
        int cvorSa = brojCvora(vSa, kSa, K,
                               static_cast<Smer>(smerSa),
```

```
                                static_cast<Brzina>(brzinaSa));
        int cvorNa = brojCvora(vNa, kNa, K, smer,
                                static_cast<Brzina>(brzinaNa));
        // vreme se duplira u svim slucajevima osim kada se valjak
        // krece brzo i ne menja orijentaciju
        int tezina = smerSa == smer &&
                     brzinaSa == brzinaNa && brzinaSa == BRZO ?
                     vreme : 2*vreme;
        // dodajemo granu u graf
        susedi[cvorSa].push_back(make_pair(tezina, cvorNa));
      }
    }
  }
}


int main() {
  int caseNum = 1;
  while (true) {
    int V, K, vStart, kStart, vCilj, kCilj;
    cin >> V >> K >> vStart >> kStart >> vCilj >> kCilj;
    // oznaka kraja ulaza
    if (V == 0 && K == 0)
      break;

    // brojanje krece od 1, pa moramo umanjiti indekse cvorova
    vStart--; kStart--; vCilj--;  kCilj--;

    // broj cvorova koji odgovaraju raskrsnicama
    int brojRaskrsnica = V*K;
    // dva vestacka cvora
    int start = 8*brojRaskrsnica;
    int cilj =  8*brojRaskrsnica + 1;
    // ukupan broj cvorova
    int brojCvorova = 8*brojRaskrsnica + 2;
    // graf predstavljen listom susedstva
    vector<vector<Grana>> susedi(brojCvorova);

    // ucitavamo vremena i formiramo graf
    for (int v = 0; v < V; v++) {

      // horizontalne ulice
      for (int k = 0; k < K-1; k++) {
        int vreme;
        cin >> vreme;
        if (vreme == 0) continue;  // ulica ne postoji
        // bager ulicu moze preci u dva smera
```

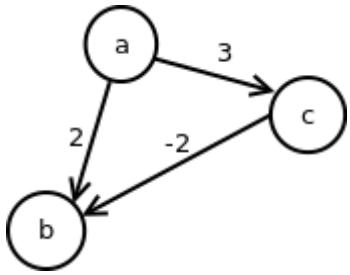
```
      dodajGrane(V, K, v, k, v, k+1, ISTOK, vreme, susedi);
      dodajGrane(V, K, v, k+1, v, k, ZAPAD, vreme, susedi);
    }

    if (v == V-1) continue;

    // vertikalne ulice
    for (int k = 0; k < K; k++) {
      int vreme;
      cin >> vreme;
      if (vreme == 0) continue; // ulica ne postoji
      // bager ulicu moze preci u dva smera
      dodajGrane(V, K, v, k, v+1, k, JUG, vreme, susedi);
      dodajGrane(V, K, v+1, k, v, k, SEVER, vreme, susedi);
    }
  }

  // spajamo vestacke cvorove (start i cilj)
  for (int smer = ISTOK; smer <= JUG; smer++) {
    Cvor s = brojCvora(vStart, kStart, K, static_cast<Smer>(smer), SPORO);
    susedi[start].push_back(make_pair(0, s));
    Cvor c = brojCvora(vCilj, kCilj, K, static_cast<Smer>(smer), SPORO);
    susedi[c].push_back(make_pair(0, cilj));
  }

  // Dajkstrin algoritam odredjivanja najkracih puteva od starta do cilja

  // najmanje vreme da se stigne do svakog cvora
  const int INF = numeric_limits<Vreme>::max();
  vector<Vreme> vremena(brojCvorova, INF);
  // da li je za cvor odredjeno najmanje vreme
  vector<bool> resen(brojCvorova, false);
  // cvorove sortiramo na osnovu trenutne procene rastojanja od starta
  priority_queue<Grana, vector<Grana>, greater<Grana>> pq;
  // krecemo od (vestackog) pocetnog cvora
  pq.push(make_pair(0, start));
  vremena[start] = 0;
  while (!pq.empty()) {
    // cvor iz reda koji je najblizi startu od svih ostalih
    Cvor cvor = pq.top().second;
    pq.pop();
    // ako je ranije vec bio resen, zanemarujemo ga (to je moguce zbog toga
    // sto nismo brisali cvorove iz reda, vec samo dodavali duplikate)
    if (resen[cvor])
      continue;
    // do njega ne moze postojati blizi put od trenutnog, pa smo za
    // njega odredili stvarnu vrednost najblizeg puta
```

```
      resen[cvor] = true;
      // ako je upravo nadjen najkraci put do ciljnog cvora, zavrsili smo
      if (cvor == cilj)
        break;

      // analiziramo sve grane od tog cvora do njegovih suseda
      for (auto it : susedi[cvor]) {
        // azuriramo vremena cvorova do kojih te grane vode
        // posto ne mozemo efikasno da brisemo iz reda sa prioritetom,
        // samo dodajemo duplikate
        Vreme vremeDo = it.first;
        Cvor cvorSused = it.second;
        if (!resen[cvorSused] &&
            vremena[cvorSused] > vremena[cvor] + vremeDo) {
          vremena[cvorSused] = vremena[cvor] + vremeDo;
          pq.push(make_pair(vremena[cvorSused], cvorSused));
        }
      }
    }

    // ispisujemo koncan rezultat
    cout << "Case " << caseNum << ": ";
    if (resen[cilj])
      cout << vremena[cilj] << endl;
    else
      cout << "Impossible" << endl;

    caseNum++;
  }
  return 0;
}
```

Белман-Фордов алгоритам

Уколико граф садржи неку негативну грану, Дајкстрин алгоритам не мора да врати тачан резултат. На пример, ако бисмо желели да одредимо најкраће путеве из чвора a до свих осталих чворова у графу са слике 2.12 и применимо Дајкстрин алгоритам он би најпре одредио најкраћи пут до чвора b (као чвора који је најближе чвору a) и прогласио би да је он дужине 2, а након тога би одредио најкраћи пут до другог најближег чвора c и прогласио би да је дужина најкраћег пута до њега 3 и путеви до ова два чвора се не би даље разматрали. Међутим, јасно је да најкраћи пут од чвора a до чвора b води преко чвора c и дужине је 1, али Дајкстрин алгоритам не би разматрао овај пут.

Уколико граф има негативне тежине грана, али не садржи циклус негативне тежине, најкраћи путеви из датог чвора се могу одредити Белман-Фордовим алгоритмом.



Слика 2.12: Пример графа за који Дајкстрин алгоритам не рачуна добро најкраћа растојања.

Основни корак у Белман-Фордовом алгоритму је *релаксација* гране (u, v), односно провера да ли се вредност $v.SP$ може заменити мањом вредношћу $u.SP + duzina(u, v)$; ако је то могуће, поправља се вредност $v.SP$ и памти да најкраћи пут води кроз чвор u.

Идеја је да се $|V| - 1$ пут изврши релаксација сваке од грана у графу. Тврдимо да ће након тога сва растојања бити коректно одређена.

Нека је n број чворова у графу. Означимо са $d_k(i)$ дужину најкраћег пута до чвора i након првих k релаксација (иницијално постављамо ту вредност на максималну). Доказаћемо наредна два тврђења:

1. уколико постоји циклус негативне дужине који је достижан из почетног чвора v, онда за неку грану (u, w) важи $d_{n-1}(w) > d_{n-1}(u) + duzina(u, w)$
2. ако граф не садржи циклус негативне дужине, онда за сваки чвор $u \in V$ важи да је $d_{n-1}(u)$ једнако најкраћем растојању од чвора v до чвора u

Покажимо најпре прво тврђење. Претпоставимо да G садржи циклус негативне дужине $c = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$, $v_k = v_0$, достижан из v. Тада је:

$$\sum_{i=1}^{k} duzina(v_{i-1}, v_i) < 0 \tag{2.1}$$

Претпоставимо супротно, да важи $d_{n-1} \leq d_{n-1}(v_{i-1}) + duzina(v_{i-1}, v_i)$ за свако $i = 1, 2, \ldots, k$. Сабирањем ових неједнакости за све гране циклуса добија се:

$$\sum_{i=1}^{k} d_{n-1}(v_i) \leq \sum_{i=1}^{k} d_{n-1}(v_{i-1}) + \sum_{i=1}^{k} duzina(v_{i-1}, v_i)$$

Пошто је $v_0 = v_k$, збирови $\sum_{i=1}^{k} d_{n-1}(v_i)$ и $\sum_{i=1}^{k} d_{n-1}(v_{i-1})$ су једнаки, те важи:

$$\sum_{i=1}^{k} duzina(v_{i-1}, v_i) \geq 0$$

супротно претпоставци да чворови $v_0, v_1, \ldots, v_k$ формирају циклус негативне дужине.

Покажимо сада да ако граф не садржи циклус негативне дужине, да ће вредности $d_{n-1}(u)$ садржати вредности најкраћег пута од чвора v до чвора u. Показаћемо индукцијом по k да $d_k(u)$ садржи минималну дужину пута од v до u који се састоји од највише k грана. Ако ово важи, онда ће $d_{n-1}(u)$ бити минимална дужина пута од чвора v до чвора u који се састоји од максимално $n-1$ грана. Ово је сигурно и дужина најкраћег пута између ова два чвора јер из чињенице да граф не садржи циклус негативне дужине следи да најкраћи пут не садржи поновљене чворове, те ће се састојати од максимално $n-1$ грана.

Базни случај (за $= 0$) је једноставан, важи да је $d_k(u) = 0$ ако је $u = v$, а иначе је $d_k = \infty$. Стога тврђење важи јер пут дужине 0 постоји само од неког чвора до њега самог и дужине је 0.

** Индуктивна хипотеза: ** Претпоставимо да за све чворове u важи да је $d_{k-1}(u)$ минимална дужина пута од v до u који се састоји од највише $k-1$ грана.

Ако је $u \neq v$, нека је P најкраћи пут од v до u са највише k грана и нека је w чвор непосредно испред u на путу P. Означимо са Q пут од v до w. Тада се пут Q састоји од највише $k-1$ грана и мора бити најкраћи могући пут од v до w који се састоји од максимално $k-1$ грана (иначе бисмо у најкраћем путу P део Q заменили краћим путем од v до w). Према индуктивној хипотези дужина пута Q једнака је $d_{k-1}(w)$.

У k-тој итерацији спољашње петље постављамо да је $d_k(u) = min\{d_{k-1}(u), d_{k-1}(w) + duzina(w,u)\}$. Знамо да важи $d_{k-1}(w) + duzina(w,u) = duzina(Q) + duzina(w,u) = duzina(P)$, па стога важи да је $d_k(u) \leq duzina(P)$. Такође, с озиром на то да је $d_{k-1}(u)$ дужина минималног простог пута од v до u који се састоји од највише $k-1$ грана, $d_{k-1}(u)$ мора бити барем једнако велико као $duzina(P)$, с обзиром на то да P ради са већим бројем грана.

Стога важи $d_k(u) = duzina(P)$, односно $d_k(u)$ је минимална дужина пута од чвора v до чвора u који користи највише k грана.

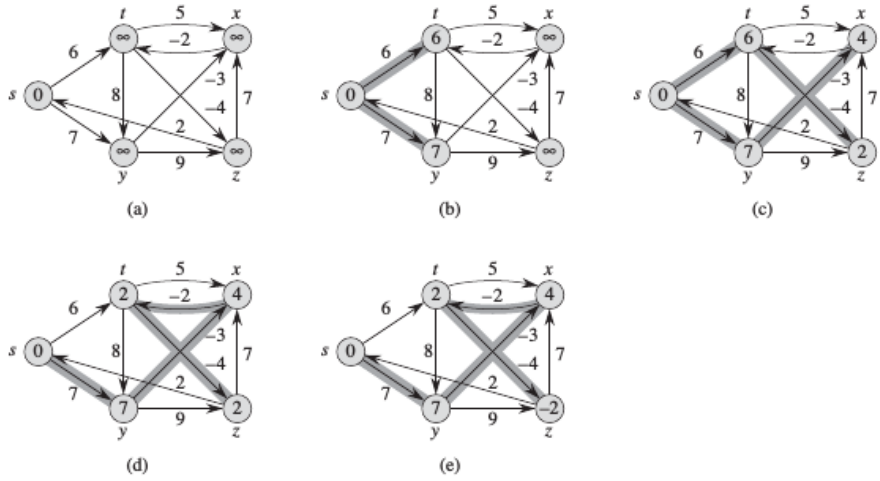
Сложеност алгоритма је $O(|V||E|)$, због две уметнуте *for* петље.

Задатак: Најкраћи путеви из једног чвора

Поставка: Градови су повезани путевима и за сваки пут је позната зарада (која може бити позивина или негатива, у случају губитака на путу, на пример квар возила). Зарада у једном и у другом смеру између два града не мора бити иста. Написати програм који одређује накраћи пут и зараду на том путу између почетног града (означеног бројем 0) и сваког другог града у графу.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број градова n ($1 \leq n \leq 1000$), у наредном реду број путева m ($1 \leq m \leq n^2 - n$) и затим у наредних m редова описи путева (два цела броја који представљају редне бројеве градова, који се броје од нуле и након тога реалан број који представља зараду, односно трошак, на том путу).

Излаз: На стандардни излаз исписати, за сваки град, минималну цену пута потребну да се стигне од стартног до циљног града као и градове кроз које се тим путем пролази.



Слика 2.13: Пример извршавања Белман-Фордовог алгоритма. Вредности d_k приказане су унутар чворова, а шрафиране гране воде ка претходницима чворова на (тренутно) најкраћим путевима: ако је грана (u, v) шрафирана, онда се до чвора v најкраћим путем долази преко чвора u. У примеру у сваком пролазу се гране релаксирају у следећем редоследу: (t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y). \
(а) Ситуација пре првог проласка кроз гране. (б)-(е) Ситуација након сваког наредног проласка кроз гране.

Пример

Улаз

```
5
8
0 1 -1
0 2 4
1 2 3
1 3 2
1 4 -2
3 2 5
3 1 2
4 3 5
```

Излаз

```
Najkraci put do cvora 0 je: 0 i duzine je 0
Najkraci put do cvora 1 je: 0, 1 i duzine je -1
Najkraci put do cvora 2 je: 0, 1, 2 i duzine je 2
Najkraci put do cvora 3 je: 0, 1, 3 i duzine je 1
Najkraci put do cvora 4 je: 0, 1, 4 i duzine je -3
```

Решење:

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <limits>
```

```
using namespace std;

typedef int Cvor;
typedef int Duzina;
typedef pair<Cvor, Duzina> Par;

const Duzina INF = numeric_limits<Duzina>::infinity();

/*
vector<vector<pair<int,int>>> listaSuseda {{{1,-1}, {2,4}}, {{2,3},{3,2},
                      {4,-2}}, {}, {{2,5},{1,2}}, {{3,5}}};
*/

// funkcija koja stampa put od izdvojenog cvora do datog cvora
// kroz grane drveta najkracih puteva
void odstampajPutDoCvora(int cvor, vector<int> roditelj){
  if(roditelj[cvor] == -1)
    return;

  odstampajPutDoCvora(roditelj[cvor],roditelj);
  cout << ", " << cvor;
}

// funkcija koja stampa najkraci put do datog cvora i njegovu duzinu
void odstampajNajkraciPut(int cvor, vector<int> roditelj,
              vector<int> najkraciPut){
  cout << "Najkraci put do cvora " << cvor << " je: 0";
  odstampajPutDoCvora(cvor,roditelj);
  cout << " i duzine je " << najkraciPut[cvor] << endl;
}

// funkcija koja koriscenjem Belman-Fordovog algoritma
// racuna najkrace puteve do svih cvorova
void najkraciPuteviBelmanFord(vector<vector<Par> > listaSuseda){

  int brojCvorova = listaSuseda.size();

  // niz koji za svaki cvor cuva duzinu najkraceg puta do njega
  vector<int> najkraciPut(brojCvorova,numeric_limits<int>::max());

  // niz koji za svaki cvor cuva njegovog prethodnika u
  // najkracem putu
  vector<int> roditelj(brojCvorova,-1);

  najkraciPut[0] = 0;
```

```
  // |V|-1 put prolazimo kroz skup svih grana
  for(int br=0; br<brojCvorova-1; br++)
    for(int i=0; i<listaSuseda.size(); i++)
      for(int j=0; j<listaSuseda[i].size(); j++){
    int sused = listaSuseda[i][j].first;
    int grana = listaSuseda[i][j].second;

    // ukoliko je potrebno vrsimo relaksaciju puta
    if(najkraciPut[i]+grana < najkraciPut[sused]){
      najkraciPut[sused] = najkraciPut[i]+grana;
      // postavljamo koji cvor je pretposlednji na tom putu
      roditelj[sused] = i;
    }
      }

  // ukoliko i dalje postoji put koji je moguce skratiti
  // vazi da graf sadrzi ciklus negativne tezine
  for(int i=0; i<listaSuseda.size(); i++)
    for(int j=0; j<listaSuseda[i].size(); j++){
      int sused = listaSuseda[i][j].first;
      int grana = listaSuseda[i][j].second;

      if(najkraciPut[i]+grana < najkraciPut[sused]){
    cout << "Graf sadrzi ciklus negativne tezine" << endl;
    return;
      }
    }

  // stampamo najkrace puteve do svih cvorova u grafu
  for(int i=0; i<brojCvorova; i++)
    odstampajNajkraciPut(i, roditelj, najkraciPut);
}


int main() {

  // ucitavamo graf - koristimo liste suseda
  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<Par>> listaSuseda(n);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    Cvor cvorOd, cvorDo; Duzina duzina;
    cin >> cvorOd >> cvorDo >> duzina;
    listaSuseda[cvorOd].emplace_back(cvorDo, duzina);
  }
```

```
  najkraciPuteviBelmanFord(listaSuseda);
  return 0;
}
```

Најкраћи путеви између свих парова чворова

Размотримо проблем израчунавања најкраћих путева између *свака два* чвора у графу (усмереном или неусмереном). Тежине грана могу бити негативне, али у графу не сме постојати циклус негативне тежине.

За почетак ћемо се задовољити одређивањем дужина свих најкраћих путева, уместо самих путева. Претпоставимо да је граф усмерен; све што ће бити речено важи и за неусмерене графове.

Као и обично, покушајмо са директним индуктивним приступом. Може се користити индукција по броју грана или чворова.

Размотримо најпре индукцију по броју грана. Како се мењају најкраћи путеви у графу после додавања нове гране (u, w) у граф? Нова грана може пре свега да представља краћи пут између чворова u и w. Поред тога, може се променити најкраћи пут између произвољна два чвора v_1 и v_2. Да би се установило има ли промене, треба са претходно познатом најмањом дужином пута од v_1 до v_2 упоредити збир дужина најкраћег пута од v_1 до u, гране (u, w) и дужине најкраћег пута од w до v_2. Укупно, за сваку нову грану потребно је извршити $O(|V|^2)$ провера, па је сложеност оваквог алгоритма у најгорем случају $O(|E| \cdot |V|^2)$. Пошто је број грана највише $O(|V|^2)$, сложеност овог алгоритма је $O(|V|^4)$.

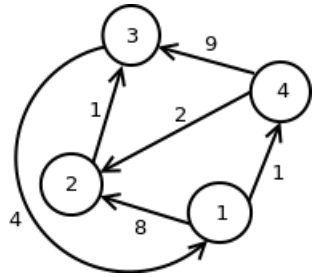
Размотримо сада индукцију према броју чворова. Како се мењају најкраћи путеви ако се у граф дода нови чвор u? Потребно је најпре пронаћи дужине најкраћих путева од u до свих осталих чворова, и од свих осталих чворова до u. Пошто су дужине најкраћих путева који не садрже u већ познате, најкраћи пут од u до w можемо да пронађемо на следећи начин. Потребно је да одредимо само прву грану на том путу. Ако је то грана (u, v), онда је дужина најкраћег пута од u до w једнака збиру дужине гране (u, v) и дужине најкраћег пута од v до w, која је већ позната. Потребно је дакле да упоредимо ове збирове за све гране суседне са u, и да међу њима изаберемо најмању. Најкраћи пут од w до u може се пронаћи на сличан начин. Али то све није довољно. Поново је потребно да за сваки пар чворова проверимо да ли између њих постоји нови краћи пут кроз нови чвор u. За свака два чвора v_1 и v_2, да би се установило има ли промене, треба са претходно познатом најмањом дужином пут од v_1 до v_2 упоредити збир дужина најкраћег пута од v_1 до u и дужине најкраћег пута од u до v_2. То је укупно $O(|V|^2)$ провера и сабирања после додавања сваког новог чвора, па је сложеност оваквог алгоритма у најгорем случају $O(|V| \cdot |V|^2) = O(|V|^3)$. Испоставља се да је у овом случају индукција по броју чворова ефикаснија него индукција по броју грана. Међутим, постоји још боља индуктивна конструкција за решавање овог проблема.

Идеја је да се не мења ни број чворова ни грана, већ да се уведу нека ограничења на

тип дозвољених путева. Индукција се изводи по опадајућем броју таквих ограничења, тако да на крају долазе у обзир сви могући путеви. Нумеришимо чворове на произвољан начин бројевима од 1 до $|V|$. Пут од чвора u до чвора w зове се k-*шут* ако су редни бројеви свих чворова на путу (изузев чворова u и w) мањи или једнаки од k. Специјално, 0-пут се састоји само од једне гране (пошто се ни један други чвор не може појавити на путу).

Размотримо наредну индуктивну хипотезу: умемо да одредимо дужине најкраћих путева између свака два чвора, при чему су дозвољени само k-путеви, за $k < m$. База индукције је случај $m = 1$, када се разматрају само директне гране и решење је тада очигледно. Претпоставимо сада да је индуктивна хипотеза тачна и да хоћемо да је проширимо на $k \leq m$. Једини нови путеви које треба да размотримо су m-путеви. Треба да пронађемо најкраће m-путеве између свака два чвора и да проверимо да ли они побољшавају k-путеве за $k < m$. Нека је v_m чвор са редним бројем m. Произвољан најкраћи m-пут садржи v_m највише једном (претпоставка је да у графу не постоји циклус негативне дужине). Најкраћи m-пут између u и v може да се састоји од најкраћег $(m-1)$-пута од чвора u до чвора v_m, и најкраћег $(m-1)$-пута од чвора v_m до чвора v. Према индуктивној хипотези ми већ знамо дужине најкраћих k-путева за $k < m$, па је довољно да саберемо ове две дужине (и збир упоредимо са дужином најкраћег $(m-1)$-пута од u до v) да бисмо пронашли дужину најкраћег m-пута од чвора u до чвора v. Овај алгоритам познат је под називом Флојд-Варшалов алгоритам. Он је нешто бржи од претходног алгоритма (за константни фактор) и лакше га је реализовати.

Саме најкраће путеве можемо реконструисати тако што ћемо чувати матрицу путева у којој ћемо на позицији (i, j) чувати максималну вредност m тако да чвор v_m припада најкраћем путу од чвора i до чвора j. Исписивање најкраћег пута од чвора i до чвора j реализоваћемо као исписивање најкраћег пута од чвора i до чвора на позицији (i, j) у матрици, за којим следи најкраћи пут од тог чвора до чвора j.



Слика 2.14: Тежински усмерени граф G.

Размотримо поступак одређивања свих најкраћих путева за граф са слике 2.14: он би се састојао из наредних корака:

$$m = 0\text{:}\quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & 1 & \infty \\ 4 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad m = 1\text{:}\quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & 1 & \infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ \infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$m = 2\text{:}\quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ \infty & 0 & 1 & \infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ \infty & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad m = 3\text{:}\quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$m = 4\text{:}\quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Напоменимо да је редослед петљи важан, односно да је неопходно да спољашња петља контролише вредност параметра m који ограничава тип дозвољених путева. Две унутрашње петље користе се за проверу свих *парова* чворова. Јасно је да се ова провера са паровима чворова може извршавати потпуну произвољним редоследом, јер је свака провера независна од осталих. Такође, важно је приметити да Флојд-Варшалов алгоритам ради коректно и за графове који имају негативне тежине грана (све док не постоји циклус негативне тежине). То је последица тога да коректност алгоритма не зависи од тога да су тежине грана у графу ненегативне. Уколико полазни граф има циклус негативне тежине, то се може идентификовати тако ће након извршавања Флојд-Варшаловог алгоритма дужина најкраћег пута од неког чвора до њега самог бити мања од 0.

У случају да се дужине свих најкраћих путева чувају у матрици, Флојд-Варшалов алгоритам се веома једноставно имплементира (помоћу три угњеждена циклуса) и сложеност му је $O(|V|^3)$. Присетимо се да је временска сложеност алгоритма за налажење најкраћих путева од једног чвора $O((|E| + |V|) \log |V|)$. Ако је граф густ, па је број грана $\Omega(|V|^2)$, онда је описани алгоритам ефикаснији од извршавања за сваки чвор алгоритма за најкраће путеве од датог чвора. С друге стране, ако граф није густ (има на пример $O(|V|)$ грана), онда је боља временска сложеност $O(|V|(|E| + |V|) \log |V|)$ која потиче од $|V|$ пута употребљеног алгоритма за најкраће путеве од једног чвора. Свакако једна од предности Флојд-Варшаловог алгоритма је и његова једноставна реализација.

Задатак: Сви најкраћи путеви у густом графу

Поставка: На једној територији између свака два града постоји директан пут. Неки путеви су лошег квалитета, па је некад брже стићи од града до града ако се иде неким од околних путева. Ако је познато време да се пређе сваки од директних путева (оно може зависити и од смера у којем се пут прелази), написати програм који за сваки пар градова одређује колико се времена може уштедети ако се не иде директним путем.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број градова n ($1 \leq n \leq 100$), а након тога квадратна матрица димензије $n \times n$ која садржи времена у секундама потребна да се директним путем стигне од града до града (на дијагонали се налазе нуле, а остала времена су цели бројеви између 60 и 3600).

Излаз: На стандардни излаз исписати квадратну матрицу која садржи уштеде за сваки пар градова.

Пример

Улаз	*Излаз*
4	0 0 90 0
0 190 300 120	0 0 0 50
180 0 240 350	90 180 0 0
290 430 0 80	0 0 0 0
120 170 90 0	

Објашњење

Од града 1 до града 3 боље је ићи преко града 4 (уместо 300 секунди путује се 120 + 90 = 210 секунди). И од града 3 до града 1 боље је ићи преко града 4 (уместо 290 секунди путује се 80 + 120 = 200 секунди). Од града 2 до града 4 најбоље је ићи преко града 1 (уместо 350 секунди путује се 120 + 180 = 300 секунди). Од града 3 до града 2 најбоље је ићи преко града 4 (уместо 430 секунди путује се 80 + 170 = 250 секунди).

Решење: Када је мрежа путева густа као у овом задатку, најбољи начин да се нађу најкраћи путеви између свих парова градова је да се употреби Флојд-Варшалов алгоритам, чија је сложеност $O(n^3)$. Пошто се и улазни и излазни подаци чувају у матрици димензије $n \times n$, меморијска сложеност је $O(n^2)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

// Flojd-Varsalovim algoritmom izracunavamo duzine najkracih puteva
// izmedju svaka dva cvora u grafu
vector<vector<int>> SviNajkraciPutevi(const vector<vector<int>>& D) {
  int n = D.size();
  vector<vector<int>> minD = D;
  for (int k = 0; k < n; k++) {
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int j = 0; j < n; j++)
        if (minD[i][k] + minD[k][j] < minD[i][j])
          minD[i][j] = minD[i][k] + minD[k][j];
  }

  return minD;
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  // ucitavamo vremena za direktne puteve
  int n;
```

```
  cin >> n;
  vector<vector<int>> D(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    D[i].resize(n);
    for (int j = 0; j < n; j++)
      cin >> D[i][j];
  }

  // racunamo najkraca vremena
  vector<vector<int>> minD = SviNajkraciPutevi(D);

  // ispisujemo rezultat
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++)
      cout << D[i][j] - minD[i][j] << " ";
    cout << endl;
  }

  return 0;
}
```

Још једно могуће решење је да се употреби индуктивно-рекурзивна конструкција по чворовима графа (градовима). Индуктивна претпоставка је да умемо да одредимо све најкраће путеве у графу од n чворова.

Приликом додавања новог чвора i у граф одређујемо најкраће путеве од сваког од n већ обрађених чворова j до њега. Ти путеви су или директни или се последња деоница у њима остварује тако што се од неког већ обрађеног чвора k стигне до чвора i. Дужина од i до j преко чвора k једнака је збиру дужине најкраћег пута од чвора j до чвора k и дужини гране од чвора k до чвора i. Притом, пошто су све тежине грана позитивне, пут од чвора j до чвора k не садржи чвор i (јер би онда унутар њега био већ садржан краћи пут од j до i). Најкраћи пут од j до k који не укључује i већ знамо на основу индуктивне хипотезе. Дакле, поредимо дужину директне гране од j до i и збирове дужина путева од j до k и гране од k до i за свако могуће k из скупа већ обрађених чворова и минимум тих растојања представља најкраћи пут од j до i.

Дужину најкраћих путева од i до осталих чворова у графу одређујемо аналогно.

На крају, додавање новог чвора i у граф можда скраћује дужину неког пута од раније обрађеног чвора j до раније обрађеног чвора k. Потребно је за све такве парове упоредити дужину тренутно најкраћег пута (који не укључује чвор i) и збир дужина најкраћих путева од j до i и од i до k (које смо у првој фази након додавања чвора i одредили).

Додавање сваког новог чвора захтева $O(n^2)$ корака, па је укупна временска сложеност $O(n^3)$ и показује се да је време извршавања веома слично као и када се користи Флојд-Варшалов алгоритам, али је имплементација компликованија.

```
#include <iostream>
#include <vector>
```

```cpp
using namespace std;

// Induktivno rekurzivnim postupkom po broju cvorova izracunavamo
// duzine najkracih puteva izmedju svaka dva cvora u grafu
vector<vector<int>> SviNajkraciPutevi(const vector<vector<int>>& D) {
  int n = D.size();
  vector<vector<int>> minD(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    minD[i].resize(n);

  // dodajemo jedan po jedan cvor
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    minD[i][i] = 0;

    // odredjujemo najkrace puteve od cvora i do svih prethodnih
    // cvorova j
    for (int j = 0; j < i; j++) {
      // pretpostavljamo da je direktno rastojanje najkrace
      minD[i][j] = D[i][j];
      // proveravamo da li je mozda bolji put od i do j koji vodi preko
      // nekog prethodnog cvora k
      for (int k = 0; k < i; k++)
        if (D[i][k] + minD[k][j] < minD[i][j])
          minD[i][j] = D[i][k] + minD[k][j];
    }

    // odredjujemo najkrace puteve do cvora i od svih prethodnih
    // cvorova j
    for (int j = 0; j < i; j++) {
      // pretpostavljamo da je direktno rastojanje najkrace
      minD[j][i] = D[j][i];
      // proveravamo da li je mozda bolji put od cvora j do i koji
      // vodi preko nekog prethodnog cvora k
      for (int k = 0; k < i; k++)
        if (minD[j][k] + D[k][i] < minD[j][i])
          minD[j][i] = minD[j][k] + D[k][i];
    }

    // popravljamo rastojanja od prethodnih cvorova j do prethodnih
    // cvorova k, analizirajuci puteve koji vode preko cvora i
    for (int j = 0; j < i; j++)
      for (int k = 0; k < i; k++)
        if (minD[j][i] + minD[i][k] < minD[j][k])
          minD[j][k] = minD[j][i] + minD[i][k];
  }
```

```
  return minD;
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);

  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<int>> D(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    D[i].resize(n);
    for (int j = 0; j < n; j++)
      cin >> D[i][j];
  }

  auto minD = SviNajkraciPutevi(D);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++)
      cout << D[i][j] - minD[i][j] << " ";
    cout << endl;
  }

  return 0;
}
```

Једна алтернатива може бити да се из сваког града одреде најкраћа растојања до свих других градова покретањем Дајкстриног алгоритма из тог града. Пошто је граф густ (заправо потпун), имплементација се може направити и елементарно, одређивањем минимума обиласком низа растојања, у линеарној сложености. Сложеност такве имплементације Дајкстриног алгоритма је $O(n^2)$, а пошто се она покреће из сваког чвора, укупна сложеност решења задатка је $O(n^3)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <limits>
#include <queue>

using namespace std;

// +beskonacno
const int INF = numeric_limits<int>::max();


// Dajkstrinim algoritmom koji se pokrece iz svakog cvora izracunavamo
// duzine najkracih puteva izmedju svaka dva cvora u grafu
vector<vector<int>> SviNajkraciPutevi(const vector<vector<int>>& D) {
  // broj cvorova
  int n = D.size();
```

```
  // racunamo najkraca vremena
  vector<vector<int>> minD(n);

  // pokrecemo Dajkstrin algoritam za svaki od n cvorova
  for (int cvorI = 0; cvorI < n; cvorI++) {
    // skup gradova do kojih je odredjen najkraci put od cvoraI
    vector<bool> resen(n, false);
    // u pocetku samo znamo da je put do cvora i nula
    minD[cvorI].resize(n, INF);
    minD[cvorI][cvorI] = 0;
    // radimo dok nisu odredjene duzine svih najkracih puteva od I
    for (int brojResenih = 0; brojResenih < n; brojResenih++) {
      // trazimo najkraci put od cvoraI do nekog cvora za koji se jos
      // nije definitivno odredio najkraci put
      int odIDoMin = INF;
      int cvorMin = cvorI;
      for (int cvorJ = 0; cvorJ < n; cvorJ++)
        if (!resen[cvorJ] && minD[cvorI][cvorJ] < odIDoMin) {
          cvorMin = cvorJ;
          odIDoMin = minD[cvorI][cvorJ];
        }
      // trenutni put do tog cvora je sigurno najmanji
      resen[cvorMin] = true;
      // azuriramo puteve do ostalih neresenih cvorova posmatrajuci
      // puteve preko trenutnog cvora
      for (int cvorJ = 0; cvorJ < n; cvorJ++)
        if (!resen[cvorJ] &&
            minD[cvorI][cvorJ] > odIDoMin + D[cvorMin][cvorJ])
          minD[cvorI][cvorJ] = odIDoMin + D[cvorMin][cvorJ];
    }
  }
  return minD;
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  // ucitavamo vremena za direktne puteve
  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<int>> D(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    D[i].resize(n);
    for (int j = 0; j < n; j++)
      cin >> D[i][j];
  }
```

```
  // odredjujemo najkrace puteve izmedju svih parova cvorova
  vector<vector<int>> minD = SviNajkraciPutevi(D);

  // ispisujemo rezultat
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++)
      cout << D[i][j] - minD[i][j] << " ";
    cout << endl;
  }

  return 0;
}
```

Пошто је граф густ и важи да је број грана приближно једнак половини квадрата броја чворова, имплементација Дајкстриног алгоритма преко реда са приоритетом (са лењим брисањем) само успорава алгоритам. Њена сложеност је $O((n+m)\log m)$, где је m број грана, што је $O((n+n^2)\log n^2)$ тј. $O(n^2 \log n)$, када је граф густ (јер је $m = \Theta(n^2)$), па је укупна сложеност $O(n^3 \log n)$. За складиштење реда са приоритетом користи се додатних $O(m)$ меморије (што не повећава укупну сложеност, јер је за било које складиштење графа потребно бар $O(n+m)$ меморије).

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <limits>
#include <queue>

using namespace std;

// +beskonacno
const int INF = numeric_limits<int>::max();

typedef int Cvor;
typedef int Vreme;
typedef pair<Vreme, Cvor> Par;

// Dajkstrinim algoritmom koji se pokrece iz svakog cvora izracunavamo
// duzine najkracih puteva izmedju svaka dva cvora u grafu
vector<vector<int>> SviNajkraciPutevi(const vector<vector<int>>& D) {
  // broj cvorova
  int n = D.size();
  // matrica u kojoj cuvamo duzine najkracih puteva
  vector<vector<int>> minD(n);

  // pokrecemo Dajkstrin algoritam za svaki od n cvorova
  for (int cvorI = 0; cvorI < n; cvorI++) {
    vector<bool> resen(n, false);
    priority_queue<Par, vector<Par>, greater<Par>> pq;
    // minD[cvorI] sadrzi najkraca rastojanja od cvora I do ostalih cvorova
```

```
    // u pocetku ne znamo do kojih sve cvorova se moze stici
    minD[cvorI].resize(n, INF);
    // jedino znamo da je rastojanje od cvora do samog sebe 0
    pq.push(make_pair(0, cvorI));
    minD[cvorI][cvorI] = 0;

    // obradjujemo jedan po jedan cvor, sve dok svi ne budu reseni
    while (!pq.empty()) {
      // cvor koji je najblizi cvoruI (ako se izuzmu oni koji su
      // reseni)
      Par p = pq.top();
      pq.pop();
      int cvorMin = p.second;
      int odIDoMin = p.first;
      // ako je cvorMin vec resen, ovo je zaostali podatak (zbog lenjog
      // brisanja), pa ga ignorisemo
      if (resen[cvorMin])
        continue;
      // do cvoraMin ne moze postojati brzi put od cvora I, pa je on
      // postaje resen
      resen[cvorMin] = true;
      // analiziramo susede cvoraMin
      for (int cvorJ = 0; cvorJ < n; cvorJ++)
        // azuriramo vremena do njih ako se do njih putuje preko cvoraMin
        if (!resen[cvorJ] &&
            minD[cvorI][cvorJ] > odIDoMin + D[cvorMin][cvorJ]) {
          minD[cvorI][cvorJ] = odIDoMin + D[cvorMin][cvorJ];
          pq.push(make_pair(minD[cvorI][cvorJ], cvorJ));
        }
    }
  }

  return minD;
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  // ucitavamo vremena za direktne puteve
  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<int>> D(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    D[i].resize(n);
    for (int j = 0; j < n; j++)
      cin >> D[i][j];
  }
```

```
  // odredjujemo najkrace puteve izmedju svih parova cvorova
  vector<vector<int>> minD = SviNajkraciPutevi(D);

  // ispisujemo rezultat
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++)
      cout << D[i][j] - minD[i][j] << " ";
    cout << endl;
  }

  return 0;
}
```

Задатак: Сви најкраћи путеви у ретком графу

Поставка: Сваки рутер у једној мрежи повезан је са највише 4 друга рутера. За свака два повезана рутера познато је време потребно да се пошаље порука од првог до другог рутера. Везе су такве да је некада боље слати поруку около, преко низа рутера, него директно. Напиши програм који одређује колико се највише може скратити време комуникације између нека два рутера ако се порука не шаље директно (у обзир узети само парове рутера који су директно повезани).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број рутера n ($1 \leq n \leq 100$), након тога укупан број веза између рутера m ($n - 1 \leq m \leq 4n$), а након тога у наредних m редова опис сваке везе: свака линија садржи број полазног рутера, број долазног рутера и време потребно да се пошаље порука од полазног до долазног рутера, раздвојене са по једним размаком (бројеви рутера су бројеви од 0 до $n - 1$, а време комуникације је цео број између 1 и 1000).

Излаз: На стандардни излаз исписати цео број који представља највеће скраћење комуникације коришћењем посредних рутера.

Пример

Улаз	*Излаз*
6 7 0 1 1 0 2 4 0 3 3 0 5 10 1 2 2 3 4 4 4 5 1	2

Објашњење

Најкраћи пут од рутера 0 до рутера 2 се скраћује са 4 на 3 (ако се порука шаље преко рутера 1), док се најкраћи пут од рутера 0 до рутера 5 скраћује са 10 на 8 (ако се порука

шаље преко рутера 3 и 4). Зато је највеће скраћење једнако 2.

Решење: Задатак може да се решава на потпуно исте начине као и задатак Сви најкраћи путеви у густом графу. Кључна разлика је то што је овај пут граф редак (важи да је m највише $4n$, па је $m = O(n)$). Зато је решење у ком се Дајкстрин алгоритам покреће из сваког чвора ефикасније од алгоритама попут Флојд-Варшаловог који истовремено одређују све најкраће путеве.

Ако се користи ред са приоритетом са лењим брисањем, временска сложеност имплементације Дајкстриног алгоритма је $O((n + m) \log m)$. Пошто је граф редак, укупна временска сложеност је $O(n^2 \log n)$. За складиштење реда са приоритетом се користи $O(m)$ додатне меморије (што не повећава асимптотски меморијску сложеност, јер је за складиштење листа повезаности потребно $O(n + m)$ меморије). Ако одређивање највећег смањења за чворове који су суседни неком чвору вршимо непосредно након што завршимо Дајкстрин алгоритам из тог чвора, тада је довољно да чувамо само низ најкраћих растојања (а не матрицу), за шта је довољно $O(n)$ додатне меморије.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <limits>
#include <queue>

using namespace std;

const int INF = numeric_limits<int>::max();

typedef int Cvor;
typedef int Vreme;
typedef pair<Vreme, Cvor> Par;

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  // broj cvorova
  int n;
  cin >> n;

  // lista suseda svakog cvora
  vector<vector<Par>> susedi(n);

  // ucitavamo sve grane
  int k;
  cin >> k;
  for (int i = 0; i < k; i++) {
    Cvor cvorOd, cvorDo;
    Vreme vreme;
    cin >> cvorOd >> cvorDo >> vreme;
    susedi[cvorOd].emplace_back(vreme, cvorDo);
  }
```

```
// najvece skracenje puta - trazeni rezultat
int maxSkracenje = 0;

// pokrecemo Dajkstrin algoritam za svaki od n cvorova
for (Cvor cvorI = 0; cvorI < n; cvorI++) {
  // najmanje vreme od cvora i do svih ostalih cvora
  vector<Vreme> minVremeOdI(n, INF);
  // da li je za dati cvor odredjeno najmanje vreme od cvora i
  vector<bool> resen(n, false);

  // red sa prioritetom kojim odredjujemo cvor za koji nije
  // trenutno zasigurno odredjeno najmanje vreme, a koji je trenutno
  // najblizi cvoru i
  priority_queue<Par, vector<Par>, greater<Par>> pq;
  // cvor i sam sebi poruku salje momentalno
  pq.push(make_pair(0, cvorI));
  minVremeOdI[cvorI] = 0;
  // obradjujemo jedan po jedan cvor, sve dok svi ne budu reseni
  while (!pq.empty()) {
    // cvor do kog poruka najbrze stize od cvora i (ako se izuzmu
    // oni koji su reseni)
    Par p = pq.top();
    pq.pop();
    Cvor cvorMin = p.second;
    Vreme vremeOdIDoMin = p.first;
    // ako je cvorMin vec resen, ovo je zaostali podatak (zbog lenjog
    // brisanja), pa ga ignorisemo
    if (resen[cvorMin])
      continue;
    // do cvoraMin ne moze postojati brzi put od cvora I, pa je on
    // postaje resen
    resen[cvorMin] = true;
    // analiziramo susede cvoraMin
    for (const auto& p : susedi[cvorMin]) {
      // azuriramo vremena do njih ako poruka putuje preko cvoraMin
      Cvor cvorJ = p.second;
      Vreme vremeOdMinDoJ = p.first;
      if (!resen[cvorJ] &&
          minVremeOdI[cvorJ] > vremeOdIDoMin + vremeOdMinDoJ) {
        minVremeOdI[cvorJ] = vremeOdIDoMin + vremeOdMinDoJ;
        pq.push(make_pair(minVremeOdI[cvorJ], cvorJ));
      }
    }
  }

  // analiziramo skracenja vremena za sve susede cvora I
```

```
    for (const auto& p : susedi[cvorI]) {
      Cvor cvorJ = p.second;
      Vreme vremeOdIdoJ = p.first;
      maxSkracenje = max(maxSkracenje, vremeOdIdoJ - minVremeOdI[cvorJ]);
    }
  }

  cout << maxSkracenje << endl;

  return 0;
}
```

Ако се не користи ред са приоритетом, сложеност Дајкстриног алгоритма је $O(n^2)$, па је укупна временска сложеност $O(n^3)$. Меморијска сложеност је асимптотски иста као и у случају имплементације помоћу реда са приоритетом (једино што се не користи помоћни ред).

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <limits>
#include <queue>

using namespace std;

const int INF = numeric_limits<int>::max();

typedef int Cvor;
typedef int Vreme;
typedef pair<Vreme, Cvor> Par;

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  // broj cvorova
  int n;
  cin >> n;

  // lista suseda svakog cvora
  vector<vector<Par>> susedi(n);

  // ucitavamo sve grane
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    int cvorOd, cvorDo, vreme;
    cin >> cvorOd >> cvorDo >> vreme;
    susedi[cvorOd].emplace_back(vreme, cvorDo);
  }
```

```
  // najvece skracenje puta - trazeni rezultat
  Vreme maxSkracenje = 0;

  // pokrecemo Dajkstrin algoritam za svaki od n cvorova
  for (Cvor cvorI = 0; cvorI < n; cvorI++) {
    // najmanje vreme od cvora i do svih ostalih cvora
    vector<Vreme> minVremeOdI(n, INF);
    // da li je za dati cvor odredjeno najmanje vreme od cvora i
    vector<bool> resen(n, false);
    // cvor i sam sebi poruku salje momentalno
    minVremeOdI[cvorI] = 0;
    for (int brojResenih = 0; brojResenih < n; brojResenih++) {
      // trazimo najkraci put od cvora i do nekog cvora za koji se jos
      // nije definitivno odredio najkraci put
      Vreme minVreme = INF;
      Cvor minCvor = cvorI;
      for (Cvor cvorJ = 0; cvorJ < n; cvorJ++)
        if (!resen[cvorJ] && minVremeOdI[cvorJ] < minVreme) {
          minCvor = cvorJ;
          minVreme = minVremeOdI[cvorJ];
        }
      // trenutni put do tog cvora je sigurno najmanji
      resen[minCvor] = true;
      // azuriramo puteve do ostalih neresenih cvorova posmatrajuci
      // puteve preko trenutnog cvora
      for (const auto& p : susedi[minCvor]) {
        Cvor cvorK = p.second;
        Vreme vremeOdMinDoK = p.first;
        if (!resen[cvorK] && minVremeOdI[cvorK] > minVreme + vremeOdMinDoK)
          minVremeOdI[cvorK] = minVreme + vremeOdMinDoK;
      }
    }

    // analiziramo skracenja vremena za sve susede cvora I
    for (const auto& p : susedi[cvorI]) {
      Cvor cvorJ = p.second;
      Vreme vremeOdCvoraIdoJ = p.first;
      maxSkracenje = max(maxSkracenje, vremeOdCvoraIdoJ - minVremeOdI[cvorJ]);
    }
  }

  cout << maxSkracenje << endl;

  return 0;
}
```

Једно могуће решење је да се употреби Флојд-Варшалов алгоритам чија је сложеност

$O(n^3)$. Пошто је потребно складиштити матрицу најкраћих путева, меморијска сложеност је $O(n^2)$ (иако се помоћу листа повезаности граф складишти у $O(n+m) = O(n)$ меморије). Једноставности ради, у имплементацији можемо чувати и матрицу директних растојања, чиме се меморијска сложеност не повећава асимптотски.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <limits>

using namespace std;

const int INF = numeric_limits<int>::max();

vector<vector<int>> sviNajkraciPutevi(const vector<vector<int>>& d) {
  int n = d.size();
  vector<vector<int>> minD = d;
  for (int k = 0; k < n; k++)
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int j = 0; j < n; j++)
        if (minD[i][k] != INF && minD[k][j] != INF &&
            minD[i][k] + minD[k][j] < minD[i][j])
          minD[i][j] = minD[i][k] + minD[k][j];

  return minD;
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  // ucitavamo vremena za direktne puteve
  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<int>> D(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    D[i].resize(n, INF);

  int k;
  cin >> k;
  for (int i = 0; i < k; i++) {
    int pocetak, kraj, duzina;
    cin >> pocetak >> kraj >> duzina;
    D[pocetak][kraj] = duzina;
  }


  // racunamo najkraca vremena
  vector<vector<int>> minD = sviNajkraciPutevi(D);
```

```
  int m = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++)
    for (int j = 0; j < n; j++)
      if (D[i][j] != INF && minD[i][j] != INF)
        m = max(m, D[i][j] - minD[i][j]);

  cout << m << endl;

  return 0;
}
```

Индукција по броју чворова такође доводи до алгоритма временске сложености $O(n^3)$, док је меморијска сложеност условљена чувањем матрице најкраћих путева и износи $O(n^2)$.

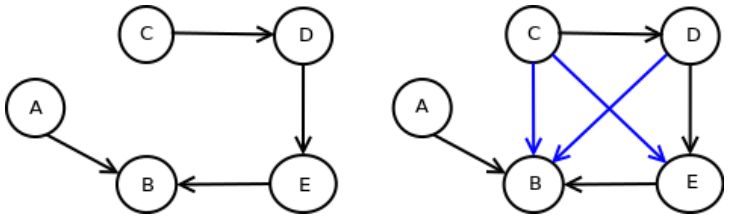
```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <limits>

using namespace std;

const int INF = numeric_limits<int>::max();

// odredjujemo sve najkrace puteve indukcijom po broju cvorova
vector<vector<int>> sviNajkraciPutevi(const vector<vector<int>>& d) {
  int n = d.size();
  vector<vector<int>> minD(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    minD[i].resize(n, INF);

  // dodajemo jedan po jedan cvor
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    minD[i][i] = 0;

    // odredjujemo najkrace puteve od cvora i do svih prethodnih
    // cvorova j
    for (int j = 0; j < i; j++) {
      // pretpostavljamo da je direktno rastojanje najkrace
      minD[i][j] = d[i][j];
      // proveravamo da li je mozda bolji put od i do j koji vodi preko
      // nekog prethodnog cvora k
      for (int k = 0; k < i; k++)
        if (d[i][k] != INF && minD[k][j] != INF &&
            d[i][k] + minD[k][j] < minD[i][j])
          minD[i][j] = d[i][k] + minD[k][j];
    }

    // odredjujemo najkrace puteve do cvora i od svih prethodnih
```

```
    // cvorova j
    for (int j = 0; j < i; j++) {
      // pretpostavljamo da je direktno rastojanje najkrace
      minD[j][i] = d[j][i];
      // proveravamo da li je mozda bolji put od cvora j do i koji
      // vodi preko nekog prethodnog cvora k
      for (int k = 0; k < i; k++)
        if (minD[j][k] != INF && d[k][i] != INF &&
            minD[j][k] + d[k][i] < minD[j][i])
          minD[j][i] = minD[j][k] + d[k][i];
    }

    // popravljamo rastojanja od prethodnih cvorova j do prethodnih
    // cvorova k, analizirajuci puteve koji vode preko cvora i
    for (int j = 0; j < i; j++)
      for (int k = 0; k < i; k++)
        if (minD[j][i] != INF && minD[i][k] != INF &&
            minD[j][i] + minD[i][k] < minD[j][k])
          minD[j][k] = minD[j][i] + minD[i][k];
  }

  return minD;
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  // ucitavamo direktne puteve
  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<int>> d(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    d[i].resize(n, INF);

  int k;
  cin >> k;
  for (int i = 0; i < k; i++) {
    int pocetak, kraj, duzina;
    cin >> pocetak >> kraj >> duzina;
    d[pocetak][kraj] = duzina;
  }

  // racunamo najkrace puteve
  auto minD = sviNajkraciPutevi(d);

  int m = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
```

```
    for (int j = 0; j < n; j++)
      if (d[i][j] != INF && minD[i][j] != INF)
        m = max(m, d[i][j] - minD[i][j]);
  }
  cout << m << endl;

  return 0;
}
```

Транзитивно затворење графа

За задати усмерени граф $G = (V, E)$ његово **транзитивно затворење** $C = (V, F)$ је усмерени граф у коме грана (u, w) између чворова u и w постоји ако и само ако у графу G постоји усмерени пут од чвора u до чвора w. На пример, на слици 2.15 приказан је један усмерени граф и његово транзитивно затворење.



Слика 2.15: Граф и његово транзитивно затворење: плавом бојом истакнуте су гране које су додате у полазни граф.

Постоји много различитих примена проблема транзитивног затворења графа, па је важно имати ефикасан алгоритам за његово решавање. На пример, размотримо табелу у виду графа: ћелије табеле одговарају чворовима, а грана између чворова a и b постоји ако резултат који се рачуна у ћелији b зависи од вредности ћелије a. Када се измени нека од вредности у табели, потребно је ажурирати вредности свих ћелија које од ње зависе, односно свих чворова који су достижни из дате ћелије. Те ћелије се могу утврдити коришћењем транзитивног затворења датог графа.

Постоји већи број начина за рачунање транзитивног затворења датог графа.

Најједноставнији алгоритам би из сваког чвора покретао DFS или BFS претрагуу и чувао информације о свим достижним чворовима. Овај алгоритам има сложеност $O(|V|(|V| + |E|))$ и представља добар избор за ретке графове, док за густе графове он постаје сложености $O(|V|^3)$.

Ако ће транзитивно затворење графа бити густ граф, бољи приступ је најпре израчунати компоненте јаке повезаности алгоритмом линеарне временске сложености. Та свака два чвора из исте јаке компоненте важи да су међусобно достижна, а ако размотримо грану (a, b) која повезује чворове из различитих јаких компоненти повезаности, сваки чвор из компоненте којој припада чвор b достижан је из сваког чвора компоненте којој припада чвор a. Дакле, проблем се опет своди на проналажење транзитивног

затворења сачињеног од јаких компоненти повезаности, који би требало да има доста мање чворова и грана.

Трећи начин да решимо овај проблем јесте редукцијом (свођењем) на други проблем. Другим речима, показаћемо како се може произвољни улаз за проблем транзитивно затворење свести на улаз за други проблем који умемо да решимо; након тога решење другог проблема трансформишемо у решење проблема транзитивног затворења. Проблем на који вршимо свођење је одређивање свих најкраћих путева у графу.

Нека је $G' = (V, E')$ комплетни усмерени граф (граф код кога за сваки пар чворова постоје обе гране, у оба смера). Грани $e \in E'$ додељује се дужина 0 ако је $e \in E$, односно 1 у противном. Сада за граф G' решавамо проблем налажења свих најкраћих путева. Ако у G постоји пут између v и w, онда је у G' његова дужина 0. Шта више, пут између чворова v и w у G постоји ако и само ако је дужина најкраћег пута између v и w у G' једнака 0. Другим речима, решење проблема свих најкраћих путева непосредно се трансформише у решење проблема транзитивног затворења.

Није тешко преправити алгоритам за одређивање свих најкраћих путева, тако да директно решава проблем транзитивног затворења. Наиме, у наредби `if` алгоритма за одређивање најкраћих путева врше се две провере и нешто се предузима само ако су оба услова испуњена. Међутим, прва провера зависи само од i и m, а друга само од m и j. Због тога се прва провера може извући испред треће петље јер ако први услов није испуњен, други услов се не мора проверавати ни за једну вредност j, а с друге стране, ако је први услов испуњен, онда се његова испуњеност не мора поново проверавати за сваку појединачну вредност j.

Читаоцима се оставља за размишљање питање како би изгледало транзитивно затворење неусмереног графа.

Задатак: Транзитивно затворење графа

Поставка: За дати усмерени повезани граф пронаћи његово транизитивно затворење.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају гране графа (чворове који су повезани у графу).

Излаз: На стандарни излаз исписати транзитивно затворење графа и то тако што ће се за сваки чвор исписати сви његови суседи у доле наведеном формату.

Пример

Улаз *Излаз*

```
9 8     0: 1 2 3 4 5 6 7 8
0 1     1: 3 4 6 7
0 2     2: 5 8
1 3     3:
1 4     4: 6 7
2 5     5: 8
4 6     6:
4 7     7:
5 8     8:
```

Решење: Једно ефикасно решење би било редукцијом на проблем налажења најкраћих путева у графу. Можемо посматрати комплетни усмерени граф (између свака 2 чвора постоје по 2 гране усмерене од једног ка другом). За сваку грану која постоји у полазном графу кажемо да је њена тежина 0, док за остале важи да им је тежина 0. Пут између 2 чвора постоји ако и само ако је најкраћа дужина пута између та 2 чвора једнака 0. Како нам је потребан најкраћи пут између свих парова чворова користићемо идеју сличну Флојд-Варшаловом алгоритму који управо налази најкраће путеве између свака 2 чвора.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list, cons
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.V = num_of_nodes;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
}

void transitive_closure(Graph &g)
{
    std::vector<std::vector<bool>> adjacency_matrix;

    adjacency_matrix.resize(g.V);
```

```
    for (int i = 0; i < g.V; i++) {
        adjacency_matrix[i].resize(g.V, false);

        adjacency_matrix[i][i] = true;
    }

    for (int i = 0; i < g.V; i++)
        for (int j : g.adjacency_list[i])
            adjacency_matrix[i][j] = true;

    for (int m = 0; m < g.V; m++)
        for (int i = 0; i < g.V; i++)
            if (adjacency_matrix[i][m])
                for (int j = 0; j < g.V; j++)
                    if (adjacency_matrix[m][j])
                        adjacency_matrix[i][j] = true;

    for (int i = 0; i < g.V; i++) {
        std::cout << i << ": ";
        for (int j = 0; j < g.V; j++)
            if (i != j && adjacency_matrix[i][j])
                std::cout << j << " ";
        std::cout << "\n";
    }
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, n);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
```

```
    add_edge(g, x, y);
  }

  transitive_closure(g);

  return 0;
}
```

Нешто неефикасније решење би било да из сваког чвора покрећемо DFS претрагу графа и за сваки чвор памтимо до којих чворова можемо доћи у оригиналном графу. За све чворове v до којих можемо доћи из почетног чвора ће постојати грана од почетног чвора до чвора v у транзитивном затворењу графа.

Минимално повезујуће дрво

Минимално повезујуће (каже се и разапињуће) дрво чини подскуп грана повезаног тежинског графа које повезују све чворове, тако да је укупан збир свих грана најмањи могући. Није тешко увидети да овакав подскуп грана мора да представља дрво: ако би подграф имао циклус, онда би се из циклуса могла уклонити нека грана – тиме се добија подграф који је и даље повезан, али има мању цену, јер су цене грана позитивне. Одређивање минималног повезујућег дрвета обично вршимо грамзивим алгоритмима (Примовим или Краскеловим).

Проблем За задати неусмерени повезани тежински граф $G = (V, E)$ конструисати повезујуће дрво T минималне цене.

Једноставности ради, претпоставимо да су цене грана различите. Ова претпоставка има за последицу да је минимално повезујуће дрво јединствено, што олакшава решавање проблема. Без ове претпоставке алгоритам остаје непромењен, изузев што се, приликом избора између две гране једнаке цене, произвољно бира једна од њих.

Примов алгоритам

Индуктивна хипотеза Умемо да конструшемо минимално повезујуће дрво за повезани граф са мање од m грана.

Базни случај је тривијалан. Ако је задат проблем одређивања минималног повезујућег дрвета за граф са m грана, како се он може свести на исти проблем са мање од m грана? Тврдимо да грана најмање тежине мора бити укључена у минимално повезујуће дрво. Ако она не би била укључена, онда би њено додавање минималном повезујућем дрвету затворило неки циклус; уклањањем произвољне друге гране из тог циклуса поново се добија дрво, али мање цене — што је у супротности са претпоставком о минималности минималног повезујућег дрвета. Дакле, ми знамо једну грану која мора да припада минималном повезујућем дрвету. Можемо да је уклонимо из графа и применимо индуктивну хипотезу на остатак графа, који сада има мање од m грана. Да ли је ово регуларна примена индукције?

Проблем је у томе што после уклањања гране, преостали проблем више није еквивалентан полазном. Прво, избор једне гране ограничава могућности избора других грана. Друго, после уклањања гране граф не мора да остане повезан.

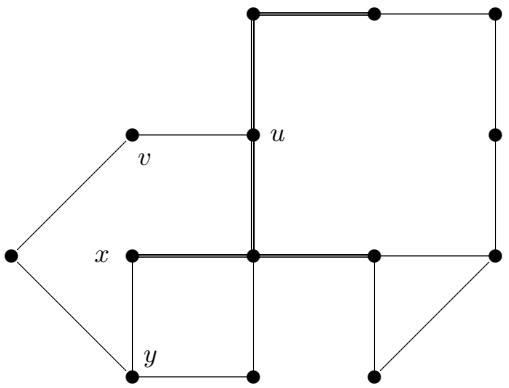
Решење насталог проблема је у измени индуктивне хипотезе. Ми знамо како да изаберемо прву грану, али не можемо да је уклонимо и просто заборавимо на њу, јер остали избори зависе од ње. Дакле, уместо да грану уклонимо, треба да је означимо, и да чињеницу да је та грана већ изабрана користимо даље у алгоритму. Алгоритам се извршава тако што се једна по једна грана бира и додаје у минимално повезујуће дрво. Према томе, индукција неће бити према величини графа, него према броју *изабраних ɡрана* у задатом (фиксираном) графу.

Индуктивна хипотеза Размотримо наредну индуктивну хипотезу: за задати повезани граф $G = (V, E)$ умемо да пронађемо подграф (дрво) T са k грана ($k < |V| - 1$), тако да је дрво T подграф минималног повезујућег дрвета графа G.

Базни случај за ову хипотезу смо већ размотрили — он се односи на избор прве гране. Претпоставимо да смо пронашли дрво T које задовољава дату индуктивну хипотезу и да је потребно да ово дрво проширимо наредном граном. Како пронаћи нову грану за коју ћемо бити сигурни да припада минималном повезујућем дрвету? Применимо сличан приступ као и при избору прве гране. За T се већ зна да је део финалног минималног повезујућег дрвета. Због тога у минималном повезујућем дрвету мора да постоји бар једна грана која повезује неки чвор из T са неким чвором у остатку графа. Покушајмо да пронађемо такву грану. Нека је E_k скуп свих грана које повезују подграф T са чворовима ван T. Тврдимо да грана са најмањом ценом из E_k припада минималном повезујућем дрвету. Означимо ту грану са (u, v) (видети слику 2.16; гране дрвета T су подебљане). Минимално повезујуће дрво садржи тачно један пут од u до v (између свака два чвора у дрвету постоји тачно један пут). Ако грана (u, v) не припада минималном повезујућем дрвету, онда она не припада ни том путу од u до v. Међутим, пошто u припада, а v не припада T, на том путу мора да постоји бар једна грана (x, y) таква да $x \in T$ и $y \notin T$. Цена ове гране већа је од цене (u, v), јер је цена (u, v) најмања међу ценама грана које повезују T са остатком графа. Сада можемо да применимо слично закључивање као при избору прве гране. Ако додамо грану (u, v) у минимално повезујуће дрво, а избацимо (x, y), добијамо повезујуће дрво мање цене, што је контрадикција.

Овај алгоритам назива се Примов алгоритам и сличан је Дајкстрином алгоритму за налажење најкраћих путева од задатог чвора.

Прва изабрана грана је грана са најмањом ценом. T се дефинише као дрво са само том једном граном. У свакој итерацији проналази се грана која повезује T са неким чворовом ван T, а има најмању цену. У алгоритму за налажење најкраћих путева од задатог чвора тражили смо најкраћи пут до чвора ван T. Једина разлика у односу на Дајкстрин алгоритам је та што се не разматра растојање неозначених чворова од почетног чвора v, већ растојање од текућег скупа V_k. Остатак алгоритма преноси се практично без промене. За сваки чвор w ван T памтимо минималну цену гране до w од неког чвора из T, односно ∞ ако таква грана не постоји. У свакој итерацији ми на тај начин бирамо грану најмање цене и повезујемо одговарајући чвор w са дрветом T. Затим проверавамо све гране суседне чвору w. Ако је цена такве гране (w, z) (за $z \notin T$) мања од цене тренутно најјефтиније познате гране до z, онда поправљамо цену

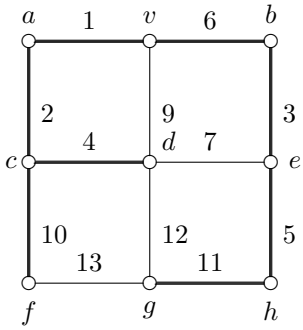


Слика 2.16: Одређивање наредне гране која се додаје у минимално повезујуће дрво.

чвора z и грану која кроз дрво води до њега.

Сложеност Примовог алгоритма идентична је сложености Дајкстриног алгоритма за налажење најкраћих растојања од задатог чвора и износи $O((|E| + |V|) \log |V|)$.

Илустроваћемо Примов алгоритам примером на слици 2.17. Чвор у првој колони табеле је онај који је додат у одговарајућем кораку. Први додати чвор је v, и у првој врсти наведене су све гране из v са својим ценама. У свакој врсти бира се грана са најмањом ценом. Списак тренутно најбољих грана и њихових цена поправља се у сваком кораку (приказани су само крајеви грана). На слици су гране графа које припадају минималном повезујућем дрвету подебљане.



	v	a	b	c	d	e	f	g	h
v	–	$v(1)$	$v(6)$	∞	$v(9)$	∞	∞	∞	∞
a	–	–	$v(6)$	$a(2)$	$v(9)$	∞	∞	∞	∞
c	–	–	$v(6)$	–	$c(4)$	∞	$c(10)$	∞	∞
d	–	–	$v(6)$	–	–	$d(7)$	$c(10)$	$d(12)$	∞
b	–	–	–	–	–	$b(3)$	$c(10)$	$d(12)$	∞
e	–	–	–	–	–	–	$c(10)$	$d(12)$	$e(5)$
h	–	–	–	–	–	–	$c(10)$	$h(11)$	–
f	–	–	–	–	–	–	–	$h(11)$	–
g	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Слика 2.17: Пример извршавања Примовог алгоритма за налажење минималног повезујућег дрвета.

У имплементацији поново можемо користити било низ у коме чувамо текућа растојања, било ред са приоритетом и лењо брисање.

Краскелов алгоритам

Други ефикасан алгоритам за одређивање минималног повезујућег дрвета графа $G = (V, E)$ је такође похлепан алгоритам, али до минималног повезајућег дрвета не долази

додавањем нових грана на тренутно дрво, него на тренутну шуму. Додавањем сваке нове гране смањује се број дрвета у шуми, тако да се на крају долази до само једног дрвета. При томе се гране за додавање разматрају редоследом према неопадајућим ценама; ако грана која је на реду повезује два чвора у различитим дрветима тренутне шуме, онда се та грана укључује у шуму, чиме се два дрвета спајају у једно. У противном, ако грана повезује два чвора у истом дрвету тренутне шуме, грана се прескаче. Овај алгоритам познат је као Краскелов алгоритам.

Докажимо да ћемо на крају овог алгоритма добити минимално повезујуће дрво датог графа. Једноставности ради претпоставимо да су све цене грана различите. Лако се показује да ће алгоритам вратити повезујуће дрво датог графа, те ћемо само показати да је оно и минимално. Претпоставимо супротно: да је Краскелов алгоритам вратио дрво K које није минимално повезујуће дрво датог графа. Означимо са T минимално повезујуће дрво датог графа. Нека су нам гране сортиране у растућем редоследу својих цена. С обзиром да је $K \neq T$ постоји барем једна грана у којој се ова два дрвета разликују. Размотримо најранију грану $e = (a, b)$ у растућем редоследу грана према ценама у којој се K и T разликују (тј. грана e припада једном, а не припада другом дрвету): с обзиром да Краскелов алгоритам разматра гране у овом редоследу и не додаје само оне које затварају неки циклус, мора важити да грана e припада K, а не припада T. У минималном повезујућем дрвету T мора постојати јединствени пут P од чвора a до чвора b. На том путу мора да постоји бар једна грана e' чија је цена већа од цене гране e (ако то не би важило све остале гране би биле укључене Краскеловим алгоритмом у дрво K, као и e те би супротно претпоставци K садржао циклус). Ако из дрвета T избацимо грану e', а додамо грану e добијамо повезујуће дрво мање цене што је у супротности са претпоставком да је T минимално повезујуће дрво датог графа.

За испитивање да ли су крајеви u, v тренутне гране (u, v) у истом или различитим дрветима тренутне шуме, погодно је користити структуре података за представљање дисјунктних подскупова (енгл. disjoint-set тј. union-find): тренутна дрвета шуме су дисјунктни подксупови скупа чворова. Операције `podskup(u)` и `podskup(v)` проналазе представнике u', v' два подскупа (корене дрвета којим су они представљени), па су u и v у истом подскупу ако и само ако је $u' = v'$. Ако је $u \neq v$, онда се та два подксупа замењују својом унијом, тј. примењује се операција `unija(u',v')`.

Функција за иницијализацију структуре за дисјунктне подскупове је сложености $O(|V|)$, додавање грана у скуп грана је сложености $O(|E|)$, њихово сортирање је у просеку сложености $O(|E| \log |E|)$, а након тога се главна петља извршава E пута, док су операције које се позивају у петљи (`predstavnik` и `unija`) сложености $O(\log |V|)$. Дакле, укупна сложеност алгоритма је $O(|V|) + O(|E|) + O(|E| \log |E|) + O(|E| \log |V|) = O(|E| \log |V|)$ (користимо чињеницу да је $O(\log |E|) = O(\log |V|)$ због $|E| \leq |V|^2$).

Пример извршавања Краскеловог алгоритма на графу са слике 2.17 приказан је у табели 2.1. С обзиром на то да су дужине свих грана различите, резултат је исто минимално повезујуће дрво приказано на слици 2.17.

грана	дужина	укључена?	шума
			$v, a, b, c, d, e, f, g, h$
av	1	да	$\underline{a}v, b, \underline{c}, d, e, f, g, h$
ac	2	да	$acv, \underline{b}, c, d, \underline{e}, f, g, h$
be	3	да	$a\underline{c}v, be, \underline{d}, e, f, g, h$
cd	4	да	$acdv, b\underline{e}, f, g, \underline{h}$
eh	5	да	$acd\underline{v}, \underline{b}eh, f, g$
bv	6	да	$abc\underline{de}hv, f, g$
de	7	не	$abc\underline{d}ehv, f, g$
dv	8	не	$ab\underline{c}dehv, \underline{f}, g$
cf	9	да	$abcdef\underline{h}v, \underline{g}$
gh	10	да	$abc\underline{d}ef\underline{g}hv$
dg	11	не	$abcde\underline{fg}hv$
fg	12	не	$abcdefghv$

Табела 2.1: Пример извршавања Краскеловог алгоритма за граф са слике 2.17

Задатак: Уштеда каблова

Поставка: У једном рачунарском кабинету потребно је поставити мрежу тако да су сви рачунари међусобно повезани, али тако да се употреби што мања дужина кабла. Ако је познато који се рачунари могу повезати кабловима и које је растојање између њих, напиши програм који одређује најмању укупну дужину каблова.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број рачунара n ($1 \leq n \leq 5000$), затим број парова рачунара који се могу повезати каблом m ($n - 1 \leq m \leq n(n-1)/2$) и у наредних m редова подаци о рачунарима који се могу повезати (у сваком реду се налазе два цела броја која представљају редне бројеве рачунара, при чему се рачунари броје од нуле, и један реалан број који представља растојање између та два рачунара).

Излаз: На стандардни излаз исписати само један реалан број заокружен на једну децималу, који представља најмању укупну дужину каблова.

Пример

Улаз	*Излаз*
9 13 0 1 4.0 0 7 8.0 1 7 11.0 1 2 8.0 7 8 7.0 7 6 1.0 2 8 2.0 8 6 6.0 2 3 7.0 2 5 4.0 6 5 2.0 3 4 9.0 5 4 10.0	37.0

Решење: Задатак решавамо коришћењем неког од грамзивих алгоритама за конструкцију минималног разапињућег стабла.

Пошто је граф неусмерен, приликом креирања графа користимо чињеницу да гране које воде од чвора v до чвора u и од чвора u до чвора v имају исту цену.

Примов алгоритам

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
#include <utility>
#include <queue>
#include <tuple>
#include <limits>

using namespace std;

typedef int Cvor;
typedef double Duzina;
typedef pair<Duzina, Cvor> Par;

// +beskonacno
const Duzina INF = numeric_limits<Duzina>::infinity();

int main() {
  // ucitavamo podatke
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<Par>> susedi(n);
```

```
int m;
cin >> m;
for (int i = 0; i < m; i++)  {
  int cvor1, cvor2;
  double duzina;
  cin >> cvor1 >> cvor2 >> duzina;
  susedi[cvor1].emplace_back(duzina, cvor2);
  susedi[cvor2].emplace_back(duzina, cvor1);
}

// ukupna duzina kablova u trenutnom stablu
double ukupnaDuzina = 0.0;
// najmanje rastojanje svakog cvora od trenutnog stabla
vector<Duzina> rastojanje(n, INF);
// da li je cvor ukljucen u trenutno stablo
vector<bool> ukljucen(n, false);
// krecemo od praznog stabla - postavljamo rastojanje do cvora 0 na 0.0
// da bi taj cvor prvi bio ukljucen u stablo
rastojanje[0] = 0.0;

// broj cvorova u stablu
int cvorovaUStablu = 0;
// sve dok ne dodamo n cvorova u stablo
while (cvorovaUStablu < n) {
  // pronalazimo cvor koji je najblizi trenutnom stablu
  Cvor cvorMin = 0;
  Duzina minRastojanje = INF; // rastojanje najblizeg cvora od stabla
  for (Cvor cvor = 0; cvor < n; cvor++)
    if (!ukljucen[cvor] && rastojanje[cvor] < minRastojanje) {
      cvorMin = cvor;
      minRastojanje = rastojanje[cvor];
    }
  // ukljucujemo cvorMin u stablo
  ukljucen[cvorMin] = true;
  cvorovaUStablu++;
  // uracunavamo duzinu najkrace grane koja ga spaja sa trenutnim stablom
  ukupnaDuzina += minRastojanje;
  // njegovo rastojanje do stabla je sada 0
  rastojanje[cvorMin] = 0.0;
  // razmatramo sve susede  cvoraMin
  for (const Par& p : susedi[cvorMin])
    // azuriramo njihovo rastojanje od trenutnog stabla, ako je to potrebno
    if (p.first < rastojanje[p.second])
      rastojanje[p.second] = p.first;
}

// ispisujemo konacan rezultat
```

```
  cout << fixed << showpoint << setprecision(1) << ukupnaDuzina << endl;

  return 0;
}
```

Примов алгоритам са редом са приоритетом

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
#include <utility>
#include <queue>
#include <tuple>
#include <limits>

using namespace std;

typedef int Cvor;
typedef double Duzina;
typedef pair<Duzina, Cvor> Par;

const Duzina INF = numeric_limits<Duzina>::infinity();

int main() {
  // ucitavamo podatke
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  int n;
  cin >> n;
  vector<vector<Par>> susedi(n);
  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++)  {
    int cvor1, cvor2;
    double duzina;
    cin >> cvor1 >> cvor2 >> duzina;
    susedi[cvor1].emplace_back(duzina, cvor2);
    susedi[cvor2].emplace_back(duzina, cvor1);
  }

  // ukupna duzina kablova u trenutnom stablu
  double ukupnaDuzina = 0.0;
  // najmanje rastojanje svakog cvora od trenutnog stabla
  vector<Duzina> rastojanje(n, INF);
  // da li je cvor ukljucen u trenutno stablo
  vector<bool> ukljucen(n, false);
  // red sa prioritetom koji nam pomaze da efikasnije nadjemo cvor koji
  // je najblizi trenutnom stablu
  priority_queue<Par, vector<Par>, greater<Par>> pq;
```

```
  // krecemo od praznog stabla - postavljamo rastojanje do cvora 0 na 0.0
  // da bi taj cvor prvi bio ukljucen u stablo
  rastojanje[0] = 0.0;
  pq.emplace(0.0, 0);

  // broj cvorova u stablu
  int cvorovaUStablu = 0;
  // sve dok ne dodamo n cvorova u stablo
  while (cvorovaUStablu < n) {
    // pronalazimo cvor koji je najblizi trenutnom stablu koriscenjem
    // reda i uklanjamo ga iz reda
    double minRastojanje; Cvor cvorMin;
    tie(minRastojanje, cvorMin) = pq.top();
    pq.pop();
    // zbog lenjog brisanja, moguce je da je on ranije ukljucen u
    // stablo, pa ga u tom slucaju zanemarujemo
    if (ukljucen[cvorMin])
      continue;
    // ukljucujemo cvorMin u stablo
    ukljucen[cvorMin] = true;
    cvorovaUStablu++;
    // uracunavamo duzinu najkrace grane koja ga spaja sa trenutnim
    // stablom
    ukupnaDuzina += minRastojanje;
    // njegovo rastojanje do stabla je sada 0
    rastojanje[cvorMin] = 0.0;
    // razmatramo sve susede  cvoraMin
    for (const Par& p : susedi[cvorMin])
      // azuriramo njihovo rastojanje od trenutnog stabla, ako je to
      // potrebno
      if (p.first < rastojanje[p.second]) {
        rastojanje[p.second] = p.first;
        // ako se rastojanje smanjilo, dodajemo ga u red, pri cemu
        // staru vrednost iz reda (ako postoji) ne brisemo odmah
        pq.push(p);
      }
  }
  // ispisujemo konacan rezultat
  cout << fixed << showpoint << setprecision(1) << ukupnaDuzina << endl;

  return 0;
}
```

Краскелов алгоритам

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
```

```cpp
#include <tuple>
#include <algorithm>

using namespace std;

// tip grane grafa - duzina ide prva, zbog sortiranja
typedef int Cvor;
typedef double Duzina;
typedef tuple<Duzina, Cvor, Cvor> Grana;

int main() {
  // ucitavamo podatke
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  int n;
  cin >> n;
  int m;
  cin >> m;
  vector<Grana> grane(m);
  for (int i = 0; i < m; i++)  {
    int cvorOd, cvorDo;
    double duzina;
    cin >> cvorOd >> cvorDo >> duzina;
    grane[i] = make_tuple(duzina, cvorOd, cvorDo);
  }
  // sortiramo grane u rastucemo redosledu duzina
  sort(begin(grane), end(grane));
  // struktura podataka za predstavljanje formiranih grupa
  // za svaki element pamtimo u kojoj se grupi nalazi
  vector<int> grupa(n);
  iota(begin(grupa), end(grupa), 0);

  // ukupna duzina kablova
  double ukupnaDuzina = 0.0;
  // broj trenutno dodatih grana
  int dodatoGrana = 0;
  for (int i = 0; i < m && dodatoGrana < n-1; i++) {
    int c1 = get<1>(grane[i]);
    int c2 = get<2>(grane[i]);
    // ako trenutna grana spaja cvorove u dve razlicite komponente
    if (grupa[c1] != grupa[c2]) {
      int g1 = grupa[c1];
      // tada spajamo komponente
      for (int j = 0; j < n; j++)
        if (grupa[j] == g1)
          grupa[j] = grupa[c2];

      // dodajemo granu u drvo
```

```
      Duzina duzina = get<0>(grane[i]);
      ukupnaDuzina += duzina;
      dodatoGrana++;
    }
  }
  // ispisujemo konacan rezultat
  cout << fixed << showpoint << setprecision(2) << ukupnaDuzina << endl;
  return 0;
}
```

Краскелов алгоритам са структуром за представљање дисјунктних скупова (енгл. union-find).

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
#include <tuple>
#include <algorithm>

using namespace std;

// struktura podataka za predstavljanje disjunktnih podskupova (union-find)
struct UF_Cvor {
  int roditelj;
  int rang; // bila bi visina, da se ne vrsi dodatno kompresija staze
};

// inicijalizacija - svaki cvor je u posebnoj komponenti
void UF_Init(vector<UF_Cvor>& uf) {
  for (size_t i = 0; i < uf.size(); i++) {
    uf[i].roditelj = i;
    uf[i].rang = 0;
  }
}

// pronalazenje predstavnika cvora
int UF_Find(vector<UF_Cvor>& uf, int i) {
  while (uf[i].roditelj != i) {
    // kompresija staze - svaki drugi cvor ukazuje na svog dedu
    uf[i].roditelj = uf[uf[i].roditelj].roditelj;
    i = uf[i].roditelj;
  }
  return i;
}

// unija dve komponente
bool UF_Union(vector<UF_Cvor>& uf, int v1, int v2) {
  int v1koren = UF_Find(uf, v1);
```

```
  int v2koren = UF_Find(uf, v2);
  // cvorovi v1 i v2 su u istoj komponentni
  if (v1koren == v2koren)
    return false;
  // granu vucemo od grupe sa manjim rangom ka grupi sa vecim
  if (uf[v1koren].rang < uf[v2].rang) {
    uf[v1koren].roditelj = v2koren;
  } else if (uf[v1koren].rang > uf[v2koren].rang) {
    uf[v2koren].roditelj = v1koren;
  } else {
    // rangovi su jednaki, pa se rang (visina) novog drveta povecava
    uf[v2koren].roditelj = v1koren;
    uf[v1koren].rang++;
  }
  return true;
}

// tip grane grafa - duzina ide prva, zbog sortiranja
typedef int Cvor;
typedef double Duzina;
typedef tuple<Duzina, Cvor, Cvor> Grana;

int main() {
  // ucitavamo podatke
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  int n;
  cin >> n;
  int m;
  cin >> m;
  vector<Grana> grane(m);
  for (int i = 0; i < m; i++)  {
    int cvorOd, cvorDo;
    double duzina;
    cin >> cvorOd >> cvorDo >> duzina;
    grane[i] = make_tuple(duzina, cvorOd, cvorDo);
  }
  // sortiramo grane u rastucemo redosledu duzina
  sort(begin(grane), end(grane));
  // struktura podataka za predstavljanje formiranih grupa
  vector<UF_Cvor> uf(n);
  UF_Init(uf);
  // ukupna duzina kablova
  double ukupnaDuzina = 0.0;
  // broj trenutno dodatih grana
  int dodatoGrana = 0;
  for (int i = 0; i < m && dodatoGrana < n-1; i++) {
    // ako trenutna grana spaja cvorove u dve razlicite komponente,
```

```
    // tada spajamo komponente
    if (UF_Union(uf, get<1>(grane[i]), get<2>(grane[i]))) {
      // dodajemo granu u drvo
      ukupnaDuzina += get<0>(grane[i]);
      dodatoGrana++;
    }
  }
  // ispisujemo konacan rezultat
  cout << fixed << showpoint << setprecision(1) << ukupnaDuzina << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Кластери

Поставка: У једној земљи се организује шампионат у фудбалу. Утакмице ће се играти у n градова, који су повезани путевима. На турниру игра k екипа и организатори желе да поделе те градове у k ($k \leq n$) група, тако да су те групе што више раздвојене, тј. тако да је најкраћи пут између било које две групе градова највећи могући (да би навијачи били што више раздвојени).

Улаз: Са стандардног улаза учитава се број k који представља тражени број група градова, затим број n који представља укупан број градова, затим број p који представља број путева и затим у наредних p редова опис путева (три цела броја: прво индекси два града које пут спаја и затим дужина пута између њих у километрима; индекси путева су већи или једнаки нули).

Излаз: На стандардни излаз исписати удаљеност две најближе формиране групе градова.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 7 9 0 1 10 1 5 1 1 3 1 5 3 1 4 2 1 2 6 1 2 5 12 1 4 11 0 6 15	10

Објашњење

У првој групи налази се само град 0, у другој градови $1, 3, 5$, а у трећој $2, 4, 6$. Удаљеност између прве и друге групе је 10, а између прве и треће је 15, а између друге и

треће је 11. Намање растојање између две групе градова је 10.

Решење: Кренимо од ситуације у којој је сваки град група за себе. Ако је број градова једнак траженом броју група, то је једина могућа конфигурација, док је у супротном потребно извршити груписање нека два града у исту групу. Најбоље је да се групишу градови који су што мање међусобно удаљени, јер би се у случају груписања нека два даља града смањило најмање растојање између две различите групе. Сличан поступак се наставља и даље, све док се не добије тражени број група. Када је креирано m група, где је $m > k$, потребно је спојити неке две групе. Поново бирамо најкраћу грану која повезује неке две различите групе и те две групе спајамо. Дакле, поступак решавамо грамзивим алгоритмом, који је веома сличан Краскеловом алгоритму за изградњу минималног повезујућег дрвета. Најмање растојање група биће $(k-1)$-во по дужини грана која припада том дрвету. Имплементација тече тако што сортирамо све гране по дужини, обилазимо их у растућем редоследу дужине и додајемо једну по једну грану која спаја чворове у различитим компонентама. Чување компонената вршимо коришћењем структуре података за репрезентовање дисјунктних скупова (енгл. union-find). Када се број компонената смањи испод жељеног броја k, последња додата грана представља најмање растојање између неке две од k компонената.

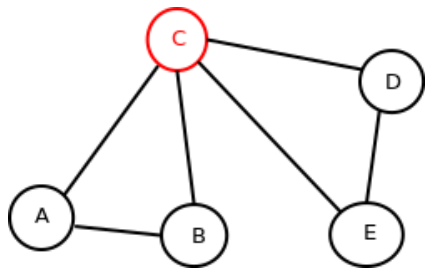
```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <tuple>

using namespace std;

// struktura podataka za predstavljanje disjunktnih podskupova (union-find)
struct UF_Cvor {
  int roditelj;
  int rang; // bila bi visina, da se ne vrsi dodatno kompresija staze
};

// inicijalizacija - svaki cvor je u posebnoj komponenti
void UF_Init(vector<UF_Cvor>& uf) {
  for (size_t i = 0; i < uf.size(); i++) {
    uf[i].roditelj = i;
    uf[i].rang = 0;
  }
}

// pronalazenje predstavnika cvora
int UF_Find(vector<UF_Cvor>& uf, int i) {
  while (uf[i].roditelj != i) {
    // kompresija staze - svaki drugi cvor ukazuje na svog dedu
    uf[i].roditelj = uf[uf[i].roditelj].roditelj;
    i = uf[i].roditelj;
  }
  return i;
```

```
}

// unija dve komponente
bool UF_Union(vector<UF_Cvor>& uf, int v1, int v2) {
  int v1koren = UF_Find(uf, v1);
  int v2koren = UF_Find(uf, v2);
  // cvorovi v1 i v2 su u istoj komponentni
  if (v1koren == v2koren)
    return false;
  // granu vucemo od grupe sa manjim rangom ka grupi sa vecim
  if (uf[v1koren].rang < uf[v2].rang) {
    uf[v1koren].roditelj = v2koren;
  } else if (uf[v1koren].rang > uf[v2koren].rang) {
    uf[v2koren].roditelj = v1koren;
  } else {
    // rangovi su jednaki, pa se rang (visina) novog drveta povecava
    uf[v2koren].roditelj = v1koren;
    uf[v1koren].rang++;
  }
  return true;
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  // broj zeljenih grupa
  int k;
  cin >> k;
  // broj gradova i broj puteva
  int n, p;
  cin >> n >> p;
  // ucitavamo sve puteve (uredjene trojke)
  typedef tuple<int, int, int> Put;
  vector<Put> putevi(p);
  for (int i = 0; i < p; i++) {
    int g1, g2, duzina;
    cin >> g1 >> g2 >> duzina;
    putevi[i] = make_tuple(duzina, g1, g2);
  }

  // sortiramo sve puteve po duzini
  sort(begin(putevi), end(putevi));

  // struktura podataka za predstavljanje formiranih grupa
  vector<UF_Cvor> uf(n);
  UF_Init(uf);
  // na pocetku je svaki grad u svojoj grupi
  int brojGrupa = n;
```

```
  // obilazimo puteve u rastucem redosledu duzine
  for (auto put: putevi) {
    // ako je ovaj put izmedju dve razlicite grupe
    if (UF_Union(uf, get<1>(put), get<2>(put))) {
      // spajamo dve grupe kojima pripadaju krajevi tog puta
      brojGrupa--;
      if (brojGrupa < k) {
        // ako se broj grupa smanjio ispod k, upravo dodati put je bio
        // najkraci put izmedju neke dve od k prethodno formiranih grupa
        cout << get<0>(put) << endl;
        break;
      }
    }
  }

  return 0;
}
```

Мостови и артикулационе тачке

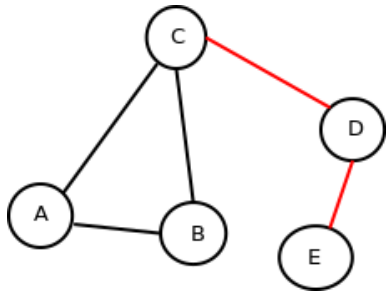
Уколико у неусмереном повезаном графу $G = (V, E)$ постоји чвор $v \in V$ такав да његовим уклањањем граф престаје да буде повезан, онда такав чвор називамо **артикулационом тачком** (енг. articulation point, cut vertex). На пример, ако бисмо из графа са слике 2.18 уклонили чвор C (заједно са свим гранама које су му суседне) преостали граф не би остао повезан, те је чвор C артикулациона тачка овог графа.



Слика 2.18: Пример графа који садржи артикулациону тачку C.

Ако у повезаном графу постоји грана чијим уклањањем из графа он престаје да буде повезан, овакву грану називамо *мосто̄м* (енг. bridge, cut edge). На пример, ако бисмо из графа са слике 2.19 уклонили грану CD или грану DE граф би престао да буде повезан, те ове две гране, свака за себе, чине мост.

Поставља се питање како у датом графу пронаћи артикулациону тачку или мост. Директан начин да у графу пронађемо артикулациону тачку подразумева да један по један чвор уклањамо из графа и да проверавамо да ли је добијени граф неповезан (нпр.



Слика 2.19: Пример графа који садржи мост.

коришћењем DFS алгоритма). Сложеност овог алгоритма је $O(|V| \cdot (|V| + |E|))$. Аналогно, мостове у графу можемо да одредимо уклањањем једне по једне гране из графа и провером да ли граф остаје повезан. Сложеност овог алгоритма је $O(|E| \cdot (|V| + |E|))$. Постоје и ефикаснији алгоритми за одређивање артикулационих тачака и мостова у графу.

У наставку ћемо размотрити алгоритме које су осмислили Тарџан и Хопкрофт и који су линеарне временске сложености. С обзиром на то да је алгоритам за проналажење мостова донекле једноставнији, кренућемо од њега. Важи следеће тврђење: свака грана (u, v) графа која не припада неком циклусу је мост (јер након избацивања гране (u, v) не постоји начин да се од чвора u стигне до чвора v). Специјално, ако је гаф шума, онда је свака грана у том графу мост.

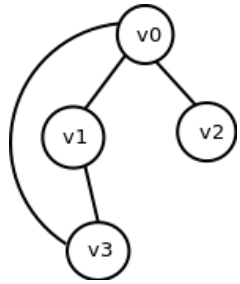
Размотримо DFS дрво добијено обиласком у дубину датог графа. С обзиром на то да је полазни граф неусмерен, постоје две врсте грана у односу на DFS дрво: гране DFS дрвета и гране које повезују потомка са претком у односу на DFS дрво. Ако грана (u, v) повезује потомка са претком, она не може бити мост у графу јер се гранама DFS дрвета може стићи од чвора u до чвора v. За грану (u, v) DFS дрвета важи да је мост ако њеним уклањањем граф постаје неповезан, тј. поддрво са кореном у v остаје неповезано са делом графа "изнад" ове гране. То ће важити ако не постоји начин да се (неком граном од потомка ка претку) стигне до чвора u или претка чвора u из подграфа са кореном v. Како ово утврдити? За сваки чвор v потребно је одредити његову вредност при долазној нумерацији $v.Pre$ и најмању међу вредностима долазне нумерације чворова до којих се може стићи из произвољног чвора поддрвета са кореном v – означимо ту вредност са $v.lowLink$ (енг. low link). Важи: $v.lowLink = \min\{v.Pre, u.Pre\}$, где је u предак чвора v у DFS дрвету и постоји грана која повезује неког потомка чвора v са чвором u. Поддрво са кореном v остаће неповезано са делом графа "изнад" ове гране ако буде важило $v.lowLink \geq u.Pre$. Дакле, услов који грана (u, v) треба да задовољава да би била мост је да важи $v.lowLink \geq u.Pre$.

Током DFS обиласка датог неусмереног графа, проласку сваке гране (u, v) придружујемо неку акцију:

- ако је у питању грана која повезује потомка u са претком v, онда ако је вредност $v.Pre$ мања од текуће вредности $u.lowLink$, вредност $u.lowLink$ постављамо на $v.Pre$

- ако је у питању грана DFS дрвета, онда чвору v постављамо вредност $v.Pre$, вредност $v.lowLink$ иницијализујемо на $v.Pre$, а након рекурзивне обраде комплетног поддрвета са кореном у чвору v ако је вредност $v.lowLink$ мања од вредности $u.lowLink$ ажурирамо вредност $u.lowLink$

Погледајмо на примеру једноставног неусмереног графа са слике 2.20 како би текло извршавање овог алгоритма.



Слика 2.20: Пример графа који садржи један мост: (v_0, v_2)

```
Покрећемо DFS из чвора v0, постављамо v0.Pre = 1 и v0.lowLink = 1
Разматрамо суседа v1 чвора v0

Покрећемо DFS из чвора v1, постављамо v1.Pre = 2 и v1.lowLink = 2
Разматрамо суседа v3 чвора v1

Покрећемо DFS из чвора v3, постављамо v3.Pre = 3 и v3.lowLink = 3
Разматрамо суседа v0 чвора v3
Грана (v3,v0) је грана од потомка ка претку,
па постављамо v3.lowLink = v0.Pre = 1
Разматрамо суседа v1 чвора v3
То је грана ка родитељу, коју не разматрамо

Враћамо се у чвор v1
Пошто важи v3.lowLink < v1.lowLink постављамо v1.lowLink = v3.lowLink = 1
С обзиром да је v3.lowLink < v1.Pre, грана (v1,v3) није мост

Разматрамо суседа v0 чвора v1
То је грана ка родитељу, коју не разматрамо

Враћамо се у чвор v0
Пошто важи v1.lowLink < v0.lowLink постављамо v0.lowLink = v1.lowLink = 1
С обзиром да је v1.lowLink = v0.Pre, грана (v0,v1) није мост

Разматрамо суседа v3 чвора v0
v3.lowLink = v0.lowLink па не радимо ништа

Покрећемо DFS из чвора v2, постављамо v2.Pre = 4 и v2.lowLink = 4
```

```
Разматрамо суседа v0 чвора v2
То је грана ка родитељу, коју не разматрамо

Враћамо се у чвор v0
Пошто важи v2.lowLink > v0.Pre, не радимо ништа
С обзиром на то да је v2.lowLink > v0.Pre, грана (v0,v2) јесте мост
```

На сличан начин можемо закључити да ће чвор u бити артикулациона тачка графа ако је испуњен један од наредна два услова:

1. u је корен DFS дрвета и има бар два детета
2. u није корен DFS дрвета и има дете v у DFS дрвету такво да ниједан чвор у поддрвету са кореном v није повезан са неким претком чвора u у DFS дрвету

Ако је задовољен први услов, с обзиром на то да у неусмереним графовима не постоје попречне гране, избацивање корена DFS дрвета довело би до "разбијања" графа на већи број компоненти (по једна за свако дете корена DFS дрвета). Други услов означава ситуацију када након избацивања неког чвора из графа више није могуће доћи из произвољног чвора поддрвета са кореном у неком од детета тог чвора до произвољног чвора "изнад" њега у DFS дрвету.

Први од услова се може детектовати тако што за сваки чвор проверимо да ли има родитеља приликом DFS обиласка (једино корен нема родитеља) и бројимо колико има деце. Други услов је еквивалентан услову код одређивања мостова, тј. чвор u биће артикулациона тачка ако важи $v.lowLink \geq u.Pre$.

Задатак: Артикулационе тачке

Поставка: За дати неусмерени повезани граф одредити све артикулационе тачке.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају чворове који су повезани у графу.

Излаз: На стандардни излаз исписати све артикулационе тачке графа у растућем поретку.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 5 0 1 1 2 2 0 0 3 3 4	0 3

Решење: Једно ефикасно решење би било коришћењем Тарјановог алгоритма за одређивање артикулационих тачака. Користићемо структуру податак скуп како бисмо добили тачке у растућем поретку.

Нешто неефикасније решење би могло бити следеће: Сваки од n чворова графа избацимо из графа, проверимо да ли је граф остао повезан и затим га вратимо у граф. Уколико у неком тренутку наиђемо на неповезан граф значи да је чвор који је био избачен у тој итерацији артикулациона тачка и онда додамо тај чвор у скуп артикулационих тачака.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<int> times;
  std::vector<int> lower_times;
  std::set<int> articulation_points;
  int time;
};

void initialize_graph(Graph &g,
              const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list,
              const std::vector<bool> &visited,
              const std::vector<int> &parents,
              const std::vector<int> &times,
              const std::vector<int> &lower_times,
              const std::set<int> &articulation_points,
              int time)
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.parents = parents;
  g.times = times;
  g.lower_times = lower_times;
  g.articulation_points = articulation_points;
  g.time = time;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
}

void DFS(Graph &g, int u)
{
  g.visited[u] = true;
  g.times[u] = g.lower_times[u] = g.time;
```

```
  g.time++;

  int children = 0;

  for (int node : g.adjacency_list[u]) {
    if (!g.visited[node]) {
      g.parents[node] = u;
      children++;
      DFS(g, node);

      if (g.lower_times[node] < g.lower_times[u])
        g.lower_times[u] = std::min(g.lower_times[u], g.lower_times[node]);

      if (g.parents[u] == -1 && children > 1)
        g.articulation_points.insert(u);

      if (g.parents[u] != -1 && g.times[u] <= g.lower_times[node])
        g.articulation_points.insert(u);
    }
    else if (node != g.parents[u]) {
      g.lower_times[u] = std::min(g.lower_times[u], g.lower_times[node]);
    }
  }
}

void find_articulation_points(Graph &g)
{
  DFS(g, 0);

  for (int x : g.articulation_points)
    std::cout << x << " ";

  std::cout << std::endl;
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<int> times;
  std::vector<int> lower_times;
  std::set<int> articulation_points;
  int time;

  std::cin >> n >> m;
```

```
  visited.resize(n, false);
  adjacency_list.resize(n);
  parents.resize(n, -1);
  time = 0;
  times.resize(n, -1);
  lower_times.resize(n, -1);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, parents, times,
           lower_times, articulation_points, time);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  find_articulation_points(g);

  return 0;
}
```

Задатак: Мостови

Поставка: За дати неусмерени повезани граф одредити све мостове.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају чворове који су повезани у графу.

Излаз: На стандардни излаз исписати све мостове графа у растућем поретку. Сваки мост треба да буде исписан у формату mn где важи $m < n$. Сваки мост треба да буде исписан у засебној линији.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 5 0 1 1 2 2 0 0 3 3 4	0 3 3 4

Решење: Једно ефикасно решење би било коришћењем Тарџановог алгоритма за одређивање мостова. Користићемо структуру податак скуп како бисмо добили мостове у растућем поретку. Сваки мост представљамо као пар две целобројне вредности

које представљају 2 чвора која повезује одговарајућа грана.

Друго решење би могло да се имплементира тако што бисмо избацили сваку од грана (рецимо ставимо је на -1), затим проверимо да ли је граф остао повезан и на крају вратимо грану. Уколико је граф бипо неповезан након избацивања неке од грана, онда ту грану додајемо у скуп мостова.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<int> times;
  std::vector<int> lower_times;
  std::set<std::pair<int, int>> bridges;
  int time;
};

void initialize_graph(Graph &g,
              const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list,
              const std::vector<bool> &visited,
              const std::vector<int> &parents,
              const std::vector<int> &times,
              const std::vector<int> &lower_times,
              const std::set<std::pair<int, int>> &bridges,
              int time)
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.parents = parents;
  g.times = times;
  g.lower_times = lower_times;
  g.bridges = bridges;
  g.time = time;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
}

void DFS(Graph &g, int u)
{
  g.visited[u] = true;
```

```
  g.times[u] = g.lower_times[u] = g.time;

  g.time++;

  int children = 0;

  for (int node : g.adjacency_list[u]) {
    if (!g.visited[node]) {

      g.parents[node] = u;
      children++;

      DFS(g, node);

      if (g.lower_times[node] < g.lower_times[u])
        g.lower_times[u] = std::min(g.lower_times[u], g.lower_times[node]);

      if (g.times[u] < g.lower_times[node])
        g.bridges.insert(std::make_pair(u, node));
    }
    else if (node != g.parents[u]) {
      g.lower_times[u] = std::min(g.lower_times[u], g.times[node]);
    }
  }
}

void print_bridges(Graph &g)
{
  for (auto &p  : g.bridges)
    std::cout << p.first << " " << p.second << "\n";
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<int> times;
  std::vector<int> lower_times;
  std::set<std::pair<int, int>> bridges;
  int time;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);
```

```
  adjacency_list.resize(n);

  parents.resize(n, -1);

  time = 0;

  times.resize(n, -1);

  lower_times.resize(n, -1);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, parents, times,
           lower_times, bridges, time);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  DFS(g, 0);

  print_bridges(g);

  return 0;
}
```

Задатак: Биповезан граф

Поставка: За неусмерен граф се каже да је биповезан уколико важи да је повезан и да нема артикулационих тачака. За дати неусмерени граф проверити да ли је биповезан.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају чворове који су повезани у графу.

Излаз: На стандардни излаз исписати да “DA” уколико је граф биповезан а “NE” у супротном.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 6 0 1 1 2 2 0 0 3 3 4 2 4	DA

Решење: Граф је бипартитан ако нема артикулационих тачака и ако је повезан. За одређивање броја артикулационих тачака можемо користити Тарџанов алгоритам (ако је број артикулационих тачака 0 онда их нема), а за проверу да ли је граф повезан можемо покренути DFS обилазак графа из било ког чвора јер се у повезаном неусмереном графу гарантује да ће се DFS обиласком графа из било ког чвора доћи до свих осталих. Пребројавањем броја посећених чворова током DFS обиласка графа можемо установити да ли је граф повезан (ако је посећено свих n чворова граф је повезан, иначе није).

Граф је бипартитан ако нема артикулационих тачака и ако је повезан. Артикулационе тачке можео тражити раније описаним приступом где избацујемо чвор по чвор и проверавамо да ли је граф повезан. Ако у било ком тренутку установимо да граф није повезан након избацивања неког од чворова то значи да постоји бар једна артикулациона тачка и да граф није биповезан тако да одмах можемо исписати “NE”, и завршити са радом програма. За проверу да ли је граф повезан можемо покренути DFS обилазак графа из било ког чвора јер се у повезаном неусмереном графу гарантује да ће се DFS обиласком графа из било ког чвора доћи до свих осталих. Пребројавањем броја посећених чворова током DFS обиласка графа можемо установити да ли је граф повезан (ако је посећено свих n чворова граф је повезан, иначе није).

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <set>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<int> times;
  std::vector<int> lower_times;
  std::set<int> articulation_points;
  int time;
};

void initialize_graph(Graph &g,
              const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list,
              const std::vector<bool> &visited,
              const std::vector<int> &parents,
```

```
              const std::vector<int> &times,
              const std::vector<int> &lower_times,
              const std::set<int> &articulation_points,
              int time)
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.parents = parents;
  g.times = times;
  g.lower_times = lower_times;
  g.articulation_points = articulation_points;
  g.time = time;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
}

void DFS(Graph &g, int u)
{
  g.visited[u] = true;

  g.times[u] = g.lower_times[u] = g.time;

  g.time++;

  int children = 0;

  for (int node : g.adjacency_list[u]) {
    if (!g.visited[node]) {

      g.parents[node] = u;
      children++;

      DFS(g, node);

      if (g.lower_times[node] < g.lower_times[u])
        g.lower_times[u] = std::min(g.lower_times[u], g.lower_times[node]);

      if (g.parents[u] == -1 && children > 1)
        g.articulation_points.insert(u);

      if (g.parents[u] != -1 && g.times[u] <= g.lower_times[node])
        g.articulation_points.insert(u);
    }
```

```
    else if (node != g.parents[u]) {
      g.lower_times[u] = std::min(g.lower_times[u], g.lower_times[node]);
    }
  }
}

void is_biconnected(Graph &g)
{
  DFS(g, 0);

  if (g.articulation_points.size() > 0 ||
      std::count_if(g.visited.begin(), g.visited.end(), [](bool is_visited){
      return is_visited == false; }) > 0)
      printf("NE\n");
    else
      printf("DA\n");
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<int> times;
  std::vector<int> lower_times;
  std::set<int> articulation_points;
  int time;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  parents.resize(n, -1);

  time = 0;

  times.resize(n, -1);

  lower_times.resize(n, -1);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, parents, times,
           lower_times, articulation_points, time);
```

```
  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  is_biconnected(g);

  return 0;
}
```

Компоненте јаке повезаности

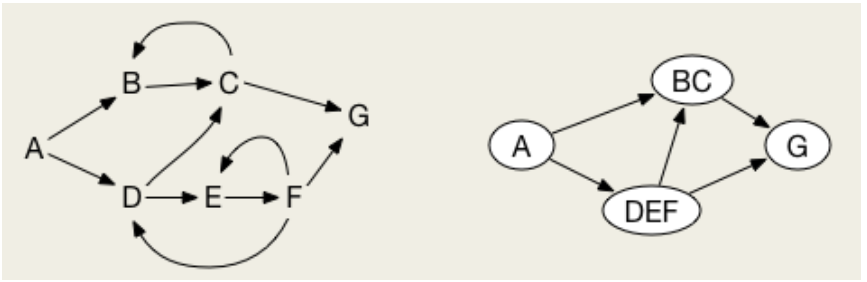
За усмерени граф кажемо да је *јако повезан* ако је сваки чвор графа достижан из сваког другог чвора у графу.

Релација $\sim$ *обостране достижности* се може дефинисати на скупу чворова усмереног графа $G = (V, E)$ на следећи начин: $u \sim v$ ако је чвор u достижан из чвора v и чвор v достижан из чвора u. За ову релацију важи да је:

- рефлексивна – за сваки чвор $u \in V$ је $u \sim u$,
- симетрична – за свака два чвора $u, v \in V$ важи $u \sim v$ акко $v \sim u$,
- транзитивна – за свака три чвора $u, v, w \in V$ из $u \sim v$ и $v \sim w$ следи и $u \sim w$.

Стога је она релација еквиваленције. Она разлаже скуп чворова V у класе еквиваленције које називамо *компоненте јаке повезаности* графа G (енгл. strongly connected components). На слици 2.21 приказан је усмерени граф који има четири компоненте јаке повезанонсти које се састоје редом од чворова $\{A\}, \{B, C\}, \{D, E, F\}, \{G\}$. Приметимо да сви чворови неког циклуса припадају истој компоненти јаке повезаности. Граф G се може "компресовати" и разматрати као усмерени ациклички граф који се састоји од својих компоненти јаке повезаности (слика 2.21, десно): сваки чвор у овом графу одговара једној компоненти јаке повезаности, а два чвора су повезана граном ако и само ако у полазном графу постоји грана између неког чвора једне компоненте и неког чвора друге компоненте. Јасно је да овај граф мора бити ациклички јер ако би у њему постојао циклус то би значило да се све компоненте које припадају циклусу могу спојити у једну већу компоненту повезаности.

Директан начин за одређивање компоненти јаке повезаности састојао би се у томе да се за први чвор v_0 одреди који чворови припадају његовој компоненти јаке повезаности, тако што би се за све преостале чворове проверавало да ли су обострано достижни из v_0 – то би могло да се уради DFS претрагом из чвора v_0 и из сваког новог чвора чија се припадност датој компоненти повезаности испитује. Након тога би се сличан процес понављао за наредни чвор који не припада компоненти јаке повезаности којој припада чвор v_0. Јасно је да би ово било веома неефикасно.



Слика 2.21: Граф G и усмерени ациклички граф који се састоји од компоненти јаке повезаности графа G.

Постоји неколико различитих алгоритама линеарне временске сложености за одређивање компоненти јаке повезаности у графу, а најпознатији међу њима су Тарџанов алгоритам и Косарацуов алгоритам. Оба алгоритма су заснована на DFS обиласку графа, само се код првог све ради у једном пролазу, док се у другом два пута позива алгоритам DFS обиласка графа.

Тарџанов алгоритам

Приликом DFS обиласка датог усмереног графа G имплицитно се формира DFS дрво, односно шума. Без нарушавања општости можемо претпоставити да је граф такав да постоји чвор из ког се он може у потпуности обићи односно да има DFS дрво (уколико то није случај покренућемо DFS обилазак онолико пута колико је потребно да бисмо обишли цео граф). Назовимо *базним чвором* неке компоненте јаке повезаности онај чвор те компоненте који има најмању вредност долазне нумерације.

Лема: Нека је b базни чвор јаке компоненте X. Тада за свако $v \in X$ важи да је v потомак чвора b у односу на DFS дрво и сви чворови на путу од b до v припадају компоненти X.

Доказ: Докажимо најпре прво тврђење. Нека је v произвољни чвор из X различит од b. Важи да је (a) v потомак чвора b, (b) b потомак чвора v или (c) ниједно од ова два. Случај (b) није могућ јер ако би чвор b био потомак чвора v онда би он имао већу вредност долазне нумерације од v што је у супротности са претпоставком леме.

Претпоставимо да важи (c). Пут од чвора b до чвора v мора да постоји јер ова два чвора припадају истој компоненти јаке повезаности. Размотримо један такав пут p и нека је r најближи заједнички предак свих чворова на том путу. Чвор r мора припадати том путу p, а чворови b и v морају бити потомци различите деце чвора r. Означимо са T_b поддрво са кореном у чвору b, а са T_v поддрво са кореном у чвору v. С обзиром на то да је вредност долазне нумерације чвора b мања од вредности чвора v и с обзиром на то да су T_v и T_b дисјунктна дрвета, не може постојати грана ни од једног чвора из T_b ка неком чвору из T_v. Стога је једини пут од b до v кроз чвор r. Међутим, с обзиром на то да је r предак чвора b он има мању вредност долазне нумерације од чвора b а припада истој компоненти јаке повезаности јер постоји пут од b до r, а и од r до b кроз

гране дрвета. Ово је у супротности са претпоставком да је b базни чвор те компоненте, па случај (c) није могућ. Стога важи да је чвор v потомак чвора b.

Доказ другог дела леме је једноставан. Нека је x чвор на путу од v до b. Постоји пут од b до x кроз гране DFS дрвета, а такође и пут од x до b тако што прво идемо од x до v, па од v до b. Стога је x у истој компоненти јаке повезаности као и чвор b.

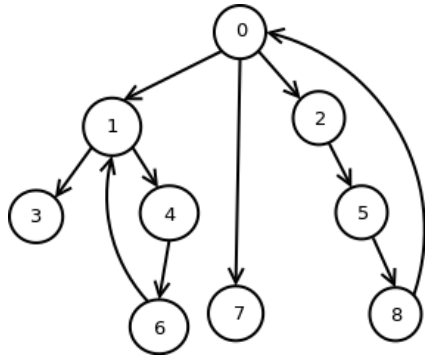
Лема: Нека је b базни чвор и нека су $b_1, b_2, \ldots b_k$ базни чворови који су потомци чвора b. Тада важи да је јака компонента којој припада чвор b скуп свих потомака чвора b који нису потомци ниједног другог чвора $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Претпоставимо супротно, односно да постоји чвор v који је у истој јакој компоненти као и b и који је потомак и чвора b и чвора b_i за неко i, $1 \leq i \leq k$. Мора да постоји пут од v до b, а такође и пут од чвора b преко чвора b_i до чвора v (који се састоји од грана DFS дрвета). Одавде следи да су b и b_i у истој јакој компоненти што је у супротности са претпоставком.

Лема: Чвор v је базни чвор ако и само ако важи $v.Pre = v.minPre$.

Да бисмо издвојили чворове који припадају поддрвету са кореном у датом базном чвору, можемо искористити стек на који ћемо стављати чвор приликом прве посете током DFS обиласка графа. Када током обиласка наиђемо на чвор који се већ налази на стеку, знамо да ће једној компоненти повезаности припадати сви чворови који се налазе на стеку почев од тог чвора. Попречне гране неће бити разматране јер када стигнемо до чвора који је већ посећен, вршимо обраду само ако се он налази на стеку (што неће бити случај са крајњим чвором попречне гране).

Размотримо извршавање алгоритма на примеру графа приказаног на слици 2.22.



Слика 2.22: Пример графа чије су компоненте јаке повезаности $\{3\}$, $\{8\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{0, 2, 5, 8\}$.

```
стек: 0

стек: 0,1

стек: 0,1,3
завршава се рекурзивни позив из чвора 3 и
```

```
с обзиром на то да за чвор 3 важи услов v.Pre=v.minPre=3
са стека скидамо само чвор 3 и он представља засебну компоненту

стек: 0,1

стек: 0,1,4

стек: 0,1,4,6
завршава се рекурзивни позив из чвора 6, али за њега је v.Pre=5, а
v.minPre=2 па он није базни чвор компоненте

завршава се рекурзивни позив из чвора 4, али за њега је v.Pre=4, а
v.minPre=2 па он није базни чвор компоненте

завршава се рекурзивни позив из чвора 1 и
с обзиром на то да за чвор 1 важи услов v.Pre=v.minPre=2
са стека скидамо све чворове до чвора 1, дакле чворове 6,4,1
и они представљају засебну компоненту

стек: 0

стек: 0,7
завршава се рекурзивни позив из чвора 7 и
с обзиром на то да за чвор 7 важи услов v.Pre=v.minPre=6
са стека скидамо чвор 7 и он представља засебну компоненту

стек: 0

стек: 0,2

стек: 0,2,5

стек: 0,2,5,8
завршава се рекурзивни позив из чвора 8, али за њега је v.Pre=9, а
v.minPre=1 па он није базни чвор компоненте

завршава се рекурзивни позив из чвора 5, али за њега је v.Pre=8, а
v.minPre=1 па он није базни чвор компоненте

завршава се рекурзивни позив из чвора 2, али за њега је v.Pre=7, а
v.minPre=1 па он није базни чвор компоненте

завршава се рекурзивни позив из чвора 0 и
с обзиром на то да за чвор 0 важи услов v.Pre=v.minPre=1
са стека скидамо све чворове до чвора 0, дакле чворове 8,5,2,0
и они представљају засебну компоненту
```

Овај алгоритам је заснован на DFS обиласку графа и сложености је $O(|V| + |E|)$.

Косарацуов алгоритам

У Косарацуовом алгоритму за одређивање компоненти јаке повезаности графа G користи се транспоновани граф $G^T = (V, E^T)$ графа G. Граф G^T добија се усмеравањем свих грана графа G у супротном смеру, $E^T = \{(u, v)|(v, u) \in E\}$. Може се уочити да графови G и G^T имају исте компоненте јаке повезаности: два чвора су обострано достижна у G ако и само ако су обострано достижна у G^T.

За сваки чвор у графу $v \in V$ дефинишемо *време отварања* $v.d$ и *време затварања* $v.f$ чвора. Постоји посебни бројач који одговара времену, који пре покретања има вредност 0, а инкрементира се сваки пут када се:

- покрене рекурзивни позив из неког чвора $w \in V$; његова вредност се тада уписује у $w.d$
- заврши рекурзивни позив из неког чвора $w \in V$; његова вредност се тада уписује у $w.f$

Косарацуов алгоритам за одређивање компоненти јаке повезаности графа $G = (V, E)$ састоји се из наредних корака:

1. покренути DFS(G) да би се одредиле вредности $u.f$ за све чворове $u \in V$
2. одредити граф G^T
3. покренути DFS(G^T), при чему се у основној петљи DFS обиласка чворови разматрају редом који одговара опадајућим вредностима $u.f$
4. излистати чворове сваког дрвета DFS шуме као јаке компоненте повезаности

Напоменимо да редослед према опадајућим вредностима $u.f$ одговара редоследу према опадајућим вредностима DFS одлазне нумерације. Очигледно је сложеност овог алгоритма $O(|V| + |E|)$ јер потиче од сложености обиласка графа.

Доказ коректности алгоритма заснива се на особинама графа G^{SCC} који за сваку компоненту јаке повезаности садржи по један чвор, док грана између два чвора постоји ако и само ако постоји грана између нека два чвора те две компоненте. Овај граф је нужно ациклички. Докажимо то.

Лема: Нека су C и C' две различите компоненте јаке повезаности усмереног графа $G = (V, E)$, нека $u, v \in C, u', v' \in C$ и претпоставимо да у G постоји пут од u до u'. Тада у G не може да постоји пут од v' до v.

Доказ: Ако би у G постојао пут од v' до v, онда би постојали путеви од u до v' и од v' до u, тј. u и v' припадали би истој компоненти јаке повезаности, супротно претпоставци.

Покажимо сада да се разматрањем чворова у другој претрази редом према опадајућим временима затварања чворова постиже тополошко сортирање графа сачињеног од јаких компоненти повезаности.

Да се избегне забуна, времена $u.d$ и $u.f$ односе се на прву DFS претрагу у Косарацуовом алгоритму. Појмове времена отварања и времена затварања уопштићемо на скупове чворова: за скуп $U \subset V$ дефинишемо $d(U) = \min_{u \in U} u.d$, $f(U) = \max_{u \in U} u.f$. Другим речима, $d(U)$, односно $f(U)$, представљају прво време отварања, односно последње време затварања неког чвора из скупа чворова U.

Наредна лема повезује компоненте јаке повезаности графа и времена затварања чворова у току прве DFS претраге.

Лема: Нека су C и C' различите компоненте јаке повезаности графа $G = (V, E)$. Претпоставимо да постоји грана $(u, v) \in E$ таква да је $u \in C, v \in C'$. Тада је $f(C) > f(C')$.

Доказ: Размотримо два случаја у односу на то да ли се први отворени чвор налази у C или у C'.

- случај $d(C) < d(C')$: нека је x чвор који је први отворен у C. У тренутку $x.d$ сви чворови у C и C' су неозначени. У том тренутку у G постоји пут од x до свих чворова у C преко непосећених чворова. Пошто постоји грана $(u, v) \in E$, за сваки чвор $w \in C'$ постоји пут од x до w (преко u и v). Може се показати да онда важи да су сви чворови у C и C' потомци чвора x у DFS шуми графа. Због тога се претрага из x последња завршава, односно важи $x.f = f(C) > f(C')$.
- случај $d(C) > d(C')$: нека је y чвор који је први отворен у C'. У тренутку $y.d$ сви чворови у C' су непосећени и у G постоје путеви преко непосећених чворова до свих чворова у C'. Може се показати да су сви чворови у C' потомци чвора y у DFS дрвету, па је y последњи затворени чвор у C', односно $y.f = f(C')$. У тренутку $y.d$ сви чворови у C су непосећени. Због тога што постоји грана (u, v) из C у C', не може да постоји пут из C' у C, тј. ниједан чвор у C није достижан из y. Према томе, у тренутку $y.f$ сви чворови у C су још увек непосећени. Због тога је за сваки чвор $w \in C$ $w.f > y.f$, па је $f(C) > f(C')$.

Наредна лема тврди да свака грана из G^T која повезује различите компоненте јаке повезаности иде од компоненте са мањим временом затварања ка компоненти са већим временом затварања.

Последица: Нека су C и C' различите компоненте јаке повезаности усмереног графа $G = (V, E)$. Претпоставимо да постоји грана $(u, v) \in E^T$, где је $u \in C, v \in C'$. Тада је $f(C) < f(C')$.

Ова последица је кључна за разумевање зашто овај алгоритам ради коректно. Размотримо другу DFS претрагу примењену на граф G^T. Почиње се са јаком компонентом C са највећим временом затварања $f(C)$. Претрага почиње од неког чвора x и означава све чворове у C. На основу последице у графу G^T не може да постоји грана ка некој другој компоненти јаке повезаности. Према томе, DFS дрво са кореном у x садржи тачно чворове из скупа C. Пошто су означени сви чворови из C, претрага се наставља из неке друге јаке компоненте C', са највећим временом завршетка од свих компоненти различитих од C. Поново, та претрага означава све чворове из C'; међутим, према наведеној последици, из компоненте C' грана може да води само ка неком чвору у компоненти C, који је у том тренутку већ означен. Према томе, свако DFS дрво обухвата тачно једну компоненту; гране из те компоненте могу да воде само ка компонентама које су већ означене. Тиме је показана коректност овог алгоритма.

Теорема: Косарајуов алгоритам одређује компоненте јаке повезаности графа G.

Друга DFS претрага постаје јаснија ако се схвати као DFS обилазак графа компоненти $(G^T)^{SCC}$ графа G^T. Ако сваку компоненту посећену у току друге DFS претраге пресликамо у чвор графа $(G^T)^{SCC}$, друга DFS претрага означава чворове $(G^T)^{SCC}$

редоследом обрнутим од тополошког редоследа. Ако се обрну гране графа $(G^T)^{SCC}$, добија се граф $((G^T)^{SCC})^T$ који је једнак G^{SCC} (ово је потребно доказати), па друга DFS претрага пролази чворове G^{SCC} тополошких редоследом.

Задатак: Да ли је граф јако повезан

Поставка: За дати усмерени повезани граф проверити да ли је јако повезан. За граф се каже да је јако повезан уколико се у њему постоји пут из сваког чвора у сваки чвор.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају гране графа (чворове који су повезани у графу).

Излаз: На стандардни излаз исписати "DA" уколико је граф јако повезан а "NE" у супротном.

Пример

Улаз	*Излаз*

`4 3`
 	
`0 1`
`1 2`
`2 3`
	`NE`

Решење: Једно решење би могло да буде Косарајуовим алгоритмом за проверу да ли је граф јако повезан.

Друга идеја би могла да буде следећа: Из сваког чвора се покреће DFS обилазак графа и броје се чворови који су посећени. Ако су посећени сви чворови из сваког од чворова граф јесте јако повезан, иначе чим установимо да из неког чвора не можемо доћи до свих осталих чворова значи да граф није јако повезан и то и пријављујемо.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g,
              const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list,
              const std::vector<bool> &visited,
              int num_of_nodes)
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.V = num_of_nodes;
```

```
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
}

void DFS(Graph &g, int u)
{
  g.visited[u] = true;

  for (int node : g.adjacency_list[u])
    if (!g.visited[node])
      DFS(g, node);
}

Graph reverse_edges(const Graph &g)
{
  Graph tmp_graph;

  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;

  visited.resize(g.V, false);

  adjacency_list.resize(g.V);

  initialize_graph(tmp_graph, adjacency_list, visited, g.V);

  for (int i = 0; i < g.V; i++)
    for (int u : g.adjacency_list[i])
      add_edge(tmp_graph, u, i);

  return tmp_graph;
}

int count_unvisited_nodes(const Graph &g)
{
  return std::count_if(g.visited.begin(), g.visited.end(),
               [](bool visited){ return visited == false; });
}

// Kosaraju's algorithm
bool is_strongly_connected(Graph &g)
{
  DFS(g, 0);
```

```
  if (count_unvisited_nodes(g) > 0)
    return false;

  Graph tmp_graph = reverse_edges(g);

  DFS(tmp_graph, 0);

  if (count_unvisited_nodes(tmp_graph) > 0)
    return false;

  return true;
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, n);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  std::cout << (is_strongly_connected(g) ? "DA\n" : "NE\n");

  return 0;
}
```

Задатак: Компоненте јаке повезаности

Поставка: За дати усмерени повезани граф одредити све његове компоненте јаке повезаности. Компонента јаке повезаности усмереног графа је подграф за који важи да је јако повезан, односно да постоји пут између свака 2 чвора.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају гране графа (чворове који су повезани у графу).

Излаз: На стандардни излаз у посебним редовима исписати компоненте јаке повезаности графа у растућем поретку (прво се исписује компонента чији је чвор са најмањим индексом најмањи, тј. компонента која садржи чвор 0). Чворови унутар сваке компоненте повезаности такође треба да буду у растућем поретку.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 4 0 1 1 2 2 0 3 0	0 1 2 3

Решење: Једно решење би могло да буде Тарџановим алгоритмом за одређивање компненти јаке повезаности. Свака компонента ће бити представљена скупом како би вредности унутар ње биле сортиране. На крају је још потребно сортирати низ компоненти како би излаз одговарао условима задатка.

Друга идеја би могла да буде следећа: Из сваког чвора се покреће DFS обилазак графа и памте се чворови до којих је могуће доћи. Након тога за сваки чвор u радимо следеће: Пролазимо кроз све чворове до којих се може доћи из чвора u и за сваки од њих проверавамо да ли из њега може да се дође до u. Ако може то значи да оба чвора припадају истој компоненти јаке повезаности (јер је из u могуће доћи до v и из v је могуће доћи до u). Свака компонента ће бити представљена скупом како би вредности унутар ње биле сортиране. На крају је још потребно сортирати низ компоненти како би излаз одговарао условима задатка.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <stack>
#include <algorithm>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<int> times;
  std::vector<int> lower_times;
  std::vector<int> in_stack;
  std::stack<int> nodes_order;
  std::vector<bool> visited;
  int time;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g,
              const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list,
```

```
                const std::vector<int> &times,
                const std::vector<int> &lower_times,
                const std::vector<int> &in_stack,
                        const std::stack<int> &nodes_order,
                const std::vector<bool> &visited,
                int time, int V)
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.times = times;
  g.lower_times = lower_times;
  g.in_stack = in_stack;
  g.nodes_order = nodes_order;
  g.visited = visited;
  g.time = time;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
}

void DFS(Graph &g, int u, std::vector<std::set<int>> &components)
{
  g.visited[u] = true;

  g.times[u] = g.lower_times[u] = g.time;

  g.time++;

  g.nodes_order.push(u);

  g.in_stack[u] = true;

  for (int node : g.adjacency_list[u]) {
    if (g.times[node] == -1) {
      DFS(g, node, components);

      g.lower_times[u] = std::min(g.lower_times[u], g.lower_times[node]);
    }
    else if (g.in_stack[node]) {
      g.lower_times[u] = std::min(g.lower_times[u], g.times[node]);
    }
  }

  if (g.times[u] == g.lower_times[u]) {
    int node_in_component;
```

```
    components.push_back({});
    while (1) {
      node_in_component = g.nodes_order.top();
      components.back().insert(node_in_component);
      g.in_stack[node_in_component] = false;
      g.nodes_order.pop();
      if (node_in_component == u) {
        break;
      }
    }
  }
}

void strongly_connected_components(Graph &g)
{
  std::vector<std::set<int>> components;

  for (int u = 0; u < g.V; u++) {
    if (!g.visited[u]) {
      DFS(g, u, components);
    }
  }

  std::sort(components.begin(), components.end());

  for (auto &s : components) {
    for (int node : s) {
      std::cout << node << " ";
    }
    std::cout << "\n";
  }
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<int> times;
  std::vector<int> lower_times;
  std::vector<int> in_stack;
  std::stack<int> nodes_order;
  std::vector<bool> visited;

  int time;

  std::cin >> n >> m;
```

```
  adjacency_list.resize(n);

  time = 0;

  times.resize(n, -1);

  lower_times.resize(n, -1);

  in_stack.resize(n, false);

  visited.resize(n, false);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, times, lower_times,
           in_stack, nodes_order, visited, time, n);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  strongly_connected_components(g);

  return 0;
}
```

Упаривање у графу

За задати неусмерени граф $G = (V, E)$ **упаривање** је скуп дисјунктних грана (грана без заједничких чворова). Ово име потиче од чињенице да се гране могу схватити као парови чворова. Битно је да сваки чвор припада највише једној грани. Чвор који није суседан ниједној грани из упаривања зове се *неупарени* чвор; каже се такође да чвор не припада упаривању. **Савршено упаривање** је упаривање у коме су сви чворови упарени. **Оптимално упаривање** је упаривање са максималним бројем грана. **Максимално упаривање** је пак упаривање које се не може проширити додавањем нове гране.

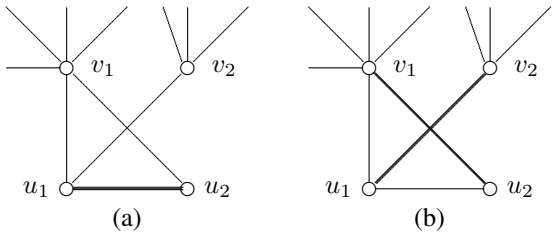
Проблеми који се своде на проблем упаривања у графу јављају се у многим сиутацијама. На пример, могу су упаривати радници са радним местима, групе студената са учионицама, студенти са факултетима и слично.

Проблем налажења оптималног упаривања за произвољни граф је тежак проблем, али постоје неке класе графова за које овај проблем није тако тежак.

Савршено упаривање у врло густим графовима

Нека је $G = (V, E)$ неусмерени граф код кога је $|V| = 2n$ и степен сваког чвора је бар n. Приказаћемо алгоритам за налажење савршеног упаривања у оваквим графовима. Последица овог алгоритма је да ако граф задовољав наведене услове, онда у њему увек постоји савршено упаривање. Користићемо индукцију по величини m упаривања. Базни случај $m = 1$ решава се формирањем упаривања величине један од произвољне гране графа. Показаћемо да се произвољно упаривање које није савршено може проширити или додавањем једне гране или заменом једне гране двема новим гранама. У оба случаја величина упаривања се повећава за један.

Посматрајмо упаривање M са m грана у графу G, при чему је $m < n$. Најпре проверавамо све гране ван упаривања M да установимо да ли се нека од њих може додати у M. Ако пронађемо такву грану, проблем је решен — нађено је веће упаривање. У противном, M је максимално упаривање. Ако M није савршено упаривање, постоје бар два неупарена чвора v_1 и v_2. Из та два чвора по претпоставци излази укупно најмање $2n$ грана. Све те гране воде ка упареним чворовима (у противном би се у упаривање могла додати нова грана, супротно претпоставци да је оно максимално). Пошто у упаривању M има мање од n грана, а из v_1 и v_2 излази бар $2n$ грана, у упаривању M постоји грана (u_1, u_2) која је суседна са ("покрива") бар три гране из v_1 и v_2. Претпоставимо, без смањења општости, да су то гране (u_1, v_1), (u_1, v_2) и (u_2, v_1) (видети слику 2.23(a)). Лако је видети да се уклањањем гране (u_1, u_2) из упаривања M и додавањем двеју нових грана (u_1, v_2) и (u_2, v_1) добија веће упаривање (слика 2.23(b)).



Слика 2.23: Проширивање упаривања.

Показаћемо сада како се овај приступ може применити на други специјални случај проблема упаривања.

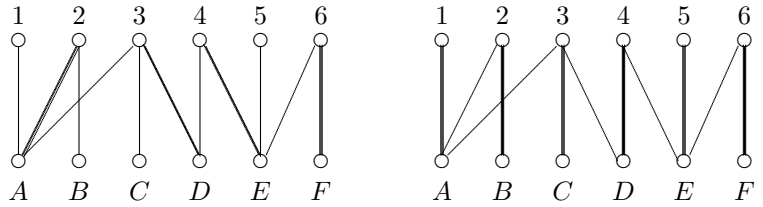
Бипартитно упаривање

Бипартитни граф је граф чији се чворови могу поделити на два дисјунктна подскупа тако да у графу постоје само гране између чворова из различитих поскупова.

Нека је $G = (V, E, U)$ бипартитни граф у коме су V и U дисјунктни скупови чворова, а E је скуп грана које повезују неке чворове из V са неким чворовима из U. Задатак је у овом графу одредити упаривање са максималним бројем грана. Један од начина да се формулише проблем је следећи: V је скуп девојака, U је скуп младића, а E је

скуп "потенцијалних" парова. Циљ је под овим условима оформити што већи број парова младића и девојака.

Директан приступ је формирати парове у складу са неком стратегијом, до тренутка када даља упаривања више нису могућа, у нади да ће нам стратегиха обезбедити оптимално или решење блиско оптималном. Може се, на пример, покушати са похлепним приступом, упарујући најпре чворове малог степена, у нади да ће преостали чворови и у каснијим фазама имати неупарене партнере. Другим речима, најпре упарујемо стидљиве особе, оне са мање познанстава, а о осталима бринемо касније. Уместо да се бавимо анализама оваквих стратегија (што није једноставан проблем), покушаћемо са приступом коришћеним код претходног проблема. Претпоставимо да се полази од максималног упаривања, које не мора бити оптимално. Можемо ли га некако поправити? Погледајмо пример на слици 2.24(a), на коме је упаривање приказано подебљаним гранама. Јасно је да се упаривање може повећати заменом гране $2A$ са две гране $1A$ и $2B$. Ово је трансформација слична оној коју смо применили у претходном проблему. Међутим, не морамо се ограничити заменама једне гране двема гранама. Ако пронађемо сличну ситуацију у којој се неких k грана могу заменити са $k+1$ грана, добијамо алгоритам већих могућности. На приемр, упаривање се може повећати заменом грана $3D$ и $4E$ са три гране $3C$, $4D$ и $5E$ (слика 2.24(b)).



Слика 2.24: Проширивање бипартитног упаривања.

Размотримо детаљније ове трансформације. Циљ је повећати број упарених чворова. Полазимо од неупареног чвора v и покзшавамо да га упаримо. Пошто полазимо од максималног упаривања, сви суседи чвора v су већ упарени; због тога смо принуђени да из упаривања уклонимо неку од грана које "покривају" суседе чвора v. Претпоставимо да смо изабрали чвор u, суседан са v, који је претходно био упарен са чвором w, на пример. Раскидамо упаривање чвора u са чвором w, и упарујемо чвор v са чвором u. Сада преостаје да пронађемо пара за чвор w. Ако је w повезан граном са неким неупареним чвором, онда смо постигли циљ; такав је био први од горњих случајева. Ако то није случај, онда настављамо даље са раскидањем парова и формирањем нових парова. Да бисмо на основу ове идеје конструисали алгоритам, потребно је да урадимо две ствари:

- да обезбедимо да се процедура увек завршава,
- да покажемо да ако је побољшање могуће, да ће га овако описана процедура сигурно пронаћи.

Најпре ћемо формализовати наведену идеју.

Алтернирајући пут (или **повећавајући пут**) P за дато упаривање M је пут од неупа-

реног чвора $v \in V$ до неупареног чвора $u \in U$, при чему су гране пута P наизменично у $E \setminus M$, односно M. Другим речима, прва грана (v, w) пута P не припада M (јер је v неупарен), друга грана (w, x) припада M, и тако даље до последње гране (z, u) пута P која не припада M. Запазимо да су управо алтернирајући путеви у горњим примерима омогућавали повећавање упаривања. Специјално, ако је пут дужине један, онда је то грана која повезује два неупарена чвора; такве гране не постоје у односу на максимално упаривање. Број грана на путу P мора бити непаран, јер P полази из V и завршава у U. Поред тога, међу гранама пута P грана у $E \setminus M$ има за једну више од грана у M. Према томе, ако из упаривања избацимо све гране P које су у M, а укључимо све гране P које су у $E \setminus M$, добићемо ново упаривање са једном граном више. На пример, први алтернирајући пут коришћен за повећавње упаривања на слици 2.24(а) је пут $(1A, A2, 2B)$, и он омогућује замену гране $A2$ гранама $1A$ и $2B$; други алтернирајући пут $(C3, 3D, D4, 4E, E5)$ омогућује замену грана $3D$ и $4E$ гранама $C3$, $D4$ и $E5$.

Јасно је да ако за дато упаривање M постоји алтернирајући пут, онда M није оптимално упаривање. Испоставља се да је тачно и обрнуто тврђење.

Теорема[Теорема о алтернирајућем путу (Бержова теорема)]: Упаривање је оптимално ако и само ако у односу на њега не постоји алтернирајући пут.

За доказ овог тврђења биће нам потребна наредна лема:

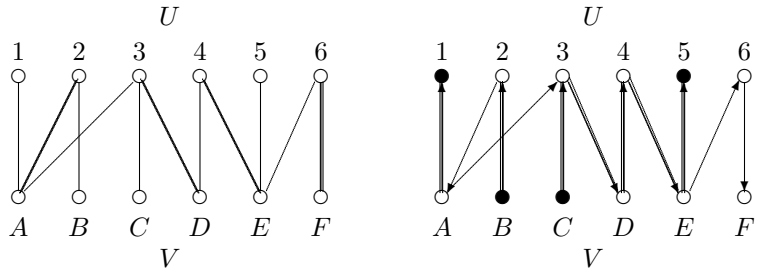
Лема: Нека је степен сваког чвора у датом графу највише 2. Тада је свака компонента повезаности тог графа или изоловани чвор или пут или циклус.

Доказ: Посматрајмо произвољни неизоловани чвор у графу. Сви његови суседи (којих може бити максимално два) имају такође максимални степен 2. Дакле компонента повезаности која садржи овај чвор је или пут или циклус.

Докажимо сада други смер горње теореме. Претпоставимо да упаривање M није оптимално, а да у графу у односу на њега не постоји алтернирајући пут. Нека је M' оптимално упаривање, односно M' је упаривање и важи $|M| < |M'|$. Размотримо граф са скупом грана $M \oplus M'$ – сваки чвор овог графа је степена највише 2 (јер ова два упаривања могу допринети степену сваког чвора максимално са 1). На овај граф се дакле може применити претходна лема, односно важи да је свака компонента повезаности изоловани чвор или пут или циклус. С обзиром на то да гране на сваком циклусу алтернирају у смислу припадности скуповима M и M', то значи да циклуси морају бити парне дужине. Дакле, M' може бити дуже од M једино посредством путева, с обзиром да циклуси отпадају као могућност. Дакле, постоји барем један пут из $M \oplus M'$ који има више грана из M' него из M, али такав пут је алтернирајући за дато упаривање M те је претпоставка да у односу на упаривање M не постоји алтернирајући пут нетачна. Дакле, упаривање мора бити оптимално, те смо доказали и други смер горње теореме.

Теорема о алтернирајућем путу директно сугерише алгоритам, јер произвољно упаривање које није оптимално има алтернирајући пут, а алтернирајући пут даје веће упаривање. Започињемо похлепним алгоритмом, додајући гране у упаривање све док је то могуће. Онда прелазимо на тражење алтернирајућих путева и повећавање упаривања, све до тренутка кад више нема алтернирајућих путева у односу на последње упаривање. Добијено упаривање је тада оптимално. Пошто алтернирајући пут повећава

упаривање за једну грану, а у упаривању има највише $n/2$ грана (где је n број чворова), број итерација је највише $n/2$. Преостаје још један проблем — како проналазити алтернирајуће путеве? Проблем се може решити на следећи начин. Трансформишемо неусмерени граф G у усмерени граф G' усмеравајући гране из M од U ка V, а гране из $E \setminus M$ од V ка U. На слици 2.25(а) приказано је полазно максимално упаривање за граф са слике 2.24(а), док је на слици 2.25(b) приказан одговарајући усмерени граф G'. Алтернирајући пут у G тада одговара усмереном путу од неупареног чвора у V до неупареног чвора у U у графу G'. Такав усмерени пут може се пронаћи било којим поступком обиласка графа, нпр. помоћу DFS. Сложеност претраге је $O(|V| + |E|)$, па је сложеност алгоритма $O(|V| \cdot (|V| + |E|))$.



Слика 2.25: Налажење алтернирајућих путева

Пошто комплетан обилазак графа у најгорем случају може да траје колико и налажење једног пута, може се покушати са налажењем више алтернирајућих путева једном претрагом. Потребно је, међутим, да будемо сигурни да су ови путеви независни, односно да њихови скупови чворова буду дисјунктни. Ако су путеви дисјунктни, онда они утичу на упаривање различитих чворова, па се могу истовремено искористити. Нови, побољшани алгоритам за налажење алтернирајућих путева би био следећи. Најпре, примењујемо BFS на граф G' од скупа неупарених чворова у V, слој по слој, до првог слоја k у коме су пронађени чворови из U. Затим из графа индукованог претрагом у ширину "вадимо" максимални скуп дисјунктних путева у G', којима одговарају алтернирајући путеви у G до неупарених чворова на нивоу k. То се изводи проналажењем првог пута, уклањањем његових чворова, проналажењем наредног пута, уклањањем његових чворова, итд (резултат није оптимални, него само максимални скуп оваквих путева). Бирамо максимални скуп, да бисмо после претраге добили што веће упаривање; сваки нови дисјунктни пут повећава упаривање за једну грану. На крају повећавамо упаривање коришћењем пронађеног скупа дисјунктних путева. Процес се наставља све док је могуће пронаћи алтернирајуће путеве, односно док је у графу G' неки неупарени чвор из V достижан из неког неупареног чвора из U.

Ако са M' означимо оптимално упаривање у графу G, број алтернирајућих путева који су међусобно дисјунктни по скуповима чворова једнак је $|M'| - |M|$.

Нека је l дужина најкраћег алтернирајућег пута. Сваки по чворовима дисјунктни алтернирајући пут има барем $l + 1$ чворова, и како је дужина најкраћег алтернирајућег пута једнака l, важи да је $(|M'| - |M|) \cdot (l + 1) \leq n$. Ову неједнакост можемо записати и на овај начин: $|M'| - |M| \leq \frac{n}{l+1}$ и на тај начин она даје горње ограничење укупног

могућег броја различитих путева за којима се трага у свакој итерацији петље.

Како се дужина најкраћег алтернирајућег пута повећава у свакој итерацији, то значи да ће након $\sqrt{n}$ итерација дужина најкраћег таквог пута бити барем $\sqrt{n}$, а применом последње неједнакости знамо да је укупан број преосталих (неистражених) најкраћих алтернирајућих путева $\frac{n}{\sqrt{n}+1} \leq \sqrt{n}$. Дакле, након ове итерације, чак и ако у свакој итерацији откривамо само по један алтернирајући пут, биће нам потребно још највише $\sqrt{n}$ итерација. Према томе, максимални број итерација петље једнак је $2\sqrt{n}$, односно износи $O(\sqrt{n})$. Укупна временска сложеност алгоритма је дакле $O((|V| + |E|)\sqrt{|V|})$. Овај алгоритам предложили су Хопкрофт и Карп 1973. године.

Оптимизација транспортне мреже

Проблем оптимизације транспортне мреже један је од основних проблема у теорији графова и комбинаторној оптимизацији. Проблем има много варијанти и уопштења, а основна варијанта проблема може се формулисати на наредни начин. Нека је $G = (V, E)$ усмерени граф са два посебно издвојена чвора: s - *извор* (енгл. source), са улазним степеном 0, и t – *понор* (енгл. sink) са излазним степеном 0. Свакој грани $e \in E$ придружена је позитивна тежина $c(e)$, *капацитет* гране e. Капацитет гране је мера тока који може бити пропуштен кроз грану. За овакав граф кажемо да је *транспортна мрежа* (или једноставније мрежа). *Ток* је функција f дефинисана на E која задовољава следеће услове:

1. $0 \leq f(e) \leq c(e)$: ток кроз произвољну грану не може да премаши њен капацитет;
2. за све чворове $v \in V \setminus \{s, t\}$ је $\sum_u f(u, v) = \sum_w f(v, w)$: укупан ток који улази у произвољни чвор v различит од s, t једнак је укупном току који излази из њега ("нестишљивост", закон очувања, односно конзервације тока).

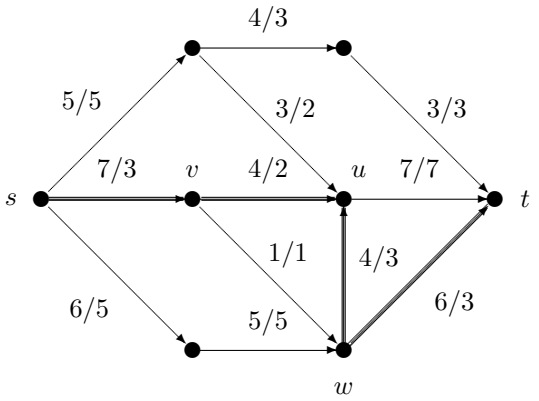
Ова два услова имају за последицу да је укупан ток који излази из s једнак укупном току који улази у t. У то се можемо уверити на следећи начин. Увешћемо најпре појам *пресека*. Нека је A произвољан подскуп скупа V такав да садржи s, а не садржи t. Означимо са $B = V \setminus A$ скуп преосталих чворова. Пресек одређен скупом A је скуп грана $(v, u) \in E$ таквих да $v \in A$ и $u \in B$. Интуитивно, пресек је скуп грана које раздвајају s од t. Индукцијом по броју чворова у A лако се показује да укупан ток кроз пресек не зависи од A. Специјално, за $A = \{s\}$ пресек обухвата гране које излазе из s, а за $A = V \setminus \{t\}$ пресек чине гране које улазе у t. Према томе, укупан ток који излази из s једнак је укупном току који улази у t. Проблем који нас занима је *максимизирање тока*. У случају кад су капацитети грана реални бројеви, није очигледно чак ни да максимални ток увек постоји; показаћемо да он увек постоји. Један начин да се описани проблем схвати као реалан физички проблем, је да замислимо да мрежу чине цеви за воду. Свака цев има свој капацитет, а услови које ток треба да задовољи су природни. Циљ је "протерати" кроз мрежу што већу количину воде у јединици времена.

Повећавајући пут у односу на задати ток f је усмерени пут од s до t, који се састоји

од грана из G, не обавезно у истом смеру; свака од тих грана (v, u) треба да задовољи тачно један од следећа два услова:

1. (v, u) има исти смер као и у G, и $f(v, u) < c(v, u)$. У том случају грана (v, u) је *директна грана*. Директна грана има капацитет већи од тока, па се кроз њу ток може повећати. Разлика $c(v, u) - f(v, u)$ зове се *слек* те гране.
2. (v, u) има супротан смер у G, и $f(u, v) > 0$. У овом случају грана (v, u) је *повратна грана*. Део тока из повратне гране може се "позајмити".

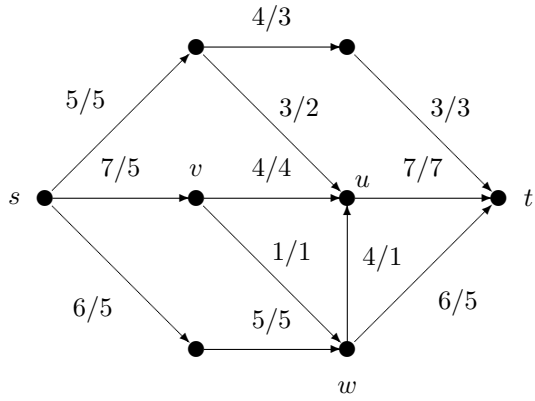
Повећавајући пут има исти смисао за транспортне мреже као алтернирајући пут за бипартитно упаривање. Ако постоји повећавајући пут у односу на ток f, онда f није оптимални ток. Ток f може се повећати повећавањем тока кроз повећавајући пут на следећи начин. Ако су све гране повећавајућег пута директне гране, онда се кроз њих може повећати ток, тако да сва ограничења и даље остану задовољена. Највеће могуће повећање тока је у овом случају тачно једнако минималном слеку међу гранама пута. Случај повратних грана је нешто сложенији, видети пример на слици 2.26. Свака грана означена је са два броја a/b, при чему је a капацитет, а b тренутни ток. Јасно је да се укупан ток не може директно повећати, јер не постоји пут од s до t који се састоји само од директних грана. Ипак, постоји начин да се укупан ток повећа.



Слика 2.26: Пример мреже са повећавајућим путем.

Пут $s - v - u - w - t$ је повећавајући пут. Допунски ток 2 може се спровести до u од s (2 је минимални слек на директним гранама до u). Ток 2 може се одузети (позајмити) од $f(w, u)$. Тиме се постиже задовољење услова (2) (закона очувања тока) за чвор u, јер је u имао повећање тока за 2 из повећавајућег пута, а затим смањење дотока за 2 из повратне гране. У чвору w је сада излазни ток смањен за 2, па га треба повећати кроз неку излазну грану. Са "протеривањем" тока може се наставити на исти начин од w, повећањем тока кроз директне гране и смањивањем тока кроз повратне гране. У овом случају постоји само још једна директна грана (w, t) која достиже t, и проблем је решен. Пошто само директне гране могу да излазе из s, односно да улазе у t, укупан ток је повећан. Повећање је једнако мањем од следећа два броја: минималног слека директних грана, односно минималног тока повратних грана. На слици 2.27 приказана је иста мрежа са промењеним током; испоставља се да је нови ток у ствари оптималан.

Дакле, важи да ако у мрежи постоји повећавајући пут, онда ток није оптималан. Обр-



Слика 2.27: Резултат повећања тока у мрежи са слике 2.26.

нуто је такође тачно.

Теорема(о повећавајућем путу): Ток кроз транспортну мрежу је оптималан ако и само ако у односу на њега не постоји повећавајући пут.

Доказ: Доказ у једном смеру смо већ видели — ако у мрежи постоји повећавајући пут, онда ток није оптимална. Претпоставимо сада да у односу на ток f не постоји ни један повећавајући пут, и докажимо да је тада f оптимални ток. За произвољни пресек (одређен скупом A, $s \in A, t \in B \equiv V \setminus A$) дефинишемо капацитет, као збир капацитета његових грана које воде из неког чвора скупа A у неки чвор скупа B. Јасно је да ни један ток не може бити већи од капацитета произвољног пресека. Заиста, укупан ток из s једнак је збиру токова кроз гране пресека од A ка B, умањеном за ток кроз гране пресека од B ка A, па је мањи или једнак од збира капацитета грана које воде од A ка B, односно од капацитета пресека. Према томе, ако пронађемо ток са вредношћу која је једнака капацитету неког пресека, онда је тај ток оптималан. Са доказом настављамо у том правцу: показаћемо да ако у односу на ток не постоји повећавајући пут, онда је укупан ток једнак капацитету неког пресека, па дакле оптимизован.

Нека је f ток у односу на који не постоји повећавајући пут. Нека је $A \subset V$ скуп чворова v таквих да у односу на ток f постоји повећавајући пут од s до v (прецизније, постоји пут од s до v такав да на њему за све директне гране e важи $f(e) < c(e)$, а за све повратне гране e' важи $f(e') > 0$). Јасно је да $s \in A$ и $t \notin A$, јер по претпоставци за f не постоји повећавајући пут. Према томе, A дефинише пресек. Тврдимо да за све гране (v, w) тог пресека важи $f(v, w) = c(v, w)$ ако је $v \in A$, $w \in B$ ("директне" гране), односно $f(v, w) = 0$ ако је $v \in B$, $w \in A$ ("повратне" гране). Заиста, у противном би директна грана (v, w) продужавала повећавајући пут до чвора $w \notin A$, супротно претпоставци да такав пут постоји само до чворова из A. Слично, повратна грана (v, w) продужавала би повећавајући пут до чвора $v \notin A$. Дакле, укупан ток једнак је капацитету пресека одређеног скупом A, па је ток f оптималан.

Доказали смо следећу важну теорему.

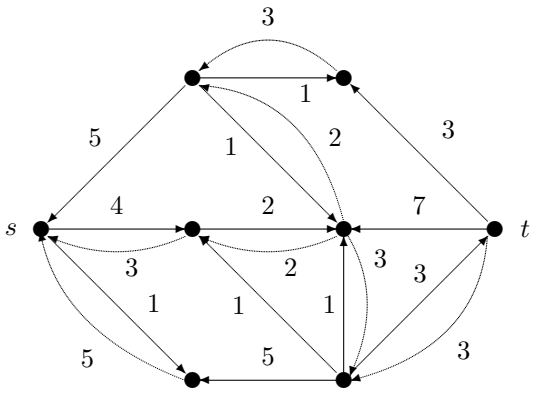
Теорема[о максималном току и минималном пресеку]: Оптимални ток у мрежи једнак је минималном капацитету пресека.

Теорема о повећавајућем путу има за последицу и следећу теорему.

Теорема[о целобројном току]: Ако су капацитети свих грана у мрежи целобројни, онда постоји оптимални ток са целобројном вредношћу.

Доказ: Тврђење је последица теореме о повећавајућем путу. Сваки алгоритам који користи само повећавајуће путеве доводи до целобројног тока ако су сви капацитети грана целобројни. Ово је очигледно, јер се може кренути од тока 0, а онда се укупан ток после сваке употребе повећавајућег пута повећава за цели број. До истог закључка долази се и на други начин: капацитет сваког пресека је целобројан, па и минималног.

Теорема о повећавајућем путу непосредно се трансформише у алгоритам. Полази се од тока 0, траже се повећавајући путеви, и на основу њих повећава се ток, све до тренутка кад повећавајући путеви више не постоје. Тражење повећавајућих путева може се извести на следећи начин. Дефинишемо *резидуални граф* у односу на мрежу $G = (V, E)$ и ток f, као мрежу $R = (V, F)$ са истим чворовима, истим извором и понором, али промењеним скупом грана и њихових тежина. Сваку грану $e = (v, w)$ са током $f(e)$ замењујемо са највише две гране $e' = (v, w)$ (ако је $f(e) < c(e)$; капацитет e' једнак је слеку гране e: $c(e') = c(e) - f(e)$), односно $e'' = (w, v)$ (ако је $f(e) > 0$; капацитет e'' је $c(e'') = f(e)$). Ако се на овај начин добијају две паралелне гране, замењују се једном, са капацитетом једнаком збиру капацитета паралелних грана. На слици 2.28 приказан је резидуални граф за мрежу са слике 2.26, у односу на ток задат на тој слици. Гране рездуалног графа одговарају могућим гранама повећавајућег пута. Њихови капацитети одговарају могућем повећању тока кроз те гране. Према томе, повећавајући пут је обичан усмерени пут од s до t у резидуалном графу. Конструкција резидуалног графа захтева $O(|E|)$ корака, јер се свака грана проверава тачно једном. Овај алгоритма назива се Форд-Фулкерсонов алгоритам.

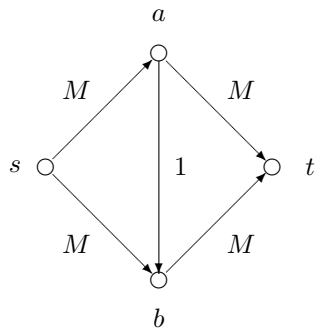


Слика 2.28: Резидуални граф мреже са слике 2.26 у односу на ток дефинисан на тој слици.

На несрећу, избор повећавајућег пута на произвољан начин може се показати врло неефикасним. Време извршавања таквог алгоритма у најгорем случају може да чак и не зависи од величине графа. Посматрајмо мрежу на слици 2.29. Оптимални ток је очигледно $2M$. Међутим, могли бисмо да кренемо од повећавајућег пута $s - a - b - t$ кроз који се ток може повећати само за 1. Затим бисмо могли да изаберемо

повећавајући пут $s - b - a - t$ који опет повећава ток само за 1. Процес може да се понови укупно $2M$ пута, где M може бити врло велико, без обзира што граф има само четири чвора и пет грана.

Приметимо да Форд-Фулкерсонов алгоритам не прецизира начин на који се долази до повећавајућег пута: њих можемо наћи коришћењем DFS или BFS претраге. Ако су сви капацитети у мрежи целобројни, онда се за сваки повећавајући пут ток кроз мрежу повећава барем за 1. Стога је сложеност Форд-Фулкерсоновог алгоритма $O(|E| \cdot T)$, где је са T означен максимални ток кроз мрежу. У случају рационалних вредности капацитета, алгоритам се зауставља, али сложеност није ограничена.



Слика 2.29: Пример мреже на којој тражење повећавајућих путева може бити неограничено неефикасно.

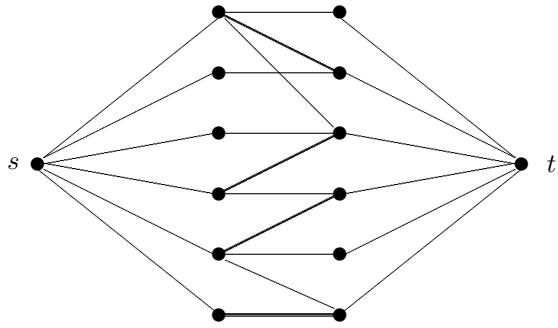
Горе наведена могућност је врло непожељна, али се може избећи. Едмондс и Карп су 1972. године показали да ако се међу могућим повећавајућим путевима увек бира онај са најмањим бројем грана, онда је број повећавања највише $O(|V| \cdot |E|)$, односно то води алгоритму који је у најгорем случају сложености $O(|V| \cdot |E|^2)$. Доказ се заснива на двема чињеницама.

У односу на резидуални граф, растојање сваког чвора од извора се никада не смањује током алгоритма, већ се може повећати (под растојањем се подразумева број грана на најкраћем путу). Приликом налажења повећавајућег пута, неким од грана су у потпуности искоришћени капацитети те се те гране више не налазе у резидуалном графу. Стога ако су неки најкраћи путеви користили ту грану, они су се потенцијално повећали.

Поред тога, приликом проналажења повећавајућег пута, бар једна грана на тому путу имаће у потпуности испуњен капацитет. Зваћемо такву грану *критичном*. Интересује нас колико пута једна грана (u, v) може бити критична. Након прве рунде, она нестаје из резидуалног графа, па ако је поново била критична морало је да се деси да је пронађен повећавајући пут кро грану (v, u). Међутим, с обзиром на то да увек тражимо најкраћи повећавајући пут, то значи да најкраћи пут до чвора u иде кроз чвор v. У првој рунди најкраћи пут је ишао кроз грану (u, v), односно важило је да је $d(v) \geq d(u) + 1$. Након тога, растојање чвора v се није смањило, па сада најкраћи пут до u има дужину бар за један већу од растојања чвора v које је било бар за 1 веће од претходне вредности $d(u)$. Стога се растојање чвора u повећало бар за 2.

На основу овога важи да ако је грана два пута била критична, то значи да се растојање њеног почетка од извора у међувремену повећало. Очигледно ово растојање није никада веће од $|V| - 1$, те с обзиром на то да се растојања не смањују, свака грана може постати критична највише $O(|V|)$ пута. Стога постоји највише $O(|V| \cdot |E|)$ тренутака када нека грана постаје критична, а важи да у свакој фази алгоритма бар једна грана постаје критична. Стога је број фаза највише $O(|V||E|)$, а свака траје $O(|E|)$.

Показаћемо сад да се проблем бипартитног упаривања може свести на проблем оптимизације мрежног протока. Задатом бипартитном графу $G = (V, E, U)$ у коме треба пронаћи упаривање са највећим могућим бројем грана (оптимално упаривање) додајемо два нова чвора s и t, повезујемо s гранама са свим чворовима из V, а све чворове из U повезујемо са t. Означимо добијени граф са G' (видети слику 2.30, на којој су све гране усмерене слева удесно). Пошто свим гранама доделимо капацитет 1, добијамо регуларан проблем оптимизације транпсортне мреже на графу G'. Нека је M неко упаривање у G. Упаривању M може се на природан начин придружити ток у G'. Додељујемо ток 1 свим гранама из M и свим гранама које s или t повезују са упареним чворовима. Свим осталим гранама додељујемо ток 0. Укупан ток једнак је тада броју грана у упаривању M.



Слика 2.30: Свођење бипартитног упаривања на оптимизацију транспортне мреже (све гране усмерене су слева удесно).

Може се показати да је M оптимално упаривање ако и само ако је одговарајући *целобројни* ток у G' оптималан. У једном смеру доказ је једноставан: ако је ток оптималан и одговара упаривању, онда се не може наћи веће упаривање, јер би му одговарао већи ток.

Докажимо сада и други смер. Јасно је да сваки алтернирајући пут у G одговара повећавајућем путу у G', о обрнуто. Ако је M оптимално упаривање, онда за њега не постоји алтернирајући пут, па у G' не постоји повећавајући пут, а одговарајући ток је оптималан.

Ако постоји оптимални целобројни ток, он мора да одговара упаривању, јер је сваки чвор у V повезан само једном граном (са капацитетом 1) са s; због тога, укупан ток кроз сваки чвор из V може да буде највише 1. Исто важи и за чворове из скупа U. Ово упаривање мора бити оптимално, јер ако би се могло повећати, онда би постојао већи укупни ток.

Задатак: Форд-Фулкерсон

Поставка: Нека усмерени граф G представља транспортну мрежу. За два задата чвора (извор и понор) одредити максимални ток кроз транспортну мрежу (од извора ка понору).

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају чворове који су повезани у графу. Након тога се уносе још 2 вредности које представљају извор и понор у графу.

Излаз: На стандардни излаз исписати максимални ток кроз мрежу од извора ка понору.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 5 0 1 40 0 3 20 1 3 20 1 2 30 2 3 10 0 3	50

Решење: Можемо искористити Форд-Фулкерсонов алгоритам за налажење максималног тока у транспортној мрежи представљеној усмереним графом.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <stack>
#include <numeric>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<std::vector<int>> capacities;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.parents = parents;
  g.capacities = capacities;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v, int capacity)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
  g.capacities[u][v] = capacity;
```

```
}

int DFS(Graph &g, int start_node, int end_node)
{
  int ret = 0;

  std::fill(g.parents.begin(),g.parents.end(), -1);

  std::stack<int> dfs_stek;

  std::stack<int> min_capacity;

  dfs_stek.push(start_node);

  min_capacity.push(std::numeric_limits<int>::max());

  int current_node, neighbor_node, capacity, n;

  while (!dfs_stek.empty()) {
    current_node = dfs_stek.top();
    capacity = min_capacity.top();

    dfs_stek.pop();
    min_capacity.pop();

    if (current_node == end_node) {
      ret = capacity;
      break;
    }

    n = g.adjacency_list[current_node].size();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
      neighbor_node = g.adjacency_list[current_node][i];

      if (g.capacities[current_node][neighbor_node] > 0 && g.parents[neighbor_node] == -1
        dfs_stek.push(neighbor_node);
        min_capacity.push(std::min(capacity, g.capacities[current_node][neighbor_node]));
        g.parents[neighbor_node] = current_node;
      }
    }
  }

  if (ret > 0) {
    current_node = end_node;

    while (current_node != start_node) {
      g.capacities[g.parents[current_node]][current_node] -= ret;
```

```
      g.capacities[current_node][g.parents[current_node]] += ret;
      current_node = g.parents[current_node];
    }
  }

  return ret;
}

long long unsigned ford_fulkerson(Graph &g, int start_node, int end_node)
{
  long long unsigned max_flow = 0, current_flow;

  while (true) {
    current_flow = DFS(g, start_node, end_node);

    if (current_flow == 0)
        break;
    max_flow += current_flow;
  }

    return max_flow;
}

int main()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<std::vector<int>> capacities;

  std::cin >> n >> m;

  adjacency_list.resize(n);

  parents.resize(n, -1);

  capacities.resize(n);

  for (auto &v : capacities)
    v.resize(n, 0);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, parents, capacities);

  int x, y, z;
```

```
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y >> z;
    add_edge(g, x, y, z);
  }

  std::cin >> x >> y;

  std::cout << ford_fulkerson(g, x, y) << "\n";

  return 0;
}
```

Задатак: Едмондс-Карп

Поставка: Нека усмерени граф G представља транспортну мрежу. За два задата чвора (извор и понор) одредити максимални ток кроз транспортну мрежу (од извора ка понору).

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају чворове који су повезани у графу. Након тога се уносе још 2 вредности које представљају извор и понор у графу.

Излаз: На стандардни излаз исписати максимални ток кроз мрежу од извора ка понору.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 5 0 1 40 0 3 20 1 3 20 1 2 30 2 3 10 0 3	50

Решење: Можемо искористити Едмондс-Карпов алгоритам за налажење максималног тока у транспортној мрежи представљеној усмереним графом.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <queue>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <numeric>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<int> parents;
```

```
  std::vector<std::vector<int>> capacities;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.parents = parents;
  g.capacities = capacities;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v, int capacity)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
  g.capacities[u][v] = capacity;
}

int BFS(Graph &g, int start_node, int end_node)
{
  int ret = 0;

  std::fill(g.parents.begin(),g.parents.end(), -1);

  std::queue<int> bfs_queue;
  std::queue<int> min_capacity;

  bfs_queue.push(start_node);
  min_capacity.push(std::numeric_limits<int>::max());

  int current_node, neighbor_node, capacity, n;

  while (!bfs_queue.empty()) {
    current_node = bfs_queue.front();
    capacity = min_capacity.front();

    bfs_queue.pop();
    min_capacity.pop();

    n = g.adjacency_list[current_node].size();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
      neighbor_node = g.adjacency_list[current_node][i];

      if (g.capacities[current_node][neighbor_node] > 0 && g.parents[neighbor_node]
        bfs_queue.push(neighbor_node);
        min_capacity.push(std::min(capacity, g.capacities[current_node][neighbor_no
        g.parents[neighbor_node] = current_node;
```

```
        if (neighbor_node == end_node) {
          ret = std::min(capacity, g.capacities[current_node][neighbor_node]);
          break;
        }
      }
    }
  }

  if (ret > 0) {
    current_node = end_node;

    while (current_node != start_node) {
        g.capacities[g.parents[current_node]][current_node] -= ret;
        g.capacities[current_node][g.parents[current_node]] += ret;
        current_node = g.parents[current_node];
    }
  }

  return ret;
}

int edmonds_karp(Graph &g, int start_node, int end_node)
{
    int max_flow = 0, current_flow;

  while (true) {
    current_flow = BFS(g, start_node, end_node);

    if (current_flow == 0)
        break;
    max_flow += current_flow;
  }

  return max_flow;
}

int main()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<std::vector<int>> capacities;

  std::cin >> n >> m;

  adjacency_list.resize(n);
```

```
  parents.resize(n, -1);

  capacities.resize(n);

  for (auto &v : capacities)
    v.resize(n, 0);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, parents, capacities);

  int x, y, z;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y >> z;
    add_edge(g, x, y, z);
  }

  std::cin >> x >> y;

  std::cout << edmonds_karp(g, x, y) << "\n";

  return 0;
}
```

Задатак: Професор Крстић

Поставка: Професор Крстић има двоје деце која се нажалост не воле. Проблем је толико озбиљан да не само да одбијају да заједно иду у школу већ не желе да прођу ниједним делом пута којим је друго дете тога дана прошло. Ипак, не смета им да им се путеви укрштају на углу. Срећом, професорова кућа и школа су на углу, али он није сигуран да ли је могуће да пошаље оба детета у исту школу. Професор има мапу свог града. Помозите професору да провери да ли може оба детета да пошаље у исту школу.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број раскрсница (n) и број улица (m) у граду. У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају раскрснице које су повезане улицама. На крају се уносе редни бројеви раскрсница на којима су кућа и школа (редом).

Излаз: На стандардни излаз исписати "DA" уколико професор може да пошаље оба детета у исту школу, односно "NE" уколико не може.

Пример

Улаз	*Излаз*
7 9 0 1 0 2 0 3 0 4 1 5 2 5 3 5 4 5 5 6 0 5	DA

Решење: Идеја би могла да буде да цео град представимо графом (транспортном мрежом). Капацитет сваке гране ставимо на 1. Покретањем Форд-Фулкерсеновог (Едмондс-Карповог) алгоритма за одређивање максималног тока између 2 чвора (кућа и школа) у графу добијамо заправо број путева између школе и куће. Уколико постоји више од једног пута професор може безбедно да пошаље децу у исту школу.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <stack>
#include <numeric>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<std::vector<int>> capacities;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list, cons
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.parents = parents;
  g.capacities = capacities;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v, int capacity)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
  g.capacities[u][v] = capacity;
}

int DFS(Graph &g, int start_node, int end_node)
{
```

```
int ret = 0;

std::fill(g.parents.begin(),g.parents.end(), -1);

std::stack<int> dfs_stek;

std::stack<int> min_capacity;

dfs_stek.push(start_node);

min_capacity.push(std::numeric_limits<int>::max());

int current_node, neighbor_node, capacity, n;

while (!dfs_stek.empty()) {
  current_node = dfs_stek.top();
  capacity = min_capacity.top();

  dfs_stek.pop();
  min_capacity.pop();

  if (current_node == end_node) {
    ret = capacity;
    break;
  }

  n = g.adjacency_list[current_node].size();
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    neighbor_node = g.adjacency_list[current_node][i];

    if (g.capacities[current_node][neighbor_node] > 0 && g.parents[neighbor_node]
      dfs_stek.push(neighbor_node);
      min_capacity.push(std::min(capacity, g.capacities[current_node][neighbor_no
      g.parents[neighbor_node] = current_node;
    }
  }
}

if (ret > 0) {
  current_node = end_node;

  while (current_node != start_node) {
    g.capacities[g.parents[current_node]][current_node] -= ret;
    g.capacities[current_node][g.parents[current_node]] += ret;
    current_node = g.parents[current_node];
  }
}
```

```
  return ret;
}

int ford_fulkerson(Graph &g, int start_node, int end_node)
{
  int max_flow = 0, current_flow;

  while (true) {
    current_flow = DFS(g, start_node, end_node);

    if (current_flow == 0)
        break;
    max_flow += current_flow;
  }

    return max_flow;
}

int main()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<std::vector<int>> capacities;

  std::cin >> n >> m;

  adjacency_list.resize(n);

  parents.resize(n, -1);

  capacities.resize(n);

  for (auto &v : capacities)
    v.resize(n, 0);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, parents, capacities);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y, 1);
  }
```

```
  std::cin >> x >> y;

  if (ford_fulkerson(g, x, y) > 1)
    std::cout << "DA\n";
  else
    std::cout << "NE\n";

  return 0;
}
```

Задатак: Да ли је пут јединствен

Поставка: Нека је дат усмерени граф G и његова 2 чвора u и v. Проверити да ли је пут од u до v јединствен.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају гране графа (чворове који су повезани у графу). На крају се уносе још 2 вредности које представљају чворове u и v.

Излаз: На стандардни излаз исписати "DA" уколико је пут од u до v јединствен а "NE" у супротном.

Пример

Улаз	*Излаз*
7 9 0 1 0 2 0 3 0 4 1 5 2 5 3 5 4 5 5 6 0 6	DA

Решење: Граф можемо посматрати као транспортну мрежу где је капацитет сваке гране 1. Покретањем Форд-Фулкерсеновог (Едмондс-Карповог) алгоритма за одређивање максималног тока између 2 чвора (кућа и школа) у графу добијамо заправо број путева између u и v.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <stack>
#include <numeric>
```

```
struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<std::vector<int>> capacities;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list, cons
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.parents = parents;
  g.capacities = capacities;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v, int capacity)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
  g.capacities[u][v] = capacity;
}

int DFS(Graph &g, int start_node, int end_node)
{
  int ret = 0;

  std::fill(g.parents.begin(),g.parents.end(), -1);

  std::stack<int> dfs_stek;

  std::stack<int> min_capacity;

  dfs_stek.push(start_node);

  min_capacity.push(std::numeric_limits<int>::max());

  int current_node, neighbor_node, capacity, n;

  while (!dfs_stek.empty()) {
    current_node = dfs_stek.top();
    capacity = min_capacity.top();

    dfs_stek.pop();
    min_capacity.pop();

    if (current_node == end_node) {
      ret = capacity;
      break;
    }
```

```
    n = g.adjacency_list[current_node].size();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
      neighbor_node = g.adjacency_list[current_node][i];

      if (g.capacities[current_node][neighbor_node] > 0 && g.parents[neighbor_node]
        dfs_stek.push(neighbor_node);
        min_capacity.push(std::min(capacity, g.capacities[current_node][neighbor_no
        g.parents[neighbor_node] = current_node;
      }
    }
  }

  if (ret > 0) {
    current_node = end_node;

    while (current_node != start_node) {
      g.capacities[g.parents[current_node]][current_node] -= ret;
      g.capacities[current_node][g.parents[current_node]] += ret;
      current_node = g.parents[current_node];
    }
  }

  return ret;
}

int ford_fulkerson(Graph &g, int start_node, int end_node)
{
  int max_flow = 0, current_flow;

  while (true) {
    current_flow = DFS(g, start_node, end_node);

    if (current_flow == 0)
        break;
    max_flow += current_flow;
  }

    return max_flow;
}

int main()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<int> parents;
  std::vector<std::vector<int>> capacities;
```

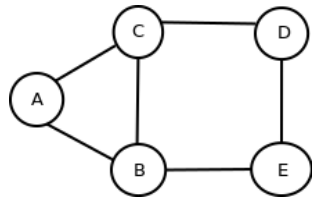
```
  std::cin >> n >> m;

  adjacency_list.resize(n);

  parents.resize(n, -1);

  capacities.resize(n);

  for (auto &v : capacities)
    v.resize(n, 0);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, parents, capacities);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y, 1);
  }

  std::cin >> x >> y;

  if (ford_fulkerson(g, x, y) == 1)
    std::cout << "DA\n";
  else
    std::cout << "NE\n";

  return 0;
}
```

Ојлерови путеви и циклуси

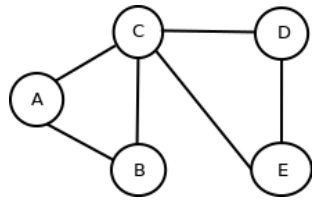
Ојлеров пут је пут у графу који пролази кроз сваку грану графа тачно једном. На пример, у графу приказаном на слици 2.31 постоји Ојлеров пут (C, D), (D, E), (E, B), (B, C), (C, A), (A, B).

Ојлеров циклус је Ојлеров пут чији се почетни и крајњи чвор поклапају. У претходном графу не постоји Ојлеров циклус, док у графу приказаном на слици 2.32 постоји Ојлеров циклус (C, D), (D, E), (E, C), (C, A), (A, B), (B, C).

Појам Ојлерових графова у вези је са, како се сматра, првим решеним проблемом теорије графова. Швајцарски математичар Леонард Ојлер наишао је на следећи задатак 1736. године. Град Кенигсбер, данас Калињинград, лежи на обалама и на два острва

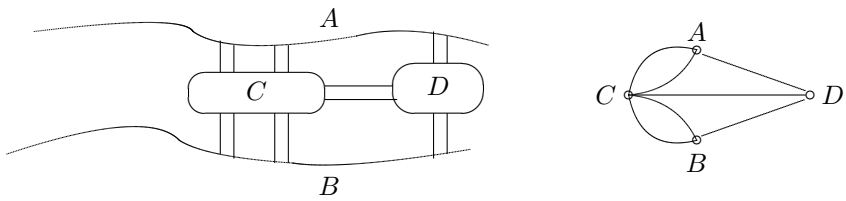


Слика 2.31: Граф који садржи Ојлеров пут, али не садржи Ојлеров циклус.



Слика 2.32: Граф који садржи Ојлеров циклус.

на реци Прегел, као што је приказано на слици 2.33. Град је повезан са седам мостова. Питање (које је мучило многе тадашње грађане Кенигсберга) било је да ли је могуће почети шетњу из било које тачке у граду и вратити се у полазну тачку, прелазећи при томе сваки мост тачно једном. Овај проблем се може еквивалентно формулисати као следећи проблем из теорије графова: да ли је могуће у повезаном графу пронаћи циклус, који сваку грану садржи тачно једном – *Ојлеров циклус*. Или: да ли је могуће нацртати граф са слике 2.33 не дижући оловку са папира, тако да оловка свој пут заврши на месту са кога је и кренула. Напоменимо да овај граф има вишеструке гране, па строго гледано по дефиницији није граф, већ мултиграф. Ојлер је решио проблем, доказавши да је овакав обилазак могућ ако и само ако је граф повезан и сви његови чворови имају паран степен. Такви графови зову се *Ојлерови графови*. Пошто "граф" на слици 2.33 има чворове непарног степена, закључујемо да проблем Кенигсбершких мостова нема решење.



Слика 2.33: Проблем Кенигсбершких мостова, и одговарајући мултиграф.

Дакле, важи да неусмерени граф има Ојлеров пут ако и само ако је повезан и важи један од наредних услова:

- степен сваког чвора је паран или
- степен тачно два чвора је непаран, а осталих чворова је паран.

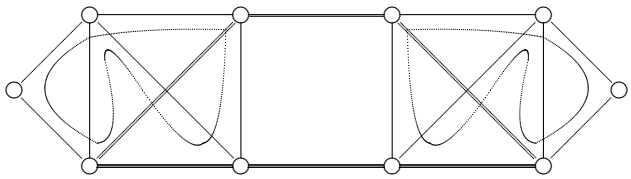
Ако важи прва ставка онда је сваки Ојлеров пут истовремено и Ојлеров циклус. Уколи-

ко важи друга ставка, чворови непарног степена су почетни и крајњи чвор Ојлеровог пута и у оваквом графу не постоји Ојлеров циклус. На пример, у графу са слике 2.31 једино су чворови B и C непарног степена (док су остали чворови парног степена) те ова два чвора представљају почетни и крајњи чвор Ојлеровог пута, а у њему не постоји Ојлеров циклус. Докажимо ово тврђење.

Проблем: У задатом неусмереном графу $G = (V, E)$ чији сви чворови имају паран степен, пронаћи затворени пут (циклус) P, такав да се у њему свака грана из E појављује тачно једном.

Лако је показати да ако у графу постоји Ојлеров циклус, онда сви чворови графа морају имати паран степен. За време обиласка циклуса, у сваки чвор се улази исто толико пута колико пута се из њега излази. Пошто се свака грана пролази тачно једном, број грана суседних произвољном чвору мора бити паран. Да бисмо индукцијом показали да је овај услов и довољан, морамо најпре да изаберемо параметар по коме ће бити изведена индукција. Тај избор треба да омогући смањивање проблема, без његове промене. Ако уклонимо чвор из графа, степени чворова у добијеном графу нису више сви парни. Требало би да уклонимо такав скуп грана S, да за сваки чвор v графа број грана из S суседних са v буде паран (макар и 0). Произвољан циклус задовољава овај услов, па се поставља питање да ли Ојлеров граф увек садржи циклус. Претпоставимо да смо започели обилазак графа из произвољног чвора v произвољним редоследом. Сигурно је да ће се током обиласка раније или каниј наићи на већ обиђени чвор, јер кад год уђемо у неки чвор, смањујемо његов степен за један, чинимо га непарним, па га увек можемо и напустити. Наравно, овакав обилазак не мора да садржи све гране графа. Дакле, важи да у сваком Ојлеровом графу мора постојати неки циклус.

Сада можемо да формулишемо и индуктивну хипотезу: повезани граф са $< m$ грана чији сви чворови имају паран степен, садржи Ојлеров циклус, који се може пронаћи. Докажимо сада теорему.



Слика 2.34: Пример конструкције Ојлеровог циклуса индукцијом. Пуном линијом извучене су гране помоћног циклуса. Избацивањем грана овог циклуса, добија се граф са две компоненте повезаности.

Посматрајмо граф $G = (V, E)$ са m грана. Нека је P неки циклус у G, и нека је G' граф добијен уклањањем грана које чине P из графа G. Степени свих чворова у G' су парни, јер је број уклоњених грана суседних било ком чвору паран. Ипак се индуктивна хипотеза не може применити на граф G', јер је он не мора бити повезан, видети пример на слици 2.34. Нека су G'_1, G'_2, …, G'_k компоненте повезаности графа G'. У свакој компоненти степени свих чворова су парни. Поред тога, број грана у свакој компоненти је мањи од m (њихов укупан број грана мањи је од m). Према томе, индуктивна хипотеза може се применити на све компоненте: у свакој компоненти G'_i постоји Ојлеров циклус P'_i, и ми знамо да га пронађемо. Потребно је сада све ово

циклусе објединити у један Ојлеров циклус за граф G. Полазимо из било ког чвора циклуса P ("магистралног пута") све док не дођемо до неког чвора v_j који припада компоненти G'_j. Тада обилазимо компоненту G'_j циклусом P'_j ("локалним путем") и враћамо се у чвор v_j. Настављајући на тај начин, обилазећи циклусе компоненти у тренутку наиласка на њих, на крају ћемо се вратити у полазну тачку. У том тренутку све гране графа G пронађене су тачно једном, што значи да је конструсан Ојлеров циклус. Овај доказ даје ефикасан алгоритам за налажење Ојлеровог циклуса у графу.

У усмереним графовима важи да постоји Ојлеров пут ако и само ако је граф повезан и важи један од наредних услова:

- улазни и излазни степени сваког чвора су међусобно једнаки или
- улазни степен већи је за један од излазног степена тачно једног чвора, излазни степен већи је за један од улазног степена тачно једног чвора, док су за све остале чворове улазни и излазни степен једнаки.

У првом случају, сваки Ојлеров пут је и и Ојлеров циклус, а у другом случају Ојлеров пут почиње у чвору чији је излазни степен већи за један, а завршава се у чвору чији је улазни степен већи за један.

Један ефикасан начин за конструисање Ојлеровог циклуса у Ојлеровом графу представља Хирхолцеров алгоритам, заснован на претходном доказу. Алгоритам се састоји из неколико етапа, при чему се у свакој етапи додају нове гране у циклус. Најпре се конструише неки циклус који не мора нужно да садржи све гране графа, а затим се он проширује додавањм нових циклуса у дати циклус. Поступак се зауставља када се све гране додају у циклус.

Циклус се проширује на следећи начин: проналази се чвор x који припада текућем циклусу али који има излазну грану која није укључена у циклус. Том граном се креће у откривање новог пута који се састоји искључиво од чворова који нису још у циклусу. Пут ће се пре или касније вратити у чвор x и тиме ће бити откривен нови циклус који додајемо у текући циклус.

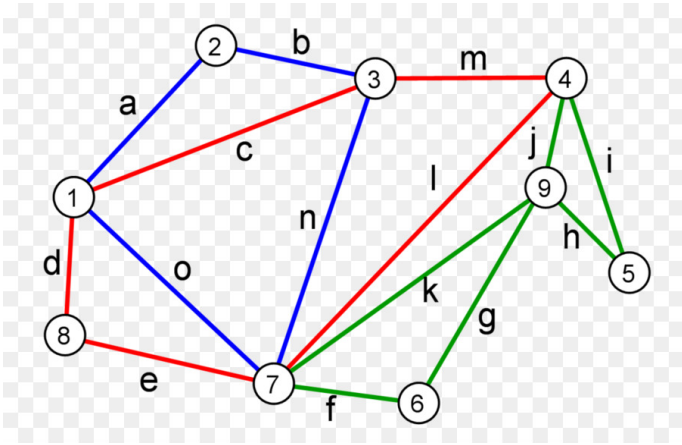
Ако граф садржи само Ојлеров пут, а не и Ојлеров циклус, може се искористити исти алгоритам тако што се у граф дода грана којом се постиже услов да граф има Ојлеров циклус, а онда се након проналаска Ојлеровом циклуса та грана уклања из циклуса. Овај алгоритам ради коректно и за усмерене и за неусмерене графове. Уколико је граф неусмерен, онда приликом брисања неке гране, треба обрисати обе њене копије: (u, v) i (v, u). Време извршавања оХирхолцеровог алгоритма је $O(|E|)$.

Други алгоритам за конструкцију Ојлеровог циклуса је Флеријев алгоритам…

Задатак: Да ли постоји пут или циклус неусмерени

Поставка: За задати неусмерени граф проверити да ли има Ојлеров пут, Ојлеров циклус или ниједно од та 2.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају гране графа (чворове који су повезани у графу).



Слика 2.35: Илустрација Хирхолцеровог алгоритма. Прво, на пример, идемо гранама a, b, n, o и враћамо се у чвор 1, након тога видимо да из чвора 1 постоји непосећена излазна грана ка чвору 3 па рецимо обилазимо циклус који чине гране c, m, l, e, d и враћамо се у чвор 1. Више нема непосећених грана суседних чвору 1 и враћамо се уназад и разматрамо редом чворове 8, 7 и видимо да из чвора 7 постоји циклус сачињен од грана k, j, i, h, g, f. Након тога, враћамо се уназад скупом чворова и добијамо Ојлеров циклус: $1, 8, 7, 6, 9, 5, 4, 9, 7, 4, 3, 1, 7, 3, 2, 1$.

Излаз: На стандардни излаз исписати 1 ако граф има Ојлеров пут, 2 ако има Ојлеров циклус или 0 ако нема ниједно ни друго.

Пример

Улаз	*Излаз*
`3 3`	`2`
`0 1`	
`1 2`	
`2 0`	

Решење: За неусмерени граф важи да има Ојлеров пут уколико су сви чворови степена већег од 0 повезани и ако тачно 2 чвора имају непаран степен. У неусмереном графу је збир степена свих чворова паран, тако да не може да се деси да имамо само један чвор чији је степен непаран. У неусмереном графу постоји Ојлеров циклус уколико су сви чворови степена већег од 0 повезани и ако су додатно сви чворови парног степена. Идеја решења задатака је одредити број чворова парног степена и одредити да ли су сви чворови чији степен није 0 повезани (DFS-ом нпр). Уколико су сви повезани, имамо 2 могућности. Уколико је број чворова непарног степена 2 онда имамо Ојлеров циклус, ако је 0 имамо Ојлеров циклус. Уколико је број оваквих чворова већи од 2 онда немамо ни пут ни циклус.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
```

```
struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> degrees;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.degrees = degrees;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);

  g.degrees[u]++;
  g.degrees[v]++;
}

void DFS(Graph &g, int u)
{
  g.visited[u] = true;

  for (int v : g.adjacency_list[u]) {
    if (!g.visited[v])
        DFS(g, v);
  }
}

int num_of_odd_vertices(const Graph &g)
{
  int count_odd = 0;

  for (int i = 0; i < g.V; i++)
    if (g.degrees[i] % 2)
      count_odd++;

  return count_odd;
}

bool is_connected(Graph &g)
```

```
{
  int start_node;

  for (int i = 0; i < g.V; i++)
    if (g.adjacency_list[i].size() > 0)
      start_node = i;

  DFS(g, start_node);

  for (int i = 0; i < g.V; i++)
    if (!g.visited[i] && g.degrees[i])
      return false;

  return true;
}

int is_eulerian(Graph &g)
{
  int count_odd = num_of_odd_vertices(g);

  if (count_odd > 2)
    return 0;

  if (!is_connected(g))
    return 0;

  return count_odd == 0 ? 2 : 1;
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> degrees;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  degrees.resize(n, 0);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, degrees, n);
```

```
  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  std::cout << is_eulerian(g) << "\n";

  return 0;
}
```

Задатак: Да ли постоји циклус усмерени

Поставка: За задати усмерени граф проверити да ли има Ојлеров циклус.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају гране графа (чворове који су повезани у графу).

Излаз: На стандардни излаз исписати 1 ако граф има Ојлеров циклус а 0 иначе.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 6 0 3 3 4 4 0 0 2 2 1 1 0	1

Решење: За усмерени граф важи да има Ојлеров циклус уколико сви чворови чији степен није 0 припадају истој компоненти јаке повезаности. За ово можемо употребити Косарајуов алгоритам. Други услов који мора да важи је да је улазни степен сваког чвора једнак излазном степену тог чвор. Улазне и излазне степене чворова једноставно можемо ажурирати приликом додавања грана у граф. Ако је грана од чвора u ка чвору v онда се повећава излазни степен чвора u и улазни степен чвора v.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> in_degrees;
  std::vector<int> out_degrees;
```

```
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list, cons
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.in_degrees = in_degrees;
  g.out_degrees = out_degrees;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);

  g.out_degrees[u]++;
  g.in_degrees[v]++;
}

void DFS(Graph &g, int u)
{
  g.visited[u] = true;

  for (int v : g.adjacency_list[u]) {
    if (!g.visited[v])
        DFS(g, v);
  }
}

Graph reverse_edges(const Graph &g)
{
  Graph tmp_graph;

  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> in_degrees;
  std::vector<int> out_degrees;

  visited.resize(g.V, false);

  adjacency_list.resize(g.V);

  initialize_graph(tmp_graph, adjacency_list, visited, g.V, g.out_degrees, g.in_degrees);

  for (int i = 0; i < g.V; i++)
    for (int u : g.adjacency_list[i])
```

```
      add_edge(tmp_graph, u, i);

  return tmp_graph;
}

int count_unvisited_nodes(const Graph &g)
{
    int counter = 0;

  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
    if(!g.visited[i] && (g.in_degrees[i] || g.out_degrees[i]))
        return counter++;
  }

  return counter;
}

// Kosaraju's algorithm
bool kosaraju(Graph &g)
{
  DFS(g, 0);

  if (count_unvisited_nodes(g) > 0) {
    return false;
  }

  Graph tmp_graph = reverse_edges(g);

  DFS(tmp_graph, 0);

  if (count_unvisited_nodes(tmp_graph) > 0) {
    return false;
  }

  return true;
}

int is_eulerian(Graph &g)
{
  if (kosaraju(g) == false)
    return false;

  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
    if ((size_t)g.in_degrees[i] != g.adjacency_list[i].size())
      return false;
  }
```

```
    return true;
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> in_degrees;
  std::vector<int> out_degrees;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  in_degrees.resize(n, 0);

  out_degrees.resize(n, 0);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, n, in_degrees, out_degrees);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  std::cout << is_eulerian(g) << "\n";

  return 0;
}
```

Задатак: Проналажење Ојлеровог циклуса неусмерени

Поставка: За дати неусмерени граф пронаћи Ојлеров циклус или пут уколико постоји.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају гране графа (чворове који су повезани у графу).

Излаз: На стандардни излаз исписати Ојлеров циклус или пут који почиње од чвора

са најмањим индексом (који улази у циклус) уколико постоји, а -1 иначе.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 3 0 1 0 2 1 2	0 1 2 0

Решење: Можемо искористити Флеријев (енг. Fleury) алгоритам за проналажење Ојлеорвог циклуса или пута у неусмереном графу.

Друга идеја би могла да буде да кренемо од чвора са најмањим индексом који припада Ојлеровом циклусу (парног степена већег од 0) или путу (један од 2 непарног степена већег од 0) и да покренемо DFS обилазак графа. Пров установимо да ли постоји циклус, пут или ниједно од та 2. Ако постоји циклус позиваом одговарајући DFS обилазак који је прилагођен да пронађе Ојлеров циклус, иначе позивамо одговарајући DFS за Ојлеров пут. Приликом обиласка графа сваку грану којом прођемо ћемо избацивати из графа (постављањем на -1 ако користимо листу повезаности или 0 ако користимо матрицу за репрезнетацију графа). Код Ојлеровог циклуса треба водити рачуна да ако покушавамо да се вратимо у почетни чвор преко једине гране која је преостала ка том чвору а то није уједно и последња грана графа НЕ СМЕМО ићи том граном, већ желимо да обиђемо остатак графа па тек онда да се вратимо том граном на крају. И код Ојлеровог пута треба бити опрезан и последњом граном графа ка циљном чвору (други непарног степена, не почетни) ићи само када је то последња преостала грана у гарфу.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <algorithm>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> degrees;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.degrees = degrees;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
```

```
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);

  g.degrees[u]++;
  g.degrees[v]++;
}

void DFS(Graph &g, int u)
{
  g.visited[u] = true;

  for (int v : g.adjacency_list[u]) {
    if (v != -1 && !g.visited[v])
        DFS(g, v);
  }
}

int num_of_odd_vertices(const Graph &g)
{
  int count_odd = 0;

  for (int i = 0; i < g.V; i++)
    if (g.degrees[i] % 2)
      count_odd++;

  return count_odd;
}

int find_node_with_odd_degree(const Graph &g)
{
  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
    if (g.degrees[i] % 2)
      return i;
  }

  return -1;
}

int find_node_with_even_degree(const Graph &g)
{
  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
    if (g.degrees[i] % 2 == 0 && g.degrees[i])
      return i;
  }

  return -1;
}
```

```
void remove_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  // Nalazimo gde se u listi povezanosti cvora u nalazi cvor v i na tu poziciju sta
  auto it_u = std::find(g.adjacency_list[u].begin(), g.adjacency_list[u].end(), v);
  *it_u = -1;

  // Nalazimo gde se u listi povezanosti cvora v nalazi cvor u i na tu poziciju sta
  auto it_v = std::find(g.adjacency_list[v].begin(), g.adjacency_list[v].end(), u);
  *it_v = -1;
}

bool is_valid_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  int count_edges = std::count_if(g.adjacency_list[u].begin(), g.adjacency_list[u].

  if (count_edges == 1)
    return true;

  remove_edge(g, u, v);

  std::fill(g.visited.begin(), g.visited.end(), false);

  DFS(g, u);

  g.adjacency_list[u].erase(std::find(g.adjacency_list[u].begin(), g.adjacency_list
  g.adjacency_list[v].erase(std::find(g.adjacency_list[v].begin(), g.adjacency_list
  add_edge(g, u, v);

  // Ako nismo posetili cvor v znaci da je grana u -> v bila most i da ne smemo da
  if (!g.visited[v]) {
    return false;
  }

  // Inace vracamo true, sto znaci da grana u -> v moze da bude izbacena
  return true;
}

void print_euler_path_or_cycle(Graph &g, int u, std::vector<int> &result)
{
  for (int v : g.adjacency_list[u]) {
    if (v != -1 && is_valid_edge(g, u, v)) {
        // Ako ne dodamo oba cvora odmah poslednji cvor nece biti dodat, zato ovde
        result.push_back(u);
        result.push_back(v);
      remove_edge(g, u, v);
      print_euler_path_or_cycle(g, v, result);
```

```
    }
  }
}

void print_path(std::vector<int> &path)
{
    auto pos = std::unique(path.begin(), path.end());
    path.resize(pos - path.begin());

    for (int x : path)
        std::cout << x << " ";
    std::cout << "\n";
}

void fleury(Graph &g)
{
  int count_odd = num_of_odd_vertices(g);
  int start_node;

  std::vector<int> result;

  if (count_odd == 0) {
    start_node = find_node_with_even_degree(g);
    print_euler_path_or_cycle(g, start_node, result);
    print_path(result);
  }
  else if (count_odd == 2) {
    start_node = find_node_with_odd_degree(g);
    print_euler_path_or_cycle(g, start_node, result);
    print_path(result);
  }
  else
    std::cout << "-1\n";
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> degrees;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);
```

```
  degrees.resize(n, 0);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, degrees, n);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  fleury(g);

  return 0;
}
```

Задатак: Проналажење Ојлеровог циклуса усмерени

Поставка: За дати усмерени граф пронаћи Ојлеров циклус уколико постоји.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају гране графа (чворове који су повезани у графу).

Излаз: На стандардни излаз исписати Ојлеров циклус који почиње од чвора са најмањим индексом (који улази у циклус) уколико постоји, а -1 иначе.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 4 0 1 1 2 2 3 3 0	0 1 2 3 0

Решење: Можемо искористити Хирхолцеров (енг. Hierholzer) алгоритам за проналажење Ојлеорвог циклуса у усмереном графу.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <stack>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
```

```
  std::vector<int> in_degrees;
  std::vector<int> out_degrees;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list, cons
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.in_degrees = in_degrees;
  g.out_degrees = out_degrees;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);

  g.out_degrees[u]++;
  g.in_degrees[v]++;
}

void DFS(Graph &g, int u)
{
  g.visited[u] = true;

  for (int v : g.adjacency_list[u]) {
    if (!g.visited[v])
        DFS(g, v);
  }
}

Graph reverse_edges(const Graph &g)
{
  Graph tmp_graph;

  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> in_degrees;
  std::vector<int> out_degrees;

  visited.resize(g.V, false);

  adjacency_list.resize(g.V);

  initialize_graph(tmp_graph, adjacency_list, visited, g.V, g.out_degrees, g.in_degrees);
```

```
  for (int i = 0; i < g.V; i++)
    for (int u : g.adjacency_list[i])
      add_edge(tmp_graph, u, i);

  return tmp_graph;
}

int count_unvisited_nodes(const Graph &g)
{
    int counter = 0;

  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
    if(!g.visited[i] && (g.in_degrees[i] || g.out_degrees[i]))
        return counter++;
  }

  return counter;
}

// Kosaraju's algorithm
bool kosaraju(Graph &g)
{
  DFS(g, 0);

  if (count_unvisited_nodes(g) > 0) {
    return false;
  }

  Graph tmp_graph = reverse_edges(g);

  DFS(tmp_graph, 0);

  if (count_unvisited_nodes(tmp_graph) > 0) {
    return false;
  }

  return true;
}

int is_eulerian(Graph &g)
{
  if (kosaraju(g) == false)
    return false;

  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
    if ((size_t)g.in_degrees[i] != g.adjacency_list[i].size())
      return false;
```

```
  }

    return true;
}

void hierholzer(Graph &g)
{
    if (!is_eulerian(g)) {
        std::cout << "-1\n";
        return ;
    }

    std::vector<int> result;
    std::stack<int> stack;

  stack.push(0);
  int v = 0;

  int tmp;

  while (stack.size()) {
    if (g.adjacency_list[v].size()) {

      stack.push(v);

      tmp = g.adjacency_list[v].front();
      g.adjacency_list[v].erase(g.adjacency_list[v].begin());

      v = tmp;
    }
    else {
      result.push_back(v);

      v = stack.top();
      stack.pop();
    }
  }

  int i;

  for (i = result.size() - 1; i >= 0; i--)
    std::cout << result[i] << " ";
  std::cout << "\n";
}

int main ()
{
```

```
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> in_degrees;
  std::vector<int> out_degrees;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  in_degrees.resize(n, 0);

  out_degrees.resize(n, 0);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, n, in_degrees, out_degrees);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  hierholzer(g);

  return 0;
}
```

Друга идеја би могла да буде да кренемо од чвора са најмањим индексом који припада Ојлеровом циклусу (парног степена већег од 0) да покренемо DFS обилазак графа. Прво проверимо да ли постоји циклус. Ако постоји покрећемо DFS претрагу из одговарајућег чвора и сваку грану кроз коју прођемо избацујемо из графа (постављањем на -1 ако користимо листу повезаности или 0 ако користимо матрицу за репрезнетацију графа). Сваки пут приликом избацивања гране ажурирамо и улазни и излазни степен одговарајућих чворова. Треба бити опрезан да ако желимо да идемо граном која нас води у полазни чвор и једина је преостала таква грана НЕ СМЕМО ићи њом осим уколико је то једина преостала грана у графу.

Задатак: Уланчавање речи

Поставка: Нека је дато n речи. Утврдити да ли је могуће уланчати све те речи тако што ће се на крај једне речи надовезивати почетак наредне (реч почиње истим словом којим се друга завршава). Циљ је вратити се у реч из које смо кренули. Може се

претпоставити да су све речи различите.

Улаз: Са стандарног улаза се прво уноси број речи (n). Након тога се у n редова уноси по 1 реч.

Излаз: На стандардни излаз исписати "DA" ако је речи могуће уланчати, а "NE" иначе.

Пример

Улаз	*Излаз*
3	DA
abba	
aabb	
bba	

Решење: Задатак може бити решен графовски. Потребно је направити усмерени граф од речи и то тако што ће почетна и крајња слова речи представљати чворове графа. Гране постоје између првог и последњег слова у свакој од речи. Дакле од речи $abcd$ формирамо 2 чвора a и d и једну грану $a - d$. У овако формираном графу је потребно проверити да ли постоји Ојлеров циклус.

Наивно решење би могло да буде помоћу претраге са одсецањем (енг. backtracking). Правимо комбинације свих речи али тако да иза неке речи могу да дођу само оне које почињу словом којим се претходна завршава. Тако да ако имамо речи $abcd$, $acdb$ и $dcba$ иза речи $abcd$ ћемо покушати да ставимо реч $dcba$ док ће реч $acdb$ испасти из разматрања јер не почиње одговарајућим словом. Овим добијамо одсецања. Све време пратимо да ли смо неку реч већ искористили јер не желимо да се враћамо у исту реч сем прве. Када на крају треба да се вратимо у почетну реч потребно је и проверити да ли смо све остале речи искористили.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>

#define MAX 26

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> in_degrees;
  std::vector<int> out_degrees;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list, cons
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.in_degrees = in_degrees;
  g.out_degrees = out_degrees;
```

```
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);

  g.out_degrees[u]++;
  g.in_degrees[v]++;
}

void DFS(Graph &g, int u)
{
  g.visited[u] = true;

  for (int v : g.adjacency_list[u]) {
    if (!g.visited[v])
        DFS(g, v);
  }
}

Graph reverse_edges(const Graph &g)
{
  Graph tmp_graph;

  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> in_degrees;
  std::vector<int> out_degrees;

  visited.resize(g.V, false);

  adjacency_list.resize(g.V);

  initialize_graph(tmp_graph, adjacency_list, visited, g.V, g.out_degrees, g.in_deg

  for (int i = 0; i < g.V; i++)
    for (int u : g.adjacency_list[i])
      add_edge(tmp_graph, u, i);

  return tmp_graph;
}

int count_unvisited_nodes(const Graph &g)
{
    int counter = 0;
```

```
  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
    if(!g.visited[i] && (g.in_degrees[i] || g.out_degrees[i]))
        return counter++;
  }

  return counter;
}

// Kosaraju's algorithm
bool kosaraju(Graph &g, int u)
{
  DFS(g, 0);

  if (count_unvisited_nodes(g) > 0) {
    return false;
  }

  Graph tmp_graph = reverse_edges(g);

  DFS(tmp_graph, 0);

  if (count_unvisited_nodes(tmp_graph) > 0) {
    return false;
  }

  return true;
}

int is_eulerian(Graph &g, int u)
{
  if (kosaraju(g, u) == false)
    return false;

  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
    if ((size_t)g.in_degrees[i] != g.adjacency_list[i].size())
      return false;
  }

    return true;
}

void chain_words(Graph &g)
{
    if (is_eulerian(g, 0))
        std::cout << "DA\n";
    else
        std::cout << "NE\n";
```

```
}

void add_words(Graph &g, std::vector<std::string> &words)
{
  for (std::string &word : words) {
    add_edge(g, word[0] - 'a', word[word.size() - 1] - 'a');
  }
}

int main ()
{
    std::vector<std::vector<int>> adjacency_list(MAX);
  std::vector<bool> visited(MAX, false);
  std::vector<int> in_degrees(MAX, 0);
  std::vector<int> out_degrees(MAX, 0);

  Graph g;

  int n;

  std::cin >> n;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, MAX, in_degrees, out_degrees);

  std::vector<std::string> words(n);

  for (int i = 0; i < n; i++)
    std::cin >> words[i];

  add_words(g, words);

  chain_words(g);

  return 0;
}
```

Задатак: Асистент и студенти

Поставка: Асистент конструкције и анализе алгоритама жели да да студентима задатке за испит. То ће урадити кроз једну игру. Правила игре су следећа:

1. Асистент каже задатке једном студенту.
2. Асистент нумерише студенте и себе редним бројевима и одређује ко са ким сме међусобно да комуницира.
3. Сви студенти који смеју да комуницирају морају да искомуницирају тачно једном.

4. На крају последњи студент мора да понови асистенту задатке.

5. Уколико студенит упеју да искомуницирају и кажу асистенту задатке ти задаци остају за испит иначе се смишљају нови дупло тежи задаци.

6. Студенти се договарају и кажу асистенту да ли прихватају игру или не.

   Sa standardnog ulaza se unosi broj N koji predstavlja broj studenata (asistent je uračunat). Nakon toga se u narednih N linija unose po 2 broja koja govore o tome ko sa kim sme da komunicira. Na standardni izlaz ispisati "DA" ukoliko studenti treba da prihvate, a "NE" u suprotnom.

Улаз: Са стандарног улаза се уноси број n који представља број студената (асистент је урачунат). Након тога се уноси број m који предтсвља број комуникација које ће бити дозвољене међу студентима. Затим се у наредних m линија уносе по 2 броја која говоре о томе ко са ким сме да комуницира.

Излаз: На стандардни излаз исписати "DA" уколико студенти треба да прихвате игру а "NE" у супротном.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 3 0 1 0 2 1 2	DA

Решење: Уколико бисмо све студенте и асистента представили као чворове графа, а комуникације међу њима као гране неусмереног графа (комуникација је двосмерна релација) задатак бисмо могли једноставно решити провером да ли у графу постоји Ојлеров циклус.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> degrees;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list, cons
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.degrees = degrees;
  g.V = V;
}
```

```
void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);

  g.degrees[u]++;
  g.degrees[v]++;
}

void DFS(Graph &g, int u)
{
  g.visited[u] = true;

  for (int v : g.adjacency_list[u]) {
    if (!g.visited[v])
        DFS(g, v);
  }
}

int num_of_odd_vertices(const Graph &g)
{
  int count_odd = 0;

  for (int i = 0; i < g.V; i++)
    if (g.degrees[i] % 2)
      count_odd++;

  return count_odd;
}

bool is_connected(Graph &g)
{
  int start_node;

  for (int i = 0; i < g.V; i++)
    if (g.adjacency_list[i].size() > 0)
      start_node = i;

  DFS(g, start_node);

  for (int i = 0; i < g.V; i++)
    if (!g.visited[i] && g.degrees[i])
      return false;

  return true;
}
```

```
void has_eulerian_circuit(Graph &g)
{
  int count_odd = num_of_odd_vertices(g);

  if (count_odd > 2) {
    std::cout << "NE\n";
    return ;
  }

  if (!is_connected(g)) {
    std::cout << "NE\n";
    return ;
  }

  if (count_odd == 0)
    std::cout << "DA\n";
  else
    std::cout << "NE\n";
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  std::vector<int> degrees;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  degrees.resize(n, 0);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, degrees, n);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  has_eulerian_circuit(g);
```

```
  return 0;
}
```

Хамилтонови путеви и циклуси

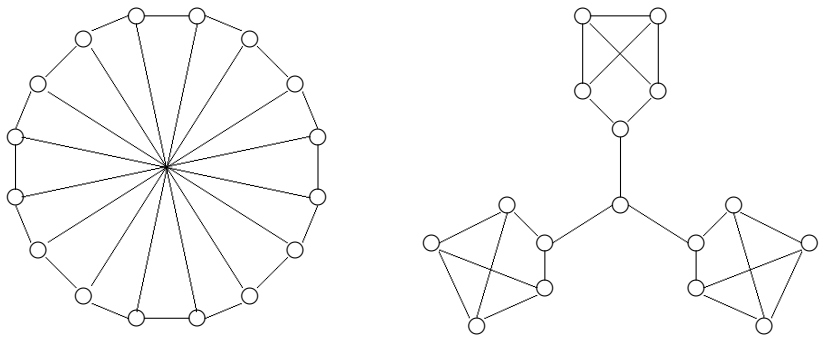
Хамилтонов пут је пут који посећује сваки чвор графа тачно једном. На пример, граф приказан на слици 2.31 садржи Хамилтонов пут (A, B), (B, C), (C, D), (D, E).

Ако Хамилтонов пут почиње и завршава се у истом чвору, он се назива *Хамилтонов циклус*. Претходно поменути граф има и Хамилтонов циклус који почиње и завршава се у чвору A: (A, B), (B, E), (E, D), (D, C), (C, A). Граф који садржи Хамилтонов циклус зове се *Хамилтонов граф*.

Ова врста циклуса названа је тако у част Вилијама Хамилтона који је 1857. године изумео једну врсту слагалице која укључује потрагу за овом врстом циклуса у графу сачињеном од ивица додекаедра.

Проблем има усмерену и неусмерену верзију; ми ћемо се бавити само неусмереном варијантом.

За разлику од проблема Ојлерових циклуса, проблем налажења Хамилтонових циклуса (односно карактеризације Хамилтонових графова) је врло тежак. Да би се проверило да ли је граф Ојлеров, довољно је знати степене њихових чворова. За утврђивање да ли је граф Хамилтонов, то није довољно. Заиста, два графа приказана на слици 2.36 имају по 16 чворова степена 3 (дакле имају исте степене чворова), али је први Хамилтонов, а други очигледно није. Овај проблем спада у класу NP-комплетних проблема.



Слика 2.36: Два графа са по 16 чворова степена 3, од којих је први Хамилтонов, а други није.

Приметимо да ако је граф комплетан, онда он сигурно садржи Хамилтонов циклус. Јасно је и то да што је граф "гушћи" (што је већи број грана) постоји већа вероватноћа проналажења Хамилтоновог циклуса. С тим у вези доказане су наредне теореме:

Ореова теорема: Нека је $G = (V, E)$ неусмерен граф за који важи $|V| = n \geq 3$. Ако је збир степена свака два несуседна чвора у графу бар n, граф садржи Хамилтонов циклус.

Последица ове теореме је наредна теорема.

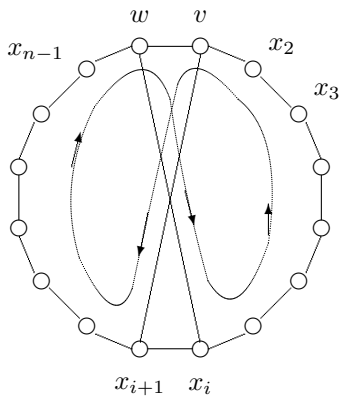
Диракова теорема: Ако је степен сваког чвора у неусмереном графу бар $n/2$, граф садржи Хамилтонов циклус.

Нека је $G = (V, E)$ повезан неусмерен граф и нека за произвољан чвор $v \in V$ $d(v)$ означава његов степен. Докажимо Ореову теорему.

Доказ се заснива на индукцији по броју грана које треба уклонити из комплетног графа да би се добио задати граф. База индукције је комплетан граф. Сваки комплетан граф са бар три чвора садржи Хамилтонов циклус, који је лако пронаћи.

Индуктивна хипотеза: Умемо да пронђемо Хамилтонов циклус у графовима који задовољавају наведене услове ако имају бар $n(n-1)/2 - m$ грана.

Сада треба да покажемо како пронаћи Хамилтонов циклус у графу са $n(n-1)/2-(m+1)$ грана који задовољава услове проблема. Нека је $G = (V, E)$ такав граф. Изаберемо произвољна два несуседна чвора v и w у G (то је могуће ако граф није комплетан), и посматрајмо граф G' који се од G добија додавањем гране (v, w). Према индуктивној хипотези ми умемо да пронађемо Хамилтонов циклус у графу G'. Означимо са $x_1, x_2, \ldots, x_n$ све чворове у графу G' и нека је x_1, x_2, ..., x_n, x_1 такав циклус у G' (видети слику 2.37). Ако грана (v, w) није део циклуса, онда је исти циклус део графа G, па је проблем решен. У противном, без смањења општости, може се претпоставити да је $v = x_1$ и $w = x_n$. Према датим условима је $d(v) + d(w) \geq n$.



Слика 2.37: Модификација Хамилтоновог циклуса после избацивања гране (v, w).

Нека је

$A = \{i : 1 \leq i \leq n-1 | x_{i+1}$суседно са $v\}$,

$B = \{i : 1 \leq i \leq n-1 | x_i$суседно са $w\}$.

Важи да је $|A| = d(v)$ и $|B| = d(w)$, односно да је $|A| + |B| \geq n$. A и B су подскупови скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ који има $n-1$ елемената те не могу бити дисјункт-

ни, те сигурно постоји неко $i \in A \cap B$, односно у графу G за неко i постоје гране (w, x_i) и (v, x_{i+1}). Од ових двеју грана може се формирати нови Хамилтонов циклус $v(= x_1), x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, w(= x_n), x_i, x_{i-1}, \ldots, v$, који не садржи грану (v, w), видети слику 2.37.

Директна примена овог доказа приликом имплементације алгоритма полази од комплетног графа, из кога се једна за другом избацују гране које је припадају задатом графу. Боље је решење почети са много мањим графом, на следећи начин. У датом графу G најпре проналазимо дугачак пут (на пример, помоћу DFS), а онда додајемо нове гране тако да пут продужимо до Хамилтоновог циклуса. Тако је добијен већи граф G'. Обично је довољно додати само неколико грана. Међутим, чак и у најгорем случају, биће додата највише $n - 1$ грана. Полазећи од G', доказ теореме се затим примењује итеративно, све док се не пронађе Хамилтонов циклус у G. Укупан број корака за замену једне гране је $O(n)$. Потребно је заменити највише $n - 1$ грана, па је временска сложеност алгоритма $O(n^2)$.

Задатак: Сви Хамилтонови путеви у неусмереном графу

Поставка: Нека је дат неусмерени граф G. Пронаћи све Хамилтонове путеве у овом графу.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају чворове који су повезани у графу.

Излаз: На стандардни излаз у засебним редовима исписати све Хамилтонове путеве који постоје у графу.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 6	0 1 2 3 4
0 1	0 1 2 4 3
0 2	1 0 2 3 4
1 2	1 0 2 4 3
2 3	3 4 2 0 1
3 4	3 4 2 1 0
2 4	4 3 2 0 1
	4 3 2 1 0

Решење: Проблем проналажења свих Хамилтонових путева у неусмреном графу је NP комплетан проблем, што значи да не постоји полиномијални алгоритам којим можемо пронаћи све Хамилтонове путеве у графу. Како бисмо ово постигли морамо да прођемо кроз све могуће комбинације путева у графу. У тренутку када пут у графу који тренутно разматрамо садржи све чворове нашли смо Хамилтонов пут и можемо га исписати. Све комбинације налазимо исцрпном претрагом. Важно је да након што изађемо из рекурзивног позива за 1 чвор њега означимо као непосећен јер може да се деси да постоји још неки Хамилтонов пут кроз тај чвор (желимо све комбинације да испитамо). При проласку кроз неки чвор означавамо га посећеним (на тренутном путу) јер не желимо више пута да пролазимо кроз исти чвор (дефиниција Хамилтоновог

пута).

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list, cons
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
}

void all_paths(Graph &g, int u, std::vector<int> path)
{
    g.visited[u] = true;

  path.push_back(u);

  if (path.size() == (size_t)g.V) {
    for (int v : path)
      std::cout << v << " ";

    std::cout << "\n";
    return ;
  }

  for (int v : g.adjacency_list[u])
    if (!g.visited[v]) {

        all_paths(g, v, path);

            g.visited[v] = false;
    }
}
```

```
void all_hamiltonian_paths(Graph &g)
{
  std::vector<int> path;

  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
    all_paths(g, i, path);
    g.visited[i] = false;
  }
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, n);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  all_hamiltonian_paths(g);

  return 0;
}
```

Задатак: Сви Хамилтонови путеви из чвора у неусмереном графу

Поставка: Нека је дат неусмерени граф G. Пронаћи све Хамилтонове путеве у овом графу из задатог чвора.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају чворове који су повезани у графу. Након тога се уноси још 1 вредност која представља чвор из кога треба наћи све Хамилтонове путеве.

Излаз: На стандардни излаз у засебним линијама исписати све Хамилтонове путеве из задатог чвора.

Пример

Улаз *Излаз*

```
5 6     1 0 2 3 4
0 1     1 0 2 4 3
0 2
1 2
2 3
3 4
2 4
1
```

Решење: Проблем проналажења свих Хамилтонових путева у неусмереном графу је NP комплетан проблем, што значи да не постоји полиномијални алгоритам којим можемо пронаћи све Хамилтонове путеве у графу. Како бисмо ово постигли морамо да прођемо кроз све могуће комбинације путева у графу. Слично, и ако тражимо све путеве из задатог чвора морамо да прођемо кроз све комбинације путева где ће почетни чвор бити увек исти, односно задати чвор. Сваки пут када се кроз рекурзију враћамо уназад потребно је чвор означити као непосећен да бисмо (евентуално) пронашли још неки пут који води кроз тај чвор. Када је број чворова у неком путу једнак броју чворова у графу онда смо нашли Хамилтонов пут и треба га исписати. При проласку кроз неки чвор означавамо га посећеним (на тренутном путу) јер не желимо више пута да пролазимо кроз исти чвор (дефиниција Хамилтоновог пута).

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list, cons
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
}
```

```
void all_paths(Graph &g, int u, std::vector<int> path)
{
    g.visited[u] = true;

  path.push_back(u);

  if (path.size() == (size_t)g.V) {
    for (int v : path)
      std::cout << v << " ";

    std::cout << "\n";
    return ;
  }

  for (int v : g.adjacency_list[u])
    if (!g.visited[v]) {

        all_paths(g, v, path);

            g.visited[v] = false;
    }
}

void all_hamiltonian_paths_from_node(Graph &g, int start_node)
{
  std::vector<int> path;

  all_paths(g, start_node, path);
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, n);

  int x, y;
```

```
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  int start_node;

  std::cin >> start_node;

  all_hamiltonian_paths_from_node(g, start_node);

  return 0;
}
```

Задатак: Да ли у неусмереном графу постоји Хамилтонов пут

Поставка: Нека је дат неусмерени граф G. Проверити да ли у том графу постоји Хамилтонов пут.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају чворове који су повезани у графу.

Излаз: На стандардни излаз исписати "DA" уколико у графу постоји Хамилтонов пут а "NE" иначе.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 6 0 1 0 2 1 2 2 3 3 4 2 4	DA

Решење: За разлику од Ојлерових путева за неусмерени граф где постоје јасно дефинисана правила о постојању истих то не важи за Хамилтонове путеве. Да бисмо проверили да ли постоји Хамилтонов пут у графу морамо пронаћи бар 1 такав пут. Пошто треба проверити само да ли постоји Хамилтонов пут у графу покрећемо претрагу графа из сваког чвора и покушавамо да нађемо Хамилтонов пут. Уколико успемо у томе (прошли смо кроз све чворове тачно једном) можемо исписати "DA" као индикатор да пут постоји. А ако не успемо ни из једног чвора до нађемо пут који пролази кроз све чворове тачно једном, Хамилтонов пут не псостоји.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
```

```
struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
}

bool path_exists(Graph &g, int u, int nodes_passed)
{
  g.visited[u] = true;

  nodes_passed++;

  if (nodes_passed == g.V) {
    return true;
  }

  for (int v : g.adjacency_list[u])
    if (!g.visited[v]) {

        if (path_exists(g, v, nodes_passed))
            return true;

          g.visited[v] = false;
    }

  return false;
}

bool is_there_hamiltonian_path(Graph &g)
{
  int nodes_passed = 0;

  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
```

```
    if (path_exists(g, i, nodes_passed)) {
      return true;
    }
    g.visited[i] = false;
  }

  return false;
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, n);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  std::cout << (is_there_hamiltonian_path(g) ? "DA\n" : "NE\n");

  return 0;
}
```

Задатак: Да ли у неусмреном графу постоји Хамилтонов циклус

Поставка: Нека је дат неусмерени граф G. Проверити да ли у том графу постоји Хамилтонов циклус.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају чворове који су повезани у графу.

Излаз: На стандардни излаз исписати "DA" уколико у графу постоји Хамилтонов

циклус а “NE” иначе.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 4 0 1 1 2 2 3 3 0	DA

Решење: За проверу да ли постоји Ојлеров циклус у неусмереном графу довољно је уочити степене чворова. Да бисмо проверили да ли постоји Хамилтонов циклус у графу то није довољно. Провера постојања Хамилтоновог циклуса у неусмереном графу је NP комплетан проблем и за њега не постоји полиномијални алгоритам који га решава. Неопходно је проверити све могуће комбинације (у најгорем случају) како бисмо утврдили да ли граф садржи Хамилтонов циклус. Пошто треба проверити само да ли постоји Хамилтонов циклус у графу покрећемо претрагу графа из сваког чвора и покушавамо да нађемо исти. Уколико успемо у томе (прошли смо кроз све чворове тачно једном и постоји грана од последњег откривеног чвора до почетног чвора) можемо исписати “DA” као индикатор да циклус постоји. А ако не успемо ни из једног чвора до нађемо циклус који пролази кроз све чворове тачно једном, и враћа се у почетни (услов да буде циклус) Хамилтонов циклус не постоји.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <algorithm>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
}

bool path_exists(Graph &g, int u, int start_node, int nodes_passed)
{
```

```
  g.visited[u] = true;

  nodes_passed++;

  if (nodes_passed == g.V) {
    if (std::find(g.adjacency_list[u].begin(), g.adjacency_list[u].end(), start_node) !=
        return true;
    return false;
  }

  for (int v : g.adjacency_list[u])
    if (!g.visited[v]) {

        if (path_exists(g, v, start_node, nodes_passed))
            return true;

      g.visited[v] = false;
    }

  return false;
}

bool is_there_hamiltonian_cycle(Graph &g)
{
  int nodes_passed = 0;

  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
    if (path_exists(g, i, i, nodes_passed)) {
      return true;
    }
    g.visited[i] = false;
  }

  return false;
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);
```

```
  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, n);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  std::cout << (is_there_hamiltonian_cycle(g) ? "DA\n" : "NE\n");

  return 0;
}
```

Задатак: Сви Хамилтонови циклуси у неусмереном графу

Поставка: Нека је дат неусмерени граф G. Пронаћи све Хамилтонове циклусе у овом графу.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број чворова (n) и број грана графа (m). У наредних m линија се уносе по 2 вредности које представљају чворове који су повезани у графу.

Излаз: На стандадрни излаз у засебним линијама исписати све Хамилтонове циклусе који постоје у графу.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 6 0 1 0 2 1 2 2 3 3 4 2 4	

Решење: Као и за проверу постојања Хамилтоновог циклуса у графу, и за његово проналажење је потрбно проћи кроз све могуће комбинације путева. Циклус може бити пронађен тако што нађемо Хамилтонов пут у графу и још додатно проверимо да ли постоји грана између последњег чвора у Хамилтоновом путу и почетног чвора (чвор из кога смо кренули). Како бисмо пронашли све Хамилтонове циклусе у графу потребно је да сваки чвор графа узмемо за почетни и тражимо све циклусе из њега. Проналажење свих циклуса из чвора иде тако што након што нађемо један циклус кренемо уназад и након изласка из рекурзије сваки чвор означимо као непосећен јер можда неки други циклус пролази кроз тај исти чвор. На тај начин претрагом са одсецањем (не идемо у већ посећене чворове па ту имамо одсецања) можемо проћи све могуће

комбинације путева из једног чвора. Узимањем сваког чвора за почетни можемо наћи све Хамилтонове циклусе у графу.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <algorithm>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  int V;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<int>> &adjacency_list, cons
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.V = V;
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v)
{
  g.adjacency_list[u].push_back(v);
  g.adjacency_list[v].push_back(u);
}

void all_paths(Graph &g, int u, int start_node, std::vector<int> path)
{
    g.visited[u] = true;

  path.push_back(u);

  if (path.size() == (size_t)g.V) {
    if (std::find(g.adjacency_list[u].begin(), g.adjacency_list[u].end(), start_node) !=
        path.push_back(start_node);
        for (int v : path)
          std::cout << v << " ";

        std::cout << "\n";
    }
    return ;
  }

  for (int v : g.adjacency_list[u])
    if (!g.visited[v]) {

        all_paths(g, v, start_node, path);
```

```
            g.visited[v] = false;
    }
}

void all_hamiltonian_cycles(Graph &g)
{
  std::vector<int> path;

  for (int i = 0; i < g.V; i++) {
    all_paths(g, i, i, path);
    g.visited[i] = false;
  }
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<int>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, n);

  int x, y;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    add_edge(g, x, y);
  }

  all_hamiltonian_cycles(g);

  return 0;
}
```

Задатак: Проблем трговачког путника

Поставка: Нека је дато n градова и нека су познате удаљености између њих. Трговачки путник треба да крене из једног града, обиђе све градове тачно 1 и врати се у почетни град при чему укупна дужина пређеног пута треба да буде најмања. Одредити низ градова којима треба да иде путник уколико је познат град из кога путник креће.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број градова (n) и број путева међу њима (m). У наредних m линија се уносе по 3 вредности које представљају градове између којих постоји пут и удаљеност између градова. Након тога се уноси град из кога путник креће.

Излаз: На стандарни излаз исписати редослед којим путник треба да обилази градове кренувши из почетног и укупну удаљеност коју мора да пређе. Уколико такав редослед градова не постоји на стандарни излаз исписати -1.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 4 0 1 16 1 2 50 2 3 11 3 0 34 2	2 3 0 1 2 111

Решење: Потребно је пронаћи Хамилтонов циклус најмање тежине из задатог чвора у неусмереном графу. Потребно је упоредити цене свих Хамилтонових циклуса и изабрати најмањи. Из почетног чвора формирамо све могуће циклусе, за сваки памтимо укупну цену и бирамо најјефтинији (укупна дужина путева између градова најмања).

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <algorithm>
#include <climits>

struct Graph {
  std::vector<std::vector<std::pair<int, int>>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;
  int V;
  std::vector<int> shortest_path;
  int smallest_cost;
};

void initialize_graph(Graph &g, const std::vector<std::vector<std::pair<int, int>>> &adja
{
  g.adjacency_list = adjacency_list;
  g.visited = visited;
  g.V = V;
  g.smallest_cost = INT_MAX;
```

```
}

void add_edge(Graph &g, int u, int v, int weight)
{
  g.adjacency_list[u].push_back({v, weight});
  g.adjacency_list[v].push_back({u, weight});
}

void all_paths_from_node(Graph &g, int u, int start_node, std::vector<int> path, in
{
    g.visited[u] = true;

  path.push_back(u);

  if (path.size() == (size_t)g.V) {
    auto pos = std::find_if(g.adjacency_list[u].begin(), g.adjacency_list[u].end(),

    if (pos != g.adjacency_list[u].end()) {
        path.push_back(start_node);
      cost += (*pos).second;

      if (cost < g.smallest_cost) {
        g.shortest_path = path;
        g.smallest_cost = cost;
      }
    }

    return ;
  }

  for (auto &v : g.adjacency_list[u])
    if (!g.visited[v.first]) {
        all_paths_from_node(g, v.first, start_node, path, cost + v.second);

            g.visited[v.first] = false;
    }
}

void traveling_salesman(Graph &g, int start_node)
{
  std::vector<int> path;

  int cost = 0;

  all_paths_from_node(g, start_node, start_node, path, cost);

  if (g.shortest_path.size() == 0) {
```

```
    std::cout << "-1\n";
    return ;
  }

  for (int x : g.shortest_path)
    std::cout << x << " ";
  std::cout << "\n";

  std::cout << g.smallest_cost << "\n";
}

int main ()
{
  int n, m;
  std::vector<std::vector<std::pair<int, int>>> adjacency_list;
  std::vector<bool> visited;

  std::cin >> n >> m;

  visited.resize(n, false);

  adjacency_list.resize(n);

  Graph g;

  initialize_graph(g, adjacency_list, visited, n);

  int x, y, z;

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    std::cin >> x >> y >> z;
    add_edge(g, x, y, z);
  }

  int start_node;

  std::cin >> start_node;

  traveling_salesman(g, start_node);

  return 0;
}
```

Глава 3

Алгебарски алгоритми

Када извршавамо неку алгебарску операцију, као што је рецимо множење два броја или њихово степеновање, ми у ствари извршавамо неки алгоритам. Ми те операције користимо као градивне елементе у развијању сложенијих алгоритама и често не залазимо дубље у анализу њихове сложености. Међутим, и сами алгоритми сабирања, одузимања, множења и дељења бројева (посебно ако су бројеви дати низовима својих цифара) представљају важне алгебарске алгоритме. У алгебарске алгоритме спадају и многи алгоритми са којима смо се раније сусретали као што су израчунавање вредности броја на основу датих цифара или, насупрот томе, одређивање цифара броја на основу његове вредности, затим разни алгоритми над полиномима као што су израчунавање вредности полинома и множење полинома. У наставку ћемо се бавити алгебарским алгоритмима са којима се до сада нисмо сусретали. Многи од њих играју важну улогу у области криптографије, али и у другим областима.

Модуларна аритметика

Кажемо да је број r остатак при дељењу броја x бројем y и пишемо $x \bmod y = r$ ако и само ако постоји број q такав да је $x = q \cdot y + r$ и $0 \leq r < y$. Поред тога што са $\bmod$ означавамо бинарну операцију, $\bmod$ се може користити и као ознака бинарне релације у скупу целих бројева. Наиме, писаћемо $a \equiv b \pmod{m}$ ако $m|(a - b)$. Ово је еквивалентно томе да a и b дају исти остатак при дељењу са m. На пример, пишемо $12 \equiv 2 \pmod{5}$ јер $5|(12 - 2)$.

Релацију $\bmod$ користимо у неким свакодневним ситуацијама, а да тога често нисмо ни свесни. Један од таквих примера је рад са временом. Наиме, за 15 сати након 11 часова рећи ћемо да је 2 сата (што одговара томе да је $11 + 15 \equiv 2 \pmod{24}$). Слично важи и за дане у недељи, које рачунамо по модулу 7: данас је рецимо четвртак и интересује нас који ће дан бити за 100 дана. Аналогно се рачуна и месец или редни број недеље у години. Слично важи и приликом рада са угловима.

Модуларна аритметика има пуно практичних примена: користи се за израчунавање

контролних сума за међународне стандардне идентификаторе књига (ISBN бројеве) и идентификаторе банки (IBAN). Модуларна аритметика је и у основи савремених криптографских система.

Бројеви се у рачунарима представљају по модулу 2^k. На пример, у језику C++ бројеви типа `unsigned int` представљају се по модулу 2^{32}. На пример, у језику C# бројеви типа `uint` представљају се по модулу 2^{32}. У наредном коду резултат квадрирања броја 123456789 биће вредност $123456789^2 \bmod 32 = 2537071545$.

```
unsigned int x = 123456789;
cout << x*x << endl;
```

Уколико је потребно одредити вредност збира или производа бројева *по модулу* m од помоћи нам могу бити наредне релације:

$(a + b) \bmod m = (a \bmod m + b \bmod m) \bmod m$ $(a \cdot b) \bmod m = (a \bmod m \cdot b \bmod m) \bmod m$

Докажимо другу релацију (прва је једноставнија за доказивање). Претпоставимо да је $a = q_a \cdot m + r_a$ и $b = q_b \cdot m + r_b$ за $0 \leq r_a, r_b < m$. Тада важи да је $a \cdot b = (q_a \cdot m + r_a) \cdot (q_b \cdot m + r_b) = (q_a \cdot q_b \cdot m + q_a \cdot r_b + r_a \cdot q_b)m + r_a \cdot r_b$. Ако важи да је $r_a \cdot r_b = q \cdot m + r$ за $0 \leq r < m$, тада је са $a \cdot b = (q_a \cdot q_b \cdot m + q_a \cdot r_b + r_a \cdot q_b + q)m + r$, па је $(a \cdot b) \bmod m = r$. Важи да је $(a \bmod m \cdot b \bmod m) \bmod m = (r_a \cdot r_b) \bmod m = r$, чиме је тврђење доказано.

Размотримо проблем одређивања разлике бројева b и a по модулу m. На пример, потребно је одредити вредност $(b - a) \bmod m$. У случају када је $b < a$ желели бисмо да као вредност овог израза добијемо ненегативну вредност. Међутим, не постоји сагласност између различитих програмских језика у рачунању вредности `a%m` када је `a` негативно. Наиме, у језику C++ и у језику C# бисмо за вредност остатка добили негативан број: вредност израза `(2-7)%3` била би -2, док би у језику Python као резутат добили позитиван број 1. Уместо да вршимо испитивање да ли је дељеник негативан, позитиван резултат је могуће добити израчунавањем вредности израза $(b - a + m) \bmod m$ тј. $(b \bmod m - a \bmod m + m) \bmod m$. Заиста, ако је $b \geq a$, вредност израза $b - a + m$ биће већа или једнака m и њен остатак при дељењу са m биће једнак вредности $b - a$ (тражење остатка ће практично поништити првобитно додавање вредности m). Са друге стране, ако је $b < a$ и $0 \leq a, b < m$ тада ће $b - a$ бити негативан број, па ће се додавањем вредности m добити број из интервала од 0 до $m - 1$. Зато проналажење остатка неће на крају променити резултат и добиће се вредност $b - a + m$ за коју смо рекли да је тражена вредност у овом случају.

У претходном смо се ослонили на чињеницу да су и a и b бројеви који су већи или једнаки од 0 и строго мањи од m. Проналажење вредности разлике по модулу m могуће је и у општем случају и важи

$$(B - A) \bmod m = (B \bmod m - A \bmod m + m) \bmod m$$

Докажимо ово тврђење. Подсетимо се да је $x \bmod y = r$ ако и само ако постоји q такав да је $x = q \cdot y + r$ и ако је $0 \leq r < y$. Нека је $A = q_a \cdot m + a$ и $B = q_b \cdot m + b$, за $0 \leq a, b < m$. Зато је $A \bmod m = a$ и $B \bmod m = b$. Нека је $B - A + m = p \cdot m + r$ за неко $0 \leq r < m$. Зато је $(B \bmod m - A \bmod m + m) \bmod m = (b - a + m) \bmod m = r$.

Такође, важи и да је $B - A = (q_b - q_a) \cdot m + (b - a) = (q_b - q_a - 1) \cdot m + (b - a + m) = (q_b - q_a - 1 + p) \cdot m + r$, па је и $(B - A) \bmod m = r$, чиме је тврђење доказано.

Као последица множења по модулу, важи и наредно тврђење, које омогућава да се израчуна степен по модулу:

$$a^n \bmod m = (a \bmod m)^n \bmod m$$

Задатак: Операције по модулу

Поставка: Напиши програм који одређује последње три цифре збира и последње три цифре производа четири унета цела броја.

Улаз: У сваком реду стандардног улаза уноси се по један цео број из интервала $[1..999]$.

Излаз: На стандардни излаз се исписују број одређен са последње три цифре збира и број одређен са последње три цифре производа унетих бројева (евентуалне водеће нуле се не морају исписати).

Пример

Улаз	*Излаз*
999	996
999	1
999	
999	

Решење: Идеја која природно прва падне напамет је да се израчунају збир и производ унетих бројева, а онда да се последње три цифре одреде израчунавањем остатка при целобројном дељењу са 1000. Када се у обзир узме распон бројева који се уносе, такво решење би давало коректне резултате у случају збира, међутим, производ бројева може бити много већи од самих бројева и може прекорачити распон типа `int` који користимо за репрезентовање целих бројева и зато резултат може бити погрешан.

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

int main() {
  int a, b, c, d;
  cin >> a >> b >> c >> d;

  cout << (a + b + c + d) % 1000 << endl;
  cout << (a * b * c * d) % 1000 << endl;

  return 0;
}
```

Зато је за израчунавање последње три цифре производа потребно применити мало напреднији алгоритам који користи чињеницу да су за последње три цифре производа

релевантне само последње три цифре сваког од чинилаца. Зато је пре множења могуће одредити остатак при дељењу са 1000 сваког од чинилаца, израчунати производ, а онда одредити његове три последње цифре израчунавањем остатка његовог при дељењу са 1000. Аналогну тактику могуће је применити и на израчунавање збира.

Функције за множење и сабирање по модулу заснованећемо на релацијама $(a + b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$ и $(a \cdot b) \bmod n = (a \bmod n \cdot b \bmod n) \bmod n$, а онда ћемо их примењивати тако што ћемо производ (тј. збир) по модулу n свих претходних бројева применом функција комбиновати са новим бројем. Дакле, ако функцију за сабирање по модулу n означимо са $+_n$, а за множење по модулу n са $\cdot_n$, израчунаваћемо $((a +_n b) +_n c) +_n d$ тј. $((a \cdot_n b) \cdot_n c) \cdot_n d$.

Нагласимо да је израчунавање целобројног количника и остатка временски захтевна операција (најчешће се извршава доста спорије него основне аритметичке операције), тако да је у пракси пожељно избећи је када је то могуће. На пример, ако сте потпуно сигурни да ће $a + b$ бити могуће репрезентовати одабраним типом података, тада је уместо $(a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$ ипак боље користити $(a + b) \bmod n$.

```
int plus_mod(int a, int b, int n) {
  return ((a % n) + (b % n)) % n;
}

int puta_mod(int a, int b, int n) {
  return ((a % n) * (b % n)) % n;
}

int main() {
 int a, b, c, d;
 cin >> a >> b >> c >> d;

 cout << plus_mod(plus_mod(plus_mod(a, b, 1000), c, 1000), d, 1000)
      << endl;
 cout << puta_mod(puta_mod(puta_mod(a, b, 1000), c, 1000), d, 1000)
      << endl;
 return 0;
}
```

Уместо у једном изразу, збир и производ можемо рачунати итеративно тако што их иницијализујемо на нулу тј. јединицу, а затим у сваком кораку текући збир мењамо збиром по модулу текућег збира и текућег броја, а текући производ мењаамо производом по модулу текућег производа и текућег броја.

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

int zbir_po_modulu(int a, int b, int n) {
  return ((a % n) + (b % n)) % n;
}
```

```
int proizvod_po_modulu(int a, int b, int n) {
  return ((a % n) * (b % n)) % n;
}

int main() {
  int a, b, c, d;
  cin >> a >> b >> c >> d;

  int zbir;
  zbir = zbir_po_modulu(a, b, 1000);
  zbir = zbir_po_modulu(zbir, c, 1000);
  zbir = zbir_po_modulu(zbir, d, 1000);
  cout << zbir << endl;

  int proizvod;
  proizvod = proizvod_po_modulu(a, b, 1000);
  proizvod = proizvod_po_modulu(proizvod, c, 1000);
  proizvod = proizvod_po_modulu(proizvod, d, 1000);
  cout << proizvod << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Монопол

Поставка: Монопол је игра у којој се играчи крећу по пољима која су постављена у круг. Играчи се увек крећу у смеру казаљке на сату. Претпоставимо да су поља означена редним бројевима који крећу од 0, да су на почетку игре оба играча на том пољу и да се током игре играчи нису кретали унатраг. Ако се зна број поља које је први играч прешао од почетка игре и број поља које је други играч прешао од почетка игре напиши програм који израчунава колико корака први играч треба да направи да би дошао на поље на ком се налази други играч.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе три природна броја. У првој линији дат је број поља на табли, у другој број поља које је од почетка игре прешао први, а у трећој број поља које је од почетка игре прешао други играч.

Излаз: На стандардни излаз треба исписати колико корака унапред играч треба да направи да би стигао на жељено поље.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
10	4
3	
7	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
10	6
7	
3	

Решење: Означимо укупан број поља са n, број поља које је први играч прешао са A и број поља које је други играч прешао са B. Означимо број поља на коме се први играч

тренутно налази са a, а број поља на које треба да стигне са b. Током свог кретања он је прешао k_a пуних кругова ($k_a \geq 0$) у којима је прешао по n поља и након тога још a поља, тако да је $A = k_a \cdot n + a$. Дакле, пошто је $0 \leq a < n$, на основу дефиниције целобројног дељења важи да је $a = A \bmod n$. Слично је и $b = B \bmod n$.

Ако је $b \geq a$ тада се број корака може израчунати као $b - a$. Међутим, могуће је и да важи $b < a$ и у том случају играч мора прећи преко поља Start које је означено бројем 0. Број корака које играч треба да направи да би од поља на ком се налази стигао до поља старт је $n - a$, а број корака потребних да од поља старт стигне до жељеног поља је b, тако да је укупан број корака једнак $n - a + b$. На основу ове дискусије једноставно је направити програм који анализом ова два случаја стиже до решења.

```
int brojPolja;
int presaoPrvi, presaoDrugi;
cin >> brojPolja >> presaoPrvi >> presaoDrugi;
int saPolja = presaoPrvi % brojPolja;
int naPolje = presaoDrugi % brojPolja;
cout << (naPolje >= saPolja ?
         naPolje - saPolja  :
         naPolje - saPolja + brojPolja)
     << endl;
```

Још једно гледиште које доводи до истог решења је могућност да се у случају да је $b < a$ промене ознаке на пољима иза старта. Тако би се поље старт уместо са 0 означило са n, следеће би се уместо са 1 означило са $1 + n$ итд., док би се поље b означило са $b + n$. Дакле, решење добијамо тако што умањилац увећавамо за n уколико је мањи од умањеника, и израчунавамо разлику.

```
int brojPolja;
int presaoPrvi, presaoDrugi;
cin >> brojPolja >> presaoPrvi >> presaoDrugi;
int saPolja = presaoPrvi % brojPolja;
int naPolje = presaoDrugi % brojPolja;
if (naPolje < saPolja)
  naPolje += brojPolja;
cout << naPolje - saPolja << endl;
```

Посматрано још из једног угла у овом задатку се тражи да се одреди разлика бројева B и A по модулу n. То сугерише да је уместо анализе случајева решење могуће добити израчунавањем вредности израза $(b-a+n) \bmod n$ тј. $(B \bmod n - A \bmod n + n) \bmod n$. Заиста, ако је $b \geq a$, вредност израза $b-a+n$ биће већа или једнака n и њен остатак при дељењу са n биће једнак вредности $b - a$ (тражење остатка ће практично поништити првобитно додавање вредности n). Са друге стране, ако је $b < a$ тада ће $b - a$ бити негативан број, па ће се додавањем вредности n добити број из интервала између 0 и $n - 1$. Зато проналажење остатка неће на крају променити резултат и добиће се вредност $b - a + n$ за коју смо рекли да је тражена вредност у овом случају.

```
int brojPolja;
int presaoPrvi, presaoDrugi;
cin >> brojPolja >> presaoPrvi >> presaoDrugi;
```

```
int saPolja = presaoPrvi % brojPolja;
int naPolje = presaoDrugi % brojPolja;
cout << (naPolje - saPolja + brojPolja) % brojPolja << endl;
```

Задатак: Разбрајалица

Поставка: Деца стоје у кругу и одређују ко ће од њих да жмури тако што изговарају неку разбрајалицу (на пример, еци-пеци-пец). Ако децу обележимо бројевима од 0 до $n-1$, редом како стоје у кругу, ако је познат број речи (слогова) разбрајалице и ако је познат редни број детета од којег почиње разбрајање, напиши програм који приказује редни број детета које је одабрано да жмури (тј. на коме се разбрајање завршава).

Улаз: Уносе се три природна броја. Број слогова разбрајалице, број деце и редни број детета од којег почиње разбрајање. Претпоставићемо да је број деце мањи од 100, а да је број слогова мањи од 1000.

Излаз: Исписује се један природни број – редни број детета одабраног да жмури.

Пример

Улаз	*Излаз*
13	1
7	
3	

Објашњење

Претпоставимо да седморо деце у кругу користи разбрајалицу еци-пеци-пец, а да бројање креће од детета број 3, разбрајање ће тећи овако:

```
еци-пеци-пец-јасам-мали-зец-тиси-мала-препе-лица-еци-пеци-пец
3    4    5    6    0    1   2    3     4    5    6   0    1
```

Решење: Нека је број слогова разбрајалице s, број деце d, а број детета од којег почиње бројање p. Ако би деца била поређана у једну дугачку врсту уместо у круг, тада би се бројање завршило на детету са бројем $p + (s - 1)$. Заиста, први слог се изговара на детету број p, други на детету број $p+1$, трећи на детету број $p+2$, а s-ти на детету $p + (s - 1)$.

Ако сада замислимо да се деца из те дугачке врсте ређају у круг у коме има тачно 7 места, сваком детету у врсти ће број његовог места у кругу бити додељен на следећи начин.

```
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 ...
0 1 2 3 4 5 6 0 1 2 3  4  5  6  0  1  2  3  4  5  6  7  0  ...
```

Приметимо да место у кругу које ће бити додељено детету које је у врсти на позицији k одређује тако што се одреди остатак тог броја k са 7 (на пример, остатак при дељењу броја 19 са 7 је 5 јер је $2 \cdot 7 + 5 = 19$, а броју 19 додељено је тачно место 5 на кругу). Слично ће важити и ако је број деце d, једино што ће тада уместо остатка при дељењу са 7 бити потребно одредити остатак при дељењу са d. Пошто смо рекли да би изабрано

дете имало редни број $p + (s - 1)$ у врсти, у кругу ће то бити дете са редним бројем $(p + (s - 1)) \bmod d$.

О прекорачењу

Пошто важи да је $(a+b) \bmod c = (a \bmod c + b \bmod c) \bmod c$, што је доказано у задатку Операције по модулу, резултат би могао бити израчунат и изразом $(p \bmod d + (s - 1) \bmod d) \bmod d$, тј. $(p + (s - 1) \bmod d) \bmod d$, јер је $p < d$, па је $p \bmod d = p$. Овим би се донекле ублажила могућност настајања прекорачења у сабирању, ако би вредности p и s биле јако велике (што у овом задатку није случај).

```
int broj_slogova, broj_dece, prvo_dete;
cin >> broj_slogova >> broj_dece >> prvo_dete;
cout << (prvo_dete + (broj_slogova - 1)) % broj_dece << endl;
```

Задатак: Збир бројева по модулу

Поставка: Напиши програм који израчунава збир природних бројева од 1 до n по датом модулу m.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе два цела броја, сваки у посебном реду:

- n ($10^2 \leq n \leq 2^{32} - 1$)
- m ($2 \leq m \leq 100$)

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број који представља тражени збир по модулу.

Пример

Улаз	*Излаз*
100	50
100	

Објашњење

Збир свих бројева од 1 до 100 је 5050 и остатак при дељењу са 100 је 50.

Решење: Наиван начин да се овај задатак реши је грубом силом, помоћу петље у којој се обрађују један по један број i од 1 до n и у чијем се телу се израчунава збир по модулу m дотадашњег збира z и текућег броја i. Како смо видели у задатку Операције по модулу то се може израчунати помоћу $(z \bmod m + i \bmod m) \bmod m$, тј. са $(z + i \bmod m) \bmod m$, јер у у сваком кораку важи $0 \leq z < m$, па је $z \bmod m = z$. Узевши у обзир ограничење вредности n дато у тексту задатка, потребно је употребити 64-битни тип података за представљање података.

```
typedef unsigned long long ull;
ull n, modul;
cin >> n >> modul;
ull zbir_po_modulu = 0;
for (ull i = 1; i <= n; i++)
  zbir_po_modulu = (zbir_po_modulu + i % modul) % modul;
cout << zbir_po_modulu << endl;
```

Ефикасно решење је да се примени формула за израчунавање збира аритметичког низа тј. Гаусова формула за збир првих n природних бројева (види задатак Спортске припреме) на основу које је $z = \frac{n(n+1)}{2}$. У овом задатку се тражи да се збир израчуна по модулу датог броја m. Тачно један од бројева n и $n+1$ је паран, тако да се тражени резултат може израчунати као производ бројева $\frac{n}{2}$ и $n+1$ по модулу m или као производ бројева n и $\frac{n+1}{2}$ по модулу m. Производ бројева a и b по модулу израчунавамо на основу формуле $((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)) \bmod m$ коју смо приказали у задатку Операције по модулу.

```
typedef unsigned long long ull;

ull proizvod_po_modulu(ull a, ull b, ull m) {
  return ((a % m) * (b % m)) % m;
}

int main() {
  ull n, modul;
  cin >> n >> modul;
  ull zbir_po_modulu =
    n % 2 == 0 ?
    proizvod_po_modulu(n / 2, n + 1, modul) :
    proizvod_po_modulu(n, (n + 1) / 2, modul);
  cout << zbir_po_modulu << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Сат

Поставка: Претпоставимо да приликом исказивања времена за сате користимо само бројеве од 1 до 12. Тако за 17:45 кажемо 5:45, а за 0:32 кажемо да је 12:32. Ако је познат број сати и минута такав да је број сати у опсегу од 0 до 23, а минута од 0 до 59, исказати то време тако да је број сати у опсегу 1 до 12.

Улаз: Учитавају се два броја, сваки у посебној линији. У првој линији је број сати (између 0 и 23), а у другој линији је број минута (између 0 и 59).

Излаз: Исписује се једна линија у којој се приказује временски тренутак у формату h:m, где је број сати h између 1 и 12, а број минута између 0 и 59.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`0`	`12:32`	`5`	`5:35`
`32`		`35`	

Решење: У задатку је кључно одредити пресликавање сати, док се минути исписују непромењено. Пошто бројање треба да буде од 1 до 12, потребно је да реализујемо следеће пресликавање:

0	1	2	…	11	12	13	14	15	…	22	23	h

12	1	2	…	11	12	1	2	3	…	10	11	$f(h)$

Један од начина да се то уради је да се употреби гранање и да се вредност 0 преслика у вредност 12, да се вредности између 1 и 12 пресликају саме у себе, а да се од вредности веће од 12 пресликају одузимањем броја 12 од њих.

```
int h, m; // broj sati i minuta
cin >> h >> m;
// izracunavanje i ispis rezultata
if (h == 0)
  h = 12;
else if (h > 12)
  h = h - 12;
cout << h << ":" << m << endl;
```

Сати се периодично понављају на сваких 12 сати. Ако бисмо сате бројали од 0 до 11, тада би се одговарајуће пресликавање могло одредити једноставним проналажењем остатка при дељењу са 12.

0	1	2	…	11	12	13	14	15	…	22	23	h
0	1	2	…	11	0	1	2	3	…	10	11	$h \bmod 12$

Приметимо да након израчунавања остатка при целобројном дељењу са 12 проблем праве једино вредности 0 и 12 које су се пресликале у 0 уместо у 12.

Тај случај је могуће посебно испитати и поправити резултат.

```
int h, m; // broj sati i minuta
cin >> h >> m;
// izracunavanje i ispis rezultata
h = h % 12;
if (h == 0) h = 12;
cout << h << ":" << m << endl;
```

Ипак, циљ нам је да покажемо како је могуће решити овај задатак и без употребе гранања. Да бисмо добили вредност из интервала од 1 до 12, можемо на добијени остатак који је из интервала 0 до 11 додати 1. Међутим, да би пресликавање било коректно, потребно је ово увећање неутрализовати тако што ћемо пре одређивања остатка од полазног броја одузети 1. Дакле, број сати можемо одредити као $(h - 1) \bmod 12 + 1$. На пример, ако од 12 одузмемо 1, одредимо остатак добијеног броја 11 при дељењу са 12 и на добијени број 11 додамо 1 добићемо исправну вредност 12. Слично, ако од 13 одузмемо 1, одредимо остатак добијеног броја 12 са 12 и на добијени број 0 додамо 1 добићемо исправан резултат 1. Дакле, решење се реализује кроз следећа пресликавања

0	1	2	…	11	12	13	14	15	…	22	23	h
-1	0	1	…	10	11	12	13	14	…	21	22	$h - 1$
11	0	1	…	10	11	0	1	2	…	9	10	$(h - 1) \bmod 12$

12	1	2	…	11	12	1	2	3	…	10	11	$(h-1) \bmod 12 + 1$

Једини број који може да прави проблем је 0 јер се почетним одузимањем броја 1 добија негативни број -1, а не желимо да се ослањамо на понашање остатка у случају негативног делиоца. То можемо поправити тако што на полазни број увек на почетку додамо 12 чиме обезбеђујемо да ће број увек бити позитиван, при чему се остатак при дељењу са 12 не мења. Дакле, тражено пресликавање је $(h + 12 - 1) \bmod 12 + 1$ или $(h+11) \bmod 12+1$. Нагласимо да се ова техника додавања вредности модула користи када год је је потребно одузети две вредности, по неком модулу. Наиме, у задатку Монопол доказано је да важи

$$(a - b) \bmod n = (a \bmod n - b \bmod n + n) \bmod n.$$

```
int h, m; // broj sati i minuta
cin >> h >> m;
// izracunavanje i ispis rezultata
cout << (h + 11) % 12 + 1 << ":" << m << endl;
```

Задатак: Навијање сата

Поставка: Дочепо се мали брата очевога сата. Пошто је још мали, зна да гледа само сатну казаљку. Сат се може навијати тако што се једним дугметом сатна казаљка помера за један сат унапред (у смеру кретаља казаљке на сату) а другим дугметом се помера за један сат уназад (у супротном смеру кретања казаљке на сату). Ако се зна позиција a на којој се тренутно налази казаљка, позиција b на којој брата жели да се нађе, напиши програм који одређује да ли се сат може навити тако што брата притисне једно од два дугмета тачно k пута.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се бројеви $0 \leq a, b \leq 11$ и број $0 \leq k \leq 1000$.

Излаз: На стандардни излаз написати текст `napred` ако се сат може навити тако што се казаљка помера унапред, `nazad` ако се сат може навити тако што се казаљка помера уназад (ако је сат могуће навити на оба начина, исписати `napred`, а затим `nazad` у следећем реду) тј. `ne moze` ако се сат не може навити.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
1	napred	2	nazad	7	ne moze
7	nazad	4		9	
18		10		3	

Решење: Потребно посебно проверити да ли се сат може навити померањем казаљке напред, и померањем казаљке назад. Померање казаљке за 12 корака у било којем смеру враћа казаљку на почетни положај. Стога је померање за k корака могуће ако и само ако је могуће померање за $k \bmod 12$ корака и на почетку је број k могуће заменити бројем $k \bmod 12$.

Померање казаљке унапред за k корака доводи је са положаја a на положај $(a + k) \bmod 12$, док је померање уназад за k корака доводи на положај $(a - k + 12) \bmod 12$

(сабирање и одузимање по модулу описали смо у задатку Операције по модулу и Монопол). Ако је први број једнак b, тада се казаљка може померити унапред, а ако је други број једнак b, тада се казаљка може померити уназад. Ако ниједно од та два није испуњено, тада се казаљка може померити (за проверу овог услова можемо употребити логичку променљиву коју инцијализујемо на вредност `false` и постављамо је на `true` ако је испуњен први, а затим и други услов).

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main() {
  int a, b, k;
  cin >> a >> b >> k;
  k = k % 12;
  bool moze = false;
  if ((a + k) % 12 == b) {
    moze = true;
    cout << "napred" << endl;
  }
  if ((a - k + 12) % 12 == b) {
    moze = true;
    cout << "nazad" << endl;
  }
  if (!moze)
    cout << "ne moze" << endl;
  return 0;
}
```

Решење којим се може одредити положај казаљке након k померања унапред, а које не користи модуларну аритметику се заснива на томе да положај a у петљи увећавамо за 1 тачно k пута, при чему је враћамо на нулу када достигне вредност 12. Слично, померање уназад би се реализовало умањивањем вредности a за 1 у петљи тачно k пута, при чему је враћамо на 11 када постане негативна. Наравно, овакво решење може бити веома неефикасно ако се на почетку k не замени са $k \bmod 12$.

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main() {
  int a, b, k;
  cin >> a >> b >> k;

  bool moze = false;

  int a1 = a;
  for (int i = 0; i < k; i++) {
    a1++;
```

```
    if (a1 == 12)
      a1 = 0;
  }
  if (a1 == b) {
    moze = true;
    cout << "napred" << endl;
  }

  int a2 = a;
  for (int i = 0; i < k; i++) {
    a2--;
    if (a2 < 0)
      a2 = 11;
  }
  if (a2 == b) {
    moze = true;
    cout << "nazad" << endl;
  }

  if (!moze)
    cout << "ne moze" << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Степен по модулу

Поставка: Напиши програм који израчунава степен по модулу, тј. за дате бројеве a, n и m израчунава $a^n \bmod m$.

Улаз: Свака од три линије стандардног улаза садржи бројеве a, n и m, при чему је $1 \leq a, n, m \leq 4 \cdot 10^9$.

Излаз: На стандардни излаз испиши тражену вредност степена по модулу.

Пример

Улаз	*Излаз*
2 100 1000	376

Решење: Директно решење подразумева степеновање помоћу узастопног множења бројем a (производ иницијализујемо на 1 и n пута га множимо са a). С обзиром на распон из ког долазе бројеви, јасно је да ће степен бити изузетно велики број и да неће моћи да се представи основним типовима података. Стога је много боље током самог множења израчунавати остатак по модулу тј. множење вршити по формули $(a \cdot b) \bmod m = ((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)) \bmod m$. Пошто су бројеви $a \bmod m$ и $b \bmod m$ 32-битни, њихов производ може бити 64-битан, тако да је пре израчунавања остатка,

пре множења чиниоце конвертовати у 64-битни тип података. Ако након сваког множења вршимо израчунавање остатка при дељењу са m, није неопходно пре множења проналазити остатак при дељењу (први чинилац биће текући степен који ће већ бити у интервалу $[0, m)$, док је други чинилац a, који је истог реда величине као и m, па нам проналажења остатка не значи пуно).

Иако коректан, овај алгоритам је преспор, с обзиром на велики број корака множења који се врше, с обзиром на величину изложиоца n.

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main() {
  unsigned a, n, mod;
  cin >> a >> n >> mod;

  unsigned s = 1;
  for (unsigned i = 0; i < n; i++)
    s = ((unsigned long long)s * (unsigned long long)a) % mod;

  cout << s << endl;

  return 0;
}
```

Ефикасније решење можемо постићи алгоритмом брзог степеновања. Најједноставнија је рекурзивна формулација.

- Ако је $n = 0$, резултат је 1.
- Ако је n паран број, тада је $a^n = a^{2 \cdot n/2} = (a^2)^{n/2}$. Слично, важи да је $a^n \bmod m = a^{2 \cdot n/2} \bmod m = (a^2 \bmod m)^{n/2} \bmod m$.
- Ако је n непаран број, тада је $a^n = a \cdot a^{n-1}$. Слично важи да је $a^n \bmod m = (a \cdot (a^{n-1} \bmod m)) \bmod m$.

Нагласимо да се пре израчунавања a^2, као и пре израчунавања $a \cdot (a^{n-1} \bmod m)$, број a мора конвертовати у 64-битни тип података.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// izracunavamo (a^n) % mod
unsigned stepen(unsigned a, unsigned n, unsigned mod) {
  if (n == 0)
    return 1;
  else if (n % 2 == 0) {
    unsigned long long aull = a;
    return stepen((aull * aull) % mod, n/2, mod);
```

```
  } else {
    unsigned long long aull = a;
    return (aull * stepen(a, n-1, mod)) % mod;
  }
}

int main() {
  unsigned a, n, mod;
  cin >> a >> n >> mod;
  cout << stepen(a, n, mod) << endl;
  return 0;
}
```

У претходом решењу могуће је ослободити се рекурзије, посматрајући бинарни запис изложиоца n.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// izracunavamo (a^n) % mod
unsigned stepen(unsigned a, unsigned n, unsigned mod) {
  unsigned s = 1;
  while (n > 0) {
    if ((n & 1) == 0) {
      a = ((unsigned long long)a * (unsigned long long)a) % mod;
      n = n >> 1;
    } else {
      s = ((unsigned long long)s * (unsigned long long)a) % mod;
      n--;
    }
  }
  return s;
}

int main() {
  unsigned a, n, mod;
  cin >> a >> n >> mod;
  cout << stepen(a, n, mod) << endl;
  return 0;
}
```

Теорија бројева

Задатак: Савршени бројеви

Поставка: Број је савршен ако је једнак суми својих делилаца (у збир делилаца броја се убраја број 1, али не и сам тај број). На пример, број 28 је савршен јер су му делиоци 1, 2, 4, 7 и 14, важи да је 1+2+4+7+14=28. Написати програм који одређује најмањи савршен број у интервалу $[n-k, n+k]$.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се природан број n ($1 \leq n \leq 1000000$) и k ($1 \leq k < n$).

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени број, ако постоји тј. текст `NE` ако у интервалу нема савршених бројева.

Пример

Улаз	*Излаз*
`400`	`496`
`100`	

Решење: Из саме формулације задатка, јасно је да је његова важна компонента функција која за произвољни број n рачуна збир његових делилаца. Најдиректније решење да се збир делилаца броја x израчуна је да се редом, у петљи, за сваки број провери да ли је делилац броја n и ако јесте да се увећа текући збир делилаца.

Остаје питање који су бројеви потенцијални делиоци тј. које бројеве треба проверити у петљи. Пошто је формулацијом задатка одређено да се рачуна број 1, а да се не рачуна сам број n, најгрубље је да се провере сви природни бројеви већи и једнаки 1, а строго мањи од n. Међутим, можемо урадити и мало боље од тога. Последњи потенцијални делилац броја који је мањи од њега је број $\frac{n}{2}$. Заиста, ако би постојао делилац i који је строго већи од $\frac{n}{2}$ и строго мањи од n, онда би $\frac{n}{i}$ такође био делилац, који је строго мањи од 2, а строго већи од 1, што није могуће. Зато је у петљи довољно проверавати целе бројеве између 1 и $\frac{n}{2}$ тј. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ што се може израчунати као `n/2`.

Сложеност овог приступа провере за један број је $O(n)$.

У главном програму примењујемо алгоритам претраге. Логички индикатор који указује да ли је пронађен савршен број иницијализујемо на вредност $false$, а затим у петљи пролазимо кроз све бројеве од $n-k$ до $n+k$ и проверавамо да ли су савршени. Први пут када наиђемо на савршен број постављамо индикатор на `true`, памтимо текућу вредност бројачке променљиве и одмах прекидамо петљу (на пример, наредбом `break`), јер се тражи најмањи број у интервалу. На крају, на основу вредности идентификатора и упамћене вредности савршеног броја пријављујемо тражени резултат.

Укупна сложеност је, дакле, $O(nk)$.

```
#include <iostream>
using namespace std;

// zbir delilaca broja n (racunajuci 1, ali ne racunajuci n)
int zbirDelilaca(int n) {
```

```
  int zbir = 1;  // zbir inicijalizujemo na prvi delioc (to je broj 1)
  // proveravamo potencijalne delioce izmedju 2 i n/2.
  // Jedini delilac veci od n/2 je n, a njega ne treba racunati.
  for (int i = 2; i <= n/2; i++)
    if (n % i == 0) // broj i jeste delilac, pa ga treba dodati na sumu
      zbir += i;
  return zbir;
}

// provera da li je broj savrsen
bool savrsen(int n) {
  return zbirDelilaca(n) == n;
}

int main() {
  // ucitavamo ulazne podatke
  int n, k;
  cin >> n >> k;

  // algoritmom linearne pretrage proveravamo da li u intervalu
  // [n-k, n+k] postoji savrsen broj
  bool postojiSavrsen = false;
  int savrsenBroj;
  for (int i = n-k; i <= n+k; i++) {
    if (savrsen(i)) {
      // savrsen broj je pronadjen
      savrsenBroj = i;
      postojiSavrsen = true;
      break;
    }
  }
  // prikazujemo rezultat
  if (postojiSavrsen)
    cout << savrsenBroj << endl;
  else
    cout << "NE" << endl;
  return 0;
}
```

Ни овако дефинисан програм не достиже жељену брзину и може се додатно убрзати. Користимо чињеницу да се делиоци броја увек јављају у пару. Ако је i делилац броја n, онда знамо да је и број $\frac{n}{i}$ такође делилац броја n. Делиоцу 1 одговара број n, евентуалном делиоцу 2 одговара евентуалан делиоц $\frac{n}{2}$ итд. На пример, делиоци броја 100 су 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100 и они се јављају у паровима (1, 100), (2, 50), (4, 25) (5, 20) и (10, 10). Ако је први делилац мањи од квадратног корена броја n, онда је други делилац већи од квадратног корена броја n. За сваки делилац који је већи од корена броја n постоји делилац који је мањи од корена броја n и зато је анализу делилаца довољно вршити до вредности корена из n. Ако је број потпун квадрат, онда

је и корен делилац и он сам себи одговара као пар. Пошто не желимо корен два пута да додамо на збир, случај испитивања корена броја ћемо издвојити и извршити након петље која ће се вршити све док је број кандидат за делиоца строго мањи од корена. Такође, пошто сам број не желимо да рачунамо у збир, а број један желимо, суму ћемо иницијализовати на 1, а петља ће кренути од вредности 2.

Сложеност овог приступа за проверу једног делиоца је $O(\sqrt{n})$, а провера свих савршених бројева је $O(k\sqrt{n})$.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;


// zbir delilaca broja n (racunajuci 1, ali ne racunajuci n)
int zbirDelilaca(int n) {
  int zbir = 1;  // jedan je delilac svakog broja
  int koren = (int)sqrt(n); // ceo deo korena iz n
  for (int i = 2; i <= koren; i++)
    if (n % i == 0) {
      // ako je i delilac broja n, delilac je i n div i
      zbir += i;
      zbir += n / i;
    }
  // slucaj korena posebno obrađujemo (ako je delilac, u petlji je
  // dodat dva puta umesto jednom, pa ga treba oduzeti)
  if (koren*koren == n)
    zbir -= koren;
  return zbir;
}

bool savrsen(int n) {
  return zbirDelilaca(n) == n;
}

int main() {
  // ucitavamo ulazne podatke
  int n, k;
  cin >> n >> k;

  // algoritmom linearne pretrage proveravamo da li u intervalu
  // [n-k, n+k] postoji savrsen broj
  bool postojiSavrsen = false;
  int savrsenBroj;
  for (int i = n-k; i <= n+k; i++) {
    if (savrsen(i)) {
      // savrsen broj je pronadjen
      savrsenBroj = i;
```

```
      postojiSavrsen = true;
      break;
    }
  }
  // prikazujemo rezultat
  if (postojiSavrsen)
    cout << savrsenBroj << endl;
  else
    cout << "NE" << endl;
  return 0;
}
```

Још боље решење је да се збир делилаца израчуна на основу растављања броја на просте чиниоце које приказујемо у задатку Растављање на просте чиниоце. Број облика p^n, где је p прост фактор, има делиоце $1, p, p^2, \ldots, p^n$ и њихов збир је $1 + p + ... + p^n$. Важи да је збир делилаца броја мултипликативна функција. тј да је збир делилаца производа два узајамно проста броја једнак производу збира делилаца сваког од њих (покушајте ово да докажете). Ако се број може раставити на просте чиниоце у облику $p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$, тада је његов збир делилаца је једнак $(1 + p_1 + ... + p_1^{n_1}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_k + ... + p_k^{n_k})$, јер су степени свих простих фактора међусобно узајамно прости. Ако знамо вредност израза $1 + p_i + ... + p_i^{n_i - 1}$, тада се вредност израза $1 + p_i + ... + p_i^{n_i}$ може добити додавањем сабирка $p_i^{n_i}$, али и много брже, множењем полазне вредности бројем p_i и додавањем броја један.

Током рада алгоритма одржавамо текући збир делилаца који иницијализујемо на 1 (зато што ће бити рачунат у облику производа збирова делилаца појединачних простих фактора). У петљи проверавамо све потенцијалне просте чиниоце од броја 2, па све док текући кандидат не пређе вредност корена текућег броја n. У сваком кораку одржавамо збир делиоца текућег простог фактора који такође иницијализујемо на 1 јер ћемо га рачунати као производ. Док год је број n дељив бројем p (што проверавамо у посебној, унутрашњој петљи) збир делилаца текућег простог фактора множимо са p и додајемо му 1 док број n делимо са p. На крају, тела спољашње петље укупан збир делилаца множимо збиром делилаца управо обрађеног простог фактора (то може бити и 1, ако број n није био дељив бројем p) и увећавамо број p. По изласку из петље је могуће да је број n остао већи од 1, што значи да он садржи последњи прост фактор и тада се укупан збир делилаца множи вредношћу $1 + n$ (што је збир делилаца простог броја n).

Овако одређени збир и број делилаца укључују и сам број n који је накнадно потребно одузети да би се добио збир описан у услову задатка.

Када на располагању имамо функцију која рачуна збир делилаца броја, тада је функцију која проверава да ли је број савршен тривијално дефинисати (она само за дати број позива функцију која рачуна збир делилаца и проверава да ли је он једнак броју).

```
#include <iostream>
using namespace std;

// zbir delilaca broja n (racunajuci 1, ali ne racunajuci n)
int zbirDelilaca(int n) {
```

```
  int n0 = n;    // pamtimo polaznu vrednost broja n
  int zbir = 1;  // zbir delilaca kao proizvod
  int p = 2;     // prvi kandidat za delioca
  while (p*p <= n) {
    // zbir delilaca broja faktora p^i u prostoj faktorizaciji
    int zbir_pi = 1;
    while (n % p == 0) {         // ekstrahujemo faktor p^i
      zbir_pi = zbir_pi * p + 1; // azuriramo tekuci proizvod
      n /= p;                    // delimo broj njime
    }
    zbir *= zbir_pi;             // azuriramo globalni zbir
    p++;                         // prelazimo na sledeceg kandidata
  }
  if (n > 1)                 // preostao je jedan prost faktor
    zbir *= (1 + n);
  return zbir - n0;          // polazna vrednost broja n nije potrebna
}

// provera da li je broj savrsen
bool savrsen(int n) {
  return zbirDelilaca(n) == n;
}

int main() {
  // ucitavamo ulazne podatke
  int n, k;
  cin >> n >> k;

  // algoritmom linearne pretrage proveravamo da li u intervalu
  // [n-k, n+k] postoji savrsen broj
  bool postojiSavrsen = false;
  int savrsenBroj;
  for (int i = n-k; i <= n+k; i++) {
    if (savrsen(i)) {
      // savrsen broj je pronadjen
      savrsenBroj = i;
      postojiSavrsen = true;
      break;
    }
  }
  // prikazujemo rezultat
  if (postojiSavrsen)
    cout << savrsenBroj << endl;
  else
    cout << "NE" << endl;
  return 0;
}
```

На крају рецимо и да су савршени бројеви карактеристични по томе што их је веома мало. У првој милијарди то су само бројеви 6, 28, 496, 8128 и 33550336. На основу овог знања, задатак се могао решити и мало "кварно" тако што би се у функцији која испитује да ли је број савршен он просто упоредио са овим бројевима.

```
#include <iostream>
using namespace std;


// provera da li je broj savrsen
bool savrsen(int n) {
  return n == 6 || n == 28 || n == 496 || n == 8128 || n == 33550336;
}

int main() {
  // ucitavamo ulazne podatke
  int n, k;
  cin >> n >> k;

  // algoritmom linearne pretrage proveravamo da li u intervalu
  // [n-k, n+k] postoji savrsen broj
  bool postojiSavrsen = false;
  int savrsenBroj;
  for (int i = n-k; i <= n+k; i++) {
    if (savrsen(i)) {
      // savrsen broj je pronadjen
      savrsenBroj = i;
      postojiSavrsen = true;
      break;
    }
  }
  // prikazujemo rezultat
  if (postojiSavrsen)
    cout << savrsenBroj << endl;
  else
    cout << "NE" << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Пријатељски бројеви

Поставка: Бројеви су пријатељски, ако је збир делилаца првог броја једнак другом, а збир делилаца другог броја једнак првом броју (у збир делилаца броја се убраја број 1, али не и сам тај број). Напиши програм који исписује све парове пријатељских бројева такве да оба броја леже у датом интервалу.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају бројеви a и b ($1 \leq a \leq b \leq 500000$).

Излаз: На стандардни излаз исписати све тражене парове уређене растући по првом елементу, тако је у сваком пару први број мањи или једнак од другога.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1	6 6
1000	28 28
	220 284
	496 496

Пример 2

Улаз	*Излаз*
300000	308620 389924
400000	356408 399592

Решење: Слично као у задатку Савршени бројеви и у овом задатку је кључна функција она која израчунава збир делилаца датог броја. Њену имплементацију можемо потпуно преузети из тог задатка.

Што се тиче проналажења пријатељских бројева, на први поглед може деловати да треба испитати сваки пар бројева $i \leq j$ из интервала $[a, b]$, и проверити да ли је збир делилаца од i једнак j и да ли је збир делилаца од j једнак i. С обзиром на потенцијално велику ширину интервала, испитивање свих парова бројева траје прилично дуго (такав алгоритам био би квадратне сложености у односу на ширину интервала, чак иако би се збирови делилаца свих бројева унапред израчунали).

```
#include <iostream>

using namespace std;

// zbir delilaca broja n (racunajuci 1, ali ne racunajuci n)
int zbirDelilaca(int n) {
  int n0 = n;    // pamtimo polaznu vrednost broja n
  int zbir = 1;  // zbir delilaca kao proizvod
  int p = 2;     // prvi kandidat za delioca
  while (p*p <= n) {
    // zbir delilaca broja faktora p^i u prostoj faktorizaciji
    int zbir_pi = 1;
    while (n % p == 0) {         // ekstrahujemo faktor p^i
      zbir_pi = zbir_pi * p + 1; // azuriramo tekuci proizvod
      n /= p;                    // delimo broj njime
    }
    zbir *= zbir_pi;             // azuriramo globalni zbir
    p++;                         // prelazimo na sledeceg kandidata
  }  // broj racunara koji nas zanima
  if (n > 1)                 // preostao je jedan prost faktor
    zbir *= (1 + n);
  return zbir - n0;          // polazna vrednost broja n nije potrebna
}

// Brojevi su prijateljski ako je suma delilaca prvog jednaka drugom
// broju i obratno. Funkcija pronalazi i stampa sve razlicite
// neuređene parove prijateljskih brojeva u datom intervalu [a, b]
void prijateljskiBrojevi(int a, int b) {
```

```
  // proveravamo sve parove brojeva
  for (int i = a; i < b; i++)
    for (int j = i; j <= b; j++)
      if (zbirDelilaca(i) == j && zbirDelilaca(j) == i)
        cout << i << " " << j << endl;
}

int main() {
  int a, b;
  cin >> a >> b;
  prijateljskiBrojevi(a, b);
  return 0;
}
```

Кључна опаска за оптимизацију је да сваки број има јединственог потенцијалног пријатеља (то је број који је једнак збиру његових делилаца). Суштински у програму филтрирамо серију бројева из интервала $[a, b]$ на основу услова да је збир делилаца збира делилаца броја једнака њему самом. Зато се за сваки број i из интервала $[a, b]$ израчунава потенцијални пријатељ j (једнак збиру делилаца броја i), а онда се проверава да ли j припада интервалу $[a, b]$, да ли је $i \leq j$ и на крају, да ли је и збир делилаца броја j једнак броју i.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// zbir delilaca broja n (racunajuci 1, ali ne racunajuci n)
int zbirDelilaca(int n) {
  int n0 = n;    // pamtimo polaznu vrednost broja n
  int zbir = 1;  // zbir delilaca kao proizvod
  int p = 2;     // prvi kandidat za delioca
  while (p*p <= n) {
    // zbir delilaca broja faktora p^i u prostoj faktorizaciji
    int zbir_pi = 1;
    while (n % p == 0) {         // ekstrahujemo faktor p^i
      zbir_pi = zbir_pi * p + 1; // azuriramo tekuci proizvod
      n /= p;                    // delimo broj njime
    }
    zbir *= zbir_pi;             // azuriramo globalni zbir
    p++;                         // prelazimo na sledeceg kandidata
  }  // broj racunara koji nas zanima
  if (n > 1)                 // preostao je jedan prost faktor
    zbir *= (1 + n);
  return zbir - n0;          // polazna vrednost broja n nije potrebna
}

// Brojevi su prijateljski ako je suma delilaca prvog jednaka drugom
// broju i obratno. Funkcija pronalazi i stampa sve razlicite
```

```
// neuređene parove prijateljskih brojeva u datom intervalu [a, b]
void prijateljskiBrojevi(int a, int b) {
  for (int i = a; i <= b; i++) { // proveravamo sve brojeve do maksimuma
    // jedini potencijalni prijatelj broja i je njegov zbir delilaca
    int j = zbirDelilaca(i);
    if (a <= j && j <= b && i <= j && zbirDelilaca(j) == i)
      cout << i << " " << j << endl;
  }
}

int main() {
  int a, b;
  cin >> a >> b;
  prijateljskiBrojevi(a, b);
  return 0;
}
```

Задатак: Прост број

Поставка: Напиши програм који испитује да ли је унети природан број прост (већи је од 1 и нема других делилаца осим 1 и самог себе).

Улаз: Са стандардног улаза се уноси природан број n ($1 \leq n \leq 10^9$).

Излаз: На стандардни излаз исписати `DA` ако је број n прост тј. `NE` ако није.

Пример		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`17`	`DA`	`903543481`	`NE`

Решење: Природан број је прост ако је већи од 1 и ако није дељив ни са једним бројем осим са један и са самим собом. По дефиницији број 1 није прост. Дакле, број већи од 1 је прост ако нема ни једног правог делиоца. Потребно је дакле извршити претрагу скупа потенцијалних делилаца и проверити да ли неки од њих стварно дели број n.

Скуп потенцијалних делилаца је скуп свих природних бројева од 2 до $n - 1$ и наивна имплементација их све проверава. Пошто се провера сваког делиоца извршава израчунавањем једног остатка при дељењу, сложеност овог приступа одговара броју делилаца и једнака је $O(n)$.

```
#include <iostream>

using namespace std;

bool prost(int n) {
  if (n == 1) return false;
  for (int i = 2; i < n; i++)
    if (n % i == 0)
      return false;
```

```
  return true;
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  cout << (prost(n) ? "DA" : "NE") << endl;
  return 0;
}
```

Међутим, како смо већ описали у задатку Савршени бројеви, делиоци броја се увек јављају у пару. На пример, делиоци броја 100 организовани по паровима су (1, 100), (2, 50), (4, 25) (5, 20) и (10, 10). Ако је i делилац броја n, делилац је и број $\frac{n}{i}$. При том, ако је $i \geq \sqrt{n}$, тада је $\frac{n}{i} \leq \sqrt{n}$. Дакле, важи теорема која каже да број има праве делиоце који су већи или једнаки вредности $\sqrt{n}$ ако и само ако има делиоце који су мањи или једнак вредности $\sqrt{n}$. То нам даје могућност да претрагу потенцијалних делилаца редукујемо само на интервал $[2, \sqrt{n}]$, јер ако број нема делилаца мањих или једнаких вредности $\sqrt{n}$, онда не може да има делилаца већих или једнаких тој вредности, тј. нема правих делилаца и прост је. Обратите пажњу да је ово скраћивање интервала веома значајно (ако је највећи број око 10^9 тј. око милијарду, уместо милијарду делилаца потребно је проверавати само њих корен из милијарду, што је тек нешто изнад тридесет хиљада). Сложеност овог алгоритма је $O(\sqrt{n})$. Ово је пример алгоритма у ком је сложеност поправљена тако што је елиминисан (одсечен) значајан део простора претраге за који можемо да докажемо да га није неопходно проверавати.

Сама ипмлементација је једноставна и заснива се на алгоритму линеарне претраге (који смо описали, на пример, у задатку Негативан број). У посебној функцији на почетку проверавамо специјалан случај броја 1 (ако је n једнако 1, враћамо вредност `false`). Након тога, у петљи проверавамо потенцијалне делиоце од 2 до $\sqrt{n}$. Један начин да одредимо горњу границу је да употребимо библиотечку функцију `sqrt` тј. `Math.Sqrt`. Међутим, рад са реалним бројевима је могуће у потпуности избећи тако што се уместо услова $i \leq \sqrt{n}$ употреби услов $i \cdot i \leq n$. За сваку вредност i проверава се да ли је делилац броја i (израчунавањем остатка при дељењу). Чим се утврди да је i делилац броја n функција може да врати `false` (тиме се уједно прекида извршавање петље). На крају петље, функција може да врати `true`, јер није пронађен ниједан делиоц мањи или једнак од $\sqrt{n}$, па на основу теореме које смо доказали не може постојати ни један делилац изнад те вредности и број је прост.

```
#include <iostream>

using namespace std;

bool prost(int n) {
  if (n == 1) return false;
  for (int i = 2; i*i <= n; i++)
    if (n % i == 0)
      return false;
  return true;
}
```

```
int main() {
  int n;
  cin >> n;
  cout << (prost(n) ? ”DA” : ”NE”) << endl;
  return 0;
}
```

```
#include <iostream>

using namespace std;

bool prost(int n) {
  int i = 2;
  while (i*i <= n && n % i != 0)
    i++;
  return n > 1 && i*i > n;
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  cout << (prost(n) ? ”DA” : ”NE”) << endl;
  return 0;
}
```

Још једна могућа оптимизација је да се на почетку провери да ли је број паран а да се након тога проверавају само непарни делиоци, међутим, та оптимизација не доноси превише (обилазак до корена је смањио број потенцијалих кандидата са милијарде на тек тридесетак хиљада, а провера само парних делилаца тај број смањује на петнаестак хиљада, што није значајна уштеда јер је већ и провера 30000 вредности на данашњим рачунарима веома брза).

```
#include <iostream>

using namespace std;

// funkcija koja proverava da li je dati broj prost
bool prost(int n) {
  if (n == 1) return false;     // broj 1 nije prost
  if (n == 2) return true;      // broj 2 jeste prost
  if (n % 2 == 0) return false; // ostali parni brojevi nisu prosti
  // proveravamo neparne delioce od 3 do korena iz n
  for (int i = 3; i*i <= n; i += 2)
    if (n % i == 0)
      return false;
  // nismo nasli delioca - broj jeste prost
  return true;
}
```

```
int main() {
  int n;
  cin >> n;
  cout << (prost(n) ? "DA" : "NE") << endl;
  return 0;
}
```

Програм се још мало може убрзати ако се примети да су сви прости бројеви већи од 2 и 3 облика $6k-1$ или $6k+1$, за $k \geq 1$ (наравно, обратно не важи). Заиста, бројеви облика $6k$, $6k+2$ и $6k+4$ су сигурно парни тј. дељиви са 2, бројеви облика $6k+3$ су дељиви са 3, тако да су једини преостали $6k+1$ и $6k+5$, при чему су ови други сигурно облика $6k'-1$ (за $k' = k+1$). Дакле, уместо да проверавамо дељивост са свим непарним бројевима мањим од корена, можемо проверавати дељивост са свим бројевима облика $6k-1$ или $6k+1$, чиме избегавамо проверу са једним на свака три непарна броја и програм убрзамо сходно томе.

```
#include <iostream>
using namespace std;

bool prost(int n) {
  if (n == 1 ||
      (n % 2 == 0 && n != 2) ||
      (n % 3 == 0 && n != 3))
    return false;
  for (int k = 1; (6*k - 1) * (6*k - 1) <= n; k++)
    if (n % (6 * k + 1) == 0 || n % (6 * k - 1) == 0)
      return false;
  return true;
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  cout << (prost(n) ? "DA" : "NE") << endl;
}
```

Ако је потребно за више бројева одједном проверити да ли су прости, уместо проверавања сваког појединачног, боље је употребити Ератостеново сито (види задатак Ератостеново сито).

Задатак: Најближи прост број

Поставка: Аутор задатака за такмичење треба да састави тест пример за програм који испитује да ли је дати број прост. Пошто жели да испита програм на примерима разне тежине, потребно је да одреди неки прост број који је близу милијарде, неки који је близу милиона и слично. Помози му тако што ћеш написати програм који одређује најближи прост број унетом броју.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се број n ($1 \leq n \leq 10^9$).

Излаз:

- Ако је број n прост, испиши поруку `prost broj` и вредност броја n одвојене размаком.
- Ако постоје два броја која су на истом растојању од броја n испиши поруку `dva broja` и просте бројеве, одвојене размацима. Исписати прво мањи, па онда већи прост број.
- Ако је јединствен најближи прост број мањи од броја n испиши поруку `manji broj` и вредност тог броја, раздвојене размаком.
- Ако је јединствен најближи прост број већи од броја n испиши поруку `veci broj` и вредност тог броја, раздвојене размаком.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`12`	`dva broja 11 13`	`19`	`prost broj 19`	`24`	`manji broj 23`

Решење: Функцију којом се проверава да ли је дати број прост можемо преузети из задатка Прост број. Са том функцијом на располагању, имплементација решења представља малу вежбу алгоритма линеарне претраге и логичких услова и гранања. Након учитавања броја n проверавамо да ли је он прост. Ако јесте приказујемо одговарајућу поруку, а ако није, онда започињемо претрагу за најближим простим бројевима тако што ћемо у првом кораку проверавати бројеве $n-1$ и $n+1$, у другом $n-2$ и $n+2$, у трећем $n-3$ и $n+3$ и тако даље, све док не наиђемо на неки број који јесте прост. Дакле, одржавамо променљиву k која креће од 1 и у сваком кораку петље се увећава за 1, проверавајући при том бројеве $n-k$ и $n+k$. У сваком кораку петље непохдно је да и мањи и већи прост број буду проверени, да би се могла пријавити одговарајућа порука ако су оба та броја проста. Приликом умањивања треба бити обазриви и повести рачуна да број који се проверава не буде негативан (пре провере броја проверавамо да ли је $n \geq k$). Петља се завршава када се деси да је неки од бројева $n-k$ или $n+k$ прост.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// funkcija koja proverava da li je dati broj prost
bool prost(int n) {
  if (n <= 1) return false;     // brojevi <= 1 nisu prosti
  if (n == 2) return true;      // broj 2 jeste prost
  if (n % 2 == 0) return false; // ostali parni brojevi nisu prosti
  // proveravamo neparne delioce od 3 do korena iz n
  for (int i = 3; i*i <= n; i += 2)
    if (n % i == 0)
      return false;
  // nismo nasli delioca - broj jeste prost
  return true;
}
```

```
int main() {
  int n;
  cin >> n;

  if (prost(n))
    cout << "prost broj " << n << endl;
  else {
    bool manjiJeProst = false;  // jos nije pronađen prost broj manji od n
    bool veciJeProst = false; // jos nije pronađen prost broj veci od n
    int k = 1;  // rastojanje od broja n
    // dok nismo nasli prost broj manji ili veci od datog
    while (!manjiJeProst && !veciJeProst) {
      if (n >= k && prost(n - k)) // da li je n-k pozitivan i prost broj
        manjiJeProst = true;
      if (prost(n + k))           // da li je n+k prost broj
        veciJeProst = true;

      if (manjiJeProst && veciJeProst)
        // dva prosta broja su na istom rastojanju
        cout << "dva broja" << " " << n - k << " " << n + k << endl;
      else if (manjiJeProst)
        // manji broj je prost
        cout << "manji broj " << n - k << endl;
      else if (veciJeProst)
        // veci broj je prost
        cout << "veci broj " << n + k << endl;
      k++; // uvecavamo rastojanje
    }
  }
  return 0;
}
```

Задатак: Ератостеново сито

Поставка: Напиши програм који одређује број простих бројева у интервалу $[a, b]$ и њихов збир (ако збир има више од 6 цифара, исписати само последњих 6).

Улаз: Са стандардног улаза уносе се бројеви и b ($1 \leq a \leq b \leq 10^7$), сваки у посебној линији.

Излаз: На стандардном излазу приказати у једној линији, одвојени једним бланко знаком, број простих бројева из интервала $[a, b]$ и тражени збир.

Пример

Улаз	*Излаз*
1 1000	168 76127

Решење: Први начин за исписивање свих простих бројева мањих од датог броја јесте

имплементација функције која за конкретан број проверава да ли је прост (њу смо описали у задатку Прост број) и да се затим, у петљи, за сваки број мањи од датог провери да ли је прост коришћењем те функције.

На основу спецификације задатка потребно је одредити највише 6 последњих цифара збира свих простих бројева из интервала $[a, b]$, што, на основу задатка Операције по модулу, знамо да је еквивалентно одређивању збира тих бројева по модулу 10^6. У петљи пролазимо кроз све бројеве од a до b, вршимо филтрирање на основу услова да је број прост и вршимо бројање и сабирање добијене филтриране серије. Напоменимо да се збир рачуна тако што се на почетку иницијализује на нулу, а затим се у сваком кораку израчунава сабирање збира и текућег простог броја по модулу 10^6 (`zbir = (zbir % 1000000 + p % 100000) % 100000`). Пошто ће у сваком кораку збир бити мањи од 10^6, и пошто не постоји опасност од прекорачења када се у обзир узме максимална вредност простих бројева који се сабирају, претходни корак се може заменити кораком `zbir = (zbir + p) % 1000000`.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

// funkcija koja proverava da li je dati broj prost
bool prost(int n) {
  if (n == 1) return false;     // broj 1 nije prost
  if (n == 2) return true;      // broj 2 jeste prost
  if (n % 2 == 0) return false; // ostali parni brojevi nisu prosti
  // proveravamo neparne delioce od 3 do korena iz n
  for (int i = 3; i*i <= n; i += 2)
    if (n % i == 0)
      return false;
  // nismo nasli delioca - broj jeste prost
  return true;
}

int main() {
  // ucitavamo granice intervala
  int a, b;
  cin >> a >> b;

  // odredjujemo broj i zbir po modulu 1000000 prostih brojeva iz
  // intervala [a, b]
  int zbir = 0, broj = 0;
  for (int i = a; i <= b; i++)
    if (prost(i)) {
      zbir = (zbir + i) % 1000000;
      broj++;
    }
```

```
  // prijavljujemo rezultat
  cout << broj << " " << zbir << endl;
  return 0;
}
```

Бољи резултат од испитивања појединачних бројева може се добити применом алгоритма познатог као Ератостеново сито. Основна идеја алгоритма је да се прво напишу сви бројеви од 1 до датог броја n, затим да се прецрта број 1 (јер он по дефиницији није прост), након њега сви умношци броја 2 (нису прости зато што су дељиви са 2, док број 2 остаје непрецртан јер је он прост), затим умношци броја 3 (нису прости јер су дељиви бројем 3), затим умношци броја 5 (нису прости зато што су дељиви бројем 5) и тако даље. Умношке сложених бројева нема потребе посебно прецртавати јер су они већ прецртани током прецртавања умножака неког од њихових простих фактора (на пример, нема потребе посебно прецртавати умношке броја 4 јер су они већ прецртани током прецртавања умножака броја 2). Такође, приликом прецртавања умножака броја i довољно је кренути од $i \cdot i$ јер су мањи умношци већ прецртани раније (имају праве факторе мање од i). Потребно је да се поступак понавља све док се не прецртају умношци свих простих бројева који нису већи од корена броја n. Бројеви који су остали непрецртани су прости (јер знамо да немају правих делилаца мањих или једнаких корену од n, па самим тим и мањих или једнаких свом корену, а пошто немају делилаца испод вредности корена, на основу теореме коју смо доказали у задатку Прост број, немају правих делилаца ни изнад вредности корена). Прецртавање бројева моделоваћемо низом (или вектором) који садржи логичке вредности (вредности типа `bool`) и прецртане бројеве означаваћемо са `false`, а непрецртане са `true`.

Одређивање простих бројева (помоћу поменутог низа тј. вектора) реализоваћемо у засебној функцији, јер та функција може бити корисна и у многим наредним задацима.

Рецимо и да је без обзира на то што су нама потребни само бројеви из интервала од a до b, у Ератостеновом ситу потребно вршити анализу свих бројева из интервала од 0 до b (јер се прецртавање мора вршити и бројевима мањим од a).

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

// funkcija koja popunjava logicki niz podacima o prostim brojevima iz
// intervala [0, n]
void Eratosten(vector<bool>& prost, int n) {
  // alociramo potreban prostor
  prost.resize(n + 1, true);
  prost[0] = prost[1] = false; // 0 i 1 po definiciji nisu prosti
  // brojevi ciji se umnosci precrtavaju
  for (int i = 2; i * i <= n; i++)
    // nema potrebe precrtavati umnoske slozenih brojeva
    if (prost[i]) {
      // precrtavamo umnoske broja i i to krenuvsi od i*i
      for (int j = i * i; j <= n; j += i)
```

```
        prost[j] = false;
    }
}

int main() {
  // ucitavamo granice intervala
  int a, b;
  cin >> a >> b;

  // odredjujemo proste brojeve u intervalu [0, b]
  vector<bool> prost;
  Eratosten(prost, b);

  // odredjujemo broj i zbir po modulu 1000000 prostih brojeva iz
  // intervala [a, b]
  int zbir = 0, broj = 0;
  for (int i = a; i <= b; i++)
    if (prost[i]) {
      zbir = (zbir + i) % 1000000;
      broj++;
    }

  // prijavljujemo rezultat
  cout << broj << " " << zbir << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Прости бројеви

Поставка: Напиши програм који исписује све просте бројеве међу унетима. Програм може да погреши у малом броју случајева, али треба да ради брзо.

Улаз: Свака линија стандардног улаза (има их највише 1000) садржи један природан број мањи од 10^{15}.

Излаз: На стандардни излаз исписати оне унете бројеве који су прости.

Пример

Улаз	*Излаз*
7916413003241	7916413003241
16819606497999	33711348088423
33711348088423	60894005190391
99222770171192	
60894005190391	
4917349288929	

Решење:

Провера делилаца

За сваки учитани број можемо проверити да ли је прост, коришћењем провере делилаца, тј. поступака описаних у задатку Прост број.

```
#include <iostream>

using namespace std;

bool prost(unsigned long long n) {
  if (n == 1 ||
      (n % 2 == 0 && n != 2) ||
      (n % 3 == 0 && n != 3))
    return false;
  for (unsigned long long k = 1; (6*k - 1) * (6*k - 1) <= n; k++)
    if (n % (6 * k + 1) == 0 || n % (6 * k - 1) == 0)
      return false;
  return true;
}

int main() {
  unsigned long long a;
  while (cin >> a)
    if (prost(a))
      cout << a << endl;
  return 0;
}
```

Фермаов тест прималности

Један веома једноставан пробабилистички тест прималности заснован је на малој Фермаовој теореми која тврди да за прост број p и произвољан број a који није дељив бројем p важи

$$a^{p-1} \bmod p = 1.$$

На пример, ако је $p = 7$ и $a = 4$, важи да је $4^6 = 4096 = 585 \cdot 7 + 1$ тј. да је $4^6 \bmod 7 = 1$.

Један веома леп, а крајње елементаран начин да се докаже мала Фермаова теорема је да се размотре све ниске дужине p у којима се јављају слова из азбуке која има a симбола. Таквих ниски има a^p. На пример, ако је $p = 3$ и $a = 2$, то су ниске XXX, XXY, XYX, XYY, YXX, YXY, YYX и YYY. Замислимо сада да су слова сваке ниске написана на кругу. Тиме све дате ниске делимо у одређене групе тако да две ниске припадају истој групи ако и само ако се добијају читањем слова са истог круга. У једној групи је само XXX, у другој су XXY, XYX и YXX, у трећој групи су XYY, YYX и YXY, док је у последњој, четвртој групи само YYY. У општем случају постојаће a група које су једночлане и у њима ће бити ниске које садрже p понављања једног истог симбола из азбуке. Све остале групе имаће по p елемената. Наиме, ако би се запис дат на неком кругу могао прочитати на два иста начина кренувши од два различита слова, тада би тај запис морао бити периодичан и период би морао да дели дужину ниске. Међутим, пошто је p прост број, његови једини делиоци су 1 и p, тако да свака група има или 1 или p различитих елемената.

Дакле, важи да је $a^p = x \cdot p + a$, где је x број група са по p елемената, да је $a^p - a = x \cdot p$ тј. да је $a(a^{p-1} - 1) = x \cdot p$. Пошто a није дељиво са p и не може да има заједничких простих фактора са њим (јер је p прост), следи да $a^{p-1} - 1$ мора да буде дељиво са p, што је урпаво тврђење мале Фермаове теореме.

Напреднији докази засновани су на Лагранжовој теореми теорије група. Наиме, остаци по модулу p тј. бројеви $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ чине групу при операцији множења по модулу p (налажење инверза сваког елемента описано је у задатку Модуларни инверз). Ред било ког елемента a из овог скупа је најмањи број k такав да је $a^k \bmod p = 1$ и на основу Лагранжове теореме ред елемента мора да дели ред групе тј. број њених елемената који је $p-1$. Дакле, важи да је $a^{p-1} \bmod p = a^{km} \bmod p = (a^k)^m \bmod p = (a^k \bmod p)^m \bmod p = 1^m \bmod p = 1$.

Мала Фермаова теорема може се схватити и као специјални случај Ојлерове теореме (коју описујемо у задацима Модуларни инверз и Ојлерова функција) која каже да је $a^{\phi(n)} \bmod n = 1$, где је ϕn број елемената који су узајамно прости са бројем n. Ако је n прост број и ако га обележимо са p, тада је број узајамно простих бројева у односу на њега једнак $p-1$, одакле директно следи мала Фермаова теорема.

Пошто изложилац може бити велики, степен по модулу морамо рачунати алгоритмом брзог степеновања, како је описано у задатку . Да бисмо израчунали $a^2 \bmod p$, можемо применити формулу $((a \bmod p) \cdot (a \bmod p)) \bmod p$, међутим, и у том случају морамо множити два 64-битна броја (јер због ограничења да је $p < 10^{15}$, за његову репрезентацију морамо употребити 64-битне бројеве). Производ два 64-битна броја може лако прекорачити опсег 64-битних бројева и за репрезентацију овог производа, пре проналажења остатка при дељењу са p, морамо употребити бар 128-битни тип података. У стандрадном језику C++ немамо такав тип података, међутим, преводиоци GCC и Clang нам на 64-битних архитектурама рачунара пружају типове `__int128` и `unsigned __int128`.

```
#include <iostream>
#include <random>
using namespace std;

typedef uint64_t ull;
typedef unsigned __int128 uLL;

uLL stepen(ull a, ull n, ull m) {
  if (n == 0)
    return 1;
  if (n % 2 == 0)
    return (stepen(((uLL)(a % m) * (uLL)(a % m)) % m, n/2, m)) % m;
  return ((a % m)*stepen(a, n-1, m)) % m;
}

bool fermaovTest(unsigned long long p, int k) {
  if (p == 1) return false;
  if (p == 2 || p == 3) return true;
  default_random_engine gen;
```

```
  uniform_int_distribution<unsigned> dist(2, p-2);
  for (int i = 0; i < k; i++) {
    unsigned long long a = dist(gen);
    if (stepen(a, p-1, p) != 1)
      return false;
  }
    return true;
}

int main() {
  unsigned long long a;
  while (cin >> a)
    if (fermaovTest(a, 100))
      cout << a << endl;
}
```

Задатак: Број простих у интервалима

Поставка: Напиши програм који брзо може да утврди колико у датим интервалима природних бројева има простих.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број n ($1 \leq n \leq 10000$) који представља број интервала, затим, у наредних n линија по два броја a и b ($1 \leq a < b \leq 10^6$) који представљају крајеве затвореног интервала $[a, b]$.

Излаз: На стандардни излаз исписати n природних бројева (сваки у посебној линији) који представљају број простих бројева у сваком интервалу $[a, b]$.

Пример

Улаз	*Излаз*
3	25
1 100	143
100 1000	1061
1000 10000	

Решење:

Директно решење

Наиван начин да се задатак реши је да се учитава интервал по интервал $[a, b]$, да се у петљи анализирају сви бројеви од a до b, да се за сваки помоћном функцијом проверава да ли је прост (такву функцију смо видели, на пример, у задатку Прост број), и да се броје они који то задовољавају. Велики проблем овог решења је то што ће се због очекиваног преклапања интервала за пуно бројева више пута испитивати да ли су прости. Сложеност овог поступка у најгорем случају је $O(n \cdot m \cdot \sqrt{m})$ где је n број интервала, а m највећи број у итервалима. С обзиром на ограничења $n \leq 10^4$, а $m \leq 10^6$, јасно је да би овај поступак одузео пуно времена.

```
#include <iostream>
#include <vector>
```

```
#include <algorithm>

using namespace std;

// funkcija ispituje da li je broj prost
bool prost(int n) {
  if (n < 2) return false;
  for (int i = 2; i*i <= n; i++)
    if (n % i == 0)
      return false;
  return true;
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);

  // broj intervala
  int n;
  cin >> n;

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    // ucitavamo interval
    int a, b;
    cin >> a >> b;
    // brojimo proste brojeve u njemu
    int brojProstih = 0;
    for (int i = a; i <= b; i++)
      if (prost(i))
        brojProstih++;
    // ispisujemo rezultat
    cout << brojProstih << '\n';
  }

  return 0;
}
```

Ератостеново сито

Ератостеновим ситом које смо приказали у задатку Ератостеново сито могуће је много брже имплементирати истовремену проверу да ли су сви бројеви до неке дате границе прости. У почетној фази се креира низ логичких променљивих тако да је на позицији i у том низу вредност `true` ако и само ако је број i прост. Сито можемо примењивати за сваки интервал појединачно, али је много боље ако одредимо максимални десни крај свих интервала и направимо сито до тог броја (након тога ћемо за сваки број у свим интервалима моћи у константном времену да проверимо да ли је прост). У овом сценарију потребно је да прво складиштимо све интервале, да бисмо се могли вратити на њихову обраду када им одредимо максимални десни крај.

Поступак заснован на Ератостеновом ситу је много бољи него понављање провере за

сваки број појединачно. Сложеност сита се може проценити као $O(m \cdot \log\log m)$, па се укупна сложеност процењује као $O(m \cdot \log\log m + n \cdot m)$ - сито се изврши једном, а затим се n пута проверава по највише m бројева, при чему је свака та провера константне сложености. Фактор $\log\log m$ је веома мали, тако да се сложеност може проценити и са $O(n \cdot m)$, што је опет превише споро за ограничења дата у овом задатку. Напоменимо да смо меморијску сложеност програма подигли за простор потребан да се складишти $O(m)$ логичких променљивих.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;


void Eratosten(int n, vector<bool>& prosti) {
  // alociramo potreban prostor
  prosti.resize(n + 1, true);
  prosti[0] = prosti[1] = false; // 0 i 1 po definiciji nisu prosti
  // brojevi ciji se umnosci precrtavaju
  for (int i = 2; i * i <= n; i++)
    // nema potrebe precrtavati umnoske slozenih brojeva
    if (prosti[i]) {
      // precrtavamo umnoske broja i i to krenuvsi od i*i
      for (int j = i * i; j <= n; j += i)
        prosti[j] = false;
    }
}


int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  // broj intervala
  int n;
  cin >> n;

  // ucitavamo sve intervale
  typedef pair<int, int> interval;
  vector<interval> intervali(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> intervali[i].first >> intervali[i].second;

  // odredjujemo maksimalni desni kraj intervala
  int max = max_element(intervali.begin(), intervali.end(),
                        [](interval p1, interval p2) {
                          return p1.second < p2.second;
                        })->second;
```

```
  // za sve brojeve iz [0, max] odredjujemo koji su brojevi prosti
  vector<bool> prosti;
  Eratosten(max, prosti);

  // obradjujemo sve intervale
  for (auto interval : intervali) {
    // izracunavamo broj prostih brojeva u tekucem intervalu
    int brojProstih = 0;
    for (int i = interval.first; i <= interval.second; i++)
      if (prosti[i])
        brojProstih++;
    // ispisujemo rezultat
    cout << brojProstih << endl;
  }

  return 0;
}
```

Разлагање интервала на разлику два интервала-префикса

Дакле, критично је убрзати корак израчунавања броја простих бројева у интервалу $[a, b]$, чак и када се провера да ли је сваки појединачни број прост врши веома брзо. Кључна идеја је она која се може видети и у задацима Аритметички троугао или Сегмент датог збира у низу целих бројева. Просте бројеве у интервалу $[0, b]$ можемо разложити на просте бројеве који припадају интервалу $[0, a-1]$ и просте бројеве који припадају интервалу $[a, b]$. Пошто су ова два скупа дисјунктна, број простих бројева у интервалу $[a, b]$ једнак је разлици између броја простих бројева у интервалу $[0, b]$ и броја простих бројева у интервалу $[0, a-1]$. Дакле, ако за сваку вредност x до највећег десног краја израчунамо број простих бројева у интервалу $[0, x]$, за сваки интервал $[a, b]$ број простих бројева можемо добити у константном времену. Мала мана овога је што ангажујемо додатни простор од m целих бројева (мада је то могуће редокувати, ако је потребно, тако што памтимо само вредности придружене крајевима наших интервала). Број простих бројева у интервалима $[0, x]$ опет се може израчунавати инкрементално (слично као што смо, на пример, збирове префикса рачунали инкрементално у задатку Префикс највећег збира. Ови бројеви чине рекурентну серију и број бројева у интервалу $[0, x]$ је исти као број бројева у интервалу $[0, x-1]$ ако x није прост број, тј. за један је већи од броја простих бројева у интервалу $[0, x-1]$, ако x јесте прост. Ако низ добијен Ератостеновим ситом замислимо као низ индикатора (нула и јединица), онда се број простих бројева у сваком интервалу $[0, x]$ заправо израчунава као низ парцијалних сума низа индикатора. Да бисмо израчунали парцијалне суме потребно нам је $O(m)$ операција, што укупну сложеност своди на $O(m \cdot \log \log m + m + n)$, што је практично линеарна сложеност.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
```

```cpp
using namespace std;

// Funkcija koja Eratostenovim sitom za svaki broj iz intervala
// [0, n] odredjuje da li je prost
void Eratosten(int n, vector<bool>& prosti) {
  // alociramo potreban prostor
  prosti.resize(n + 1, true);
  prosti[0] = prosti[1] = false; // 0 i 1 po definiciji nisu prosti
  // brojevi ciji se umnosci precrtavaju
  for (int i = 2; i * i <= n; i++)
    // nema potrebe precrtavati umnoske slozenih brojeva
    if (prosti[i]) {
      // precrtavamo umnoske broja i i to krenuvsi od i*i
      for (int j = i * i; j <= n; j += i)
        prosti[j] = false;
    }
}


int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  // broj intervala
  int n;
  cin >> n;

  // ucitavamo sve intervale
  typedef pair<int, int> interval;
  vector<interval> intervali(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> intervali[i].first >> intervali[i].second;

  // odredjujemo maksimalni desni kraj ucitanih intervala
  int max = 0;
  for (auto interval : intervali)
    if (interval.second > max)
      max = interval.second;

  // za sve brojeve iz [0, max] odredjujemo koji su brojevi prosti
  vector<bool> prosti;
  Eratosten(max, prosti);

  // brojProstihDo[i] = broj prostih brojeve iz intervala [0, i]
  vector<int> brojProstihDo(max + 1);
  brojProstihDo[0] = 0;
  for (int i = 1; i <= max; i++)
    brojProstihDo[i] = brojProstihDo[i-1] + prosti[i];
```

```
  // za svaki ucitani interval
  for (auto interval : intervali) {
    // broj prostih iz [a, b] je razlika broja prostih iz [0, b] i
    // broja prostih iz [0, a-1]
    int brojProstih = brojProstihDo[interval.second] -
                      brojProstihDo[interval.first - 1];
    cout << brojProstih << endl;
  }

  return 0;
}
```

Задатак: Растављање на просте чиниоце

Поставка: Ако је дато неколико простих бројева, њихов производ се може веома лако и брзо одредити. Међутим, ако је дат производ, често је веома тешко одредити просте бројеве који га сачињавају. Напиши програм који што ефикасније решава тај проблем.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси један природан број n ($1 \leq n \leq 2 \cdot 10^9$).

Излаз: На стандардни излаз исписати просте чиниоце броја n, уређене од најмањих до највећих, раздвојене размаком.

Пример

Улаз	*Излаз*
`900`	`2 2 3 3 5 5`

Решење: Потенцијални чиниоци f броја n се испитују редом, у петљи, кренувши од броја 2. У сваком кораку испитује се да ли је број n дељив бројем f и док год јесте дељив, у унутрашњој петљи, он се дели бројем f пријављујући при том чинилац f (пошто се у склопу услова унутрашње петље врши провера дељивости n са f, није потребна посебна провера дељивости око те петље). Након тога прелази се на следећи потенцијални чинилац (за један већи од претходног). Иако се може помислити да је за сваки потенцијални чинилац потребно проверити да ли је он прост број (јер нас занимају само прости чиниоци), то није потребно радити. Наиме, у поступку претраге који смо навели, ако текући кандидат f није прост он не може да дели број n. Заиста, ако претпоставимо супротно да f дели n и да је f сложен број, тада би f имао неки прости чинилац мањи од њега и то би уједно био прост чинилац броја n. Међутим, то није могуће јер смо пре увећања броја f на његову текућу вредност утврдили да текући број n не може бити дељив ни једним бројем мањем од f (иначе бисмо га делили са f, а не увећавали f). Дакле сложени чиниоци се елиминишу тако што се утврди да текући број n није дељив њима, што је много ефикасније него примењивати на њих тест простости. Описани поступак траје све док се број n дељењем својим чиниоцима не сведе на број 1.

```
#include <iostream>
```

```
using namespace std;

int main() {
  // ucitavamo broj koji treba rastaviti na proste cinioce
  int n;
  cin >> n;
  int f = 2; // prvi potencijalni prost cinilac je 2
  // dok se broj deljenjem sa svojim prostim ciniocima ne svede na 1
  while (n > 1) {
    while (n % f == 0) {   // dok je n deljivo sa f
      cout << f << " ";    //   prijavljujemo pronađeni prost cinilac
      n /= f;              //   delimo broj njime
    }
    f = f + 1;             //   prelazimo na sledeceg kandidata
  }
  cout << endl;
  return 0;
}
```

Можда је мало изненађујуће, али у претходном решењу се могу избећи угнежђене петље тако што се вредност f у петљи увећава само ако n није био дељив са f (ако јесте, можда ће бити дељив још једном, тако да f задржава своју вредност да би се у наредном кораку петље опет проверила дељивост њоме).

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main() {
  // ucitavamo broj koji treba rastaviti na proste cinioce
  int n;
  cin >> n;
  int f = 2; // prvi potencijalni prost cinilac je 2
  // dok se broj deljenjem sa svojim prostim ciniocima ne svede na 1
  while (n > 1) {
    if (n % f == 0) {  // pronađen je cinilac f koji mora biti prost
      cout << f << " ";        //   prijavljujemo pronađeni prost cinilac
      n /= f;      //   delimo broj njime
    }
    else                 // f nije prost cinilac broja n
      f = f + 1;         //   prelazimo na sledeceg kandidata
  }
  cout << endl;
  return 0;
}
```

Ипак, претходни кôд није оптималан и за бројеве који имају велике просте чиниоце ради веома споро (покушајте извршавање програма нпр. за број 1000000007). Проблем настаје јер се делиоци последњег простог чиниоца испитују све док се не дође

до самог тог броја, што је, већ смо раније видели, врло неефикасно. И у овом случају, ако се покаже да је f веће од квадратног корена броја n, то значи да је текућа вредност броја n прост број и не треба даље тражити његове просте чиниоце.

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main() {
  // ucitavamo broj koji treba rastaviti na proste cinioce
  int n;
  cin >> n;
  int f = 2; // prvi potencijalni prost cinilac je 2
  // dok se broj deljenjem sa svojim prostim ciniocima ne svede na 1
  while (f*f <= n) {
    while (n % f == 0) {    // dok je f prost cinilac broja n
      cout << f << " ";    //   prijavljujemo pronađeni prost cinilac
      n /= f;               //   delimo broj njime
    }
    f = f + 1;          //   prelazimo na sledeceg kandidata
  }
  if (n > 1)            // prijavljujemo n - preostali prost cinilac
    cout << n << " ";
  cout << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Допуна до пуног квадрата

Поставка: Напиши програм који за унети природни број n одређује најмањи број m такав да је $n \cdot m$ потпун квадрат.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси приордни број n ($1 \leq n \leq 2 \cdot 10^9$).

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени број m.

Пример

Улаз	*Излаз*
104	26

Решење: Размотримо број 234. Он се може раставити на просте чиниоце као $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13$. Да би овај број био потпун квадрат потребно је да се сваки чинилац понови паран број пута и зато је тражена допуна $2 \cdot 13$. Заиста, множењем са $2 \cdot 13 = 26$ добија се број $2^2 \cdot 3^2 \cdot 13^2$ који је квадрат броја $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$.

Када се пун квадрат растави на просте чиниоце, сваки чинилац се јавља паран број пута. Ако је број $n = p_1^{k_1} \cdot p_j^{k_j}$, тада је тражена допуна једнака производу оних чинилаца p_i за који је вишеструкост k_i непаран број. Дакле, задатак се једноставно решава применом алгоритма растављања на просте чиниоце који смо видели у задатку Растављање на просте чиниоце. Издвајамо чинилац по чинилац броја и за сваки од њих

бројимо вишеструкост (тако што сваки пут када поделимо број n са неким простим чиниоцем p увећамо вредност бројача k). Када утврдимо да неки чинилац има непарну вишеструкост, тада њиме множимо тренутну вредност броја m (коју иницијализујемо на 1, слично као у задатку Факторијел).

```
#include <iostream>

using namespace std;

long long dopunaDoPunogKvadrata(long long n) {
  // dopuna
  long long m = 1;

  // rastavljamo broj n na proste cinioce

  // kandidat za prost cinilac
  long long p = 2;
  while (p * p <= n) {
    // racunamo visestrukost cinioca p
    int k = 0;
    while (n % p == 0) {
      n /= p;
      k++;
    }
    // ako se cinilac p javlja neparan broj puta tada se on mora
    // javiti u dopuni m
    if (k % 2 != 0)
      m *= p;

    // prelazimo na sledeceg kandidata
    p++;
  }

  // n se sveo na svoj najveci prost cinilac
  if (n > 1)
    // i on mora da ucestvuje u dopuni
    m *= n;

  // vracamo rezultat
  return m;
}

int main() {
  long long n;
  cin >> n;
  cout << dopunaDoPunogKvadrata(n) << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Спортски турнир инсеката

Поставка: Мрави, пчеле и комарци организују спортски турнир и желе да се поделе у тимове, тако да се сваки тим састоји само од једне врсте инсеката, да сви тимови имају исти број чланова (да би се након рунде квалификација унутар сваке врсте могли своје представнике да пошаљу на заједнички турнир) и да је сваки инсект укључен тачно у један тим. Ако се зна број инсеката сваке од три дате врсте, напиши програм који одређује највећи могући број чланова сваког тима.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе три броја из интервала $[1, 2 \cdot 10^9]$, сваки у посебном реду: број мрава, пчела и комараца.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број - тражену величину тима.

Пример

Улаз	*Излаз*
20 30 40	10

Решење: Ако са a, b и c обележимо број сваке од три врсте инсеката, а са t величину сваког тима, бројеви a, b и c морају бити дељиви са t (јер сваки инсект мора бити укључен тачно у један тим). Дакле, тражимо највећи број t који дели бројеве a, b и c, а то је њихов највећи заједнички делилац (НЗД).

НЗД три броја се може одредити као НЗД од НЗД-а прва два и трећег броја ($nzd(a, b, c) = nzd(nzd(a, b), c)$). Довољно је, дакле, да опишемо поступак одређивања НЗД два броја.

Наивна претрага

Један наиван начин да се одреди НЗД је да се употреби линеарна претрага (описана у задатку Негативан број) и да се редом провере сви бројеви од мањег од бројева a и b уназад до 1 и као резултат био би пријављен први који је делилац оба (пошто се бројеви ређају уназад, то би био највећи заједнички делилац).

```
#include <iostream>
#include <algorithm>

using namespace std;

// izracunavanje najveceg zajednickog delioca brojeva a i b
int nzd(int a, int b) {
  for (int d = min(a, b); d >= 1; d--)
    if (a % d == 0 && b % d == 0)
      return d;
  return 1; // necemo nikada stici dovde
}

int main() {
  // ucitavamo 3 broja
```

```
  int a, b, c;
  cin >> a >> b >> c;
  // izracunavamo njihov nzd
  cout << nzd(nzd(a, b), c) << endl;
  return 0;
}
```

Разлагање на просте чиниоце

Још једна могућност била би да се примени факторизација оба броја и да се уоче заједнички прости чиниоци. Факторизација би се вршила на основу поступка описаног у задатку Растављање на просте чиниоце.

```
#include <iostream>

using namespace std;

int nzd(int a, int b) {
  // rezutlat
  int n = 1;
  // tekuci faktor
  int d = 2;
  while (d*d <= a && d*d <= b) {
    // zajednicke proste faktore dodajemo na rezultat
    while (a % d == 0 && b % d == 0) {
      n *= d;
      a /= d; b /= d;
    }
    // uklanjamo preostala pojavljivanja faktora d koja nisu zajednicka
    while (a % d == 0)
      a /= d;
    while (b % d == 0)
      b /= d;
    // prelazimo na naredni faktor
    d++;
  }
  // manji od dva broja je prost - proveravamo da li je on poslednji
  // zajednicki prost faktor
  if (a % b == 0)
    n *= b;
  else if (b % a == 0)
    n *= a;
  return n;
}

int main() {
  // ucitavamo 3 broja
  int a, b, c;
  cin >> a >> b >> c;
```

```
  // izracunavamo njihov nzd
  cout << nzd(nzd(a, b), c) << endl;
  return 0;
}
```

Еуклидов алгоритам

За одређивање НЗД најбоље је употребити чувени Еуклидов алгоритам. НЗД било ког броја a и нуле је тај број a (он дели и нулу и самог себе и највећи је такав број јер није могуће да неки број већи од a дели број a). Такође, НЗД бројева a и b, када b није нула, једнак је НЗД броја b и остатка при дељењу a бројем b, тј. $nzd(a, b) = nzd(b, a \bmod b)$.

Докажимо формално претходон тврђење. На основу дефиниције целобројног дељења важи да је $a = (a \operatorname{div} b) \cdot b + (a \bmod b)$. Обележимо са d НЗД бројева b и $a \bmod b$. Да бисмо доказали да је он уједно НЗД бројева a и b довољно је доказати да он дели та два броја и да сваки број који дели та два броја дели њега. Пошто број d дели бројеве b и $a \bmod b$, он дели оба сабирка на десној страни, па зато дели и њихов збир који је једнак a и зато дели и a и b. Даље, ако неки број d' дели бројеве a и b он мора делити и број $\bmod b$ (јер се он може исказати као разлика два броја дељивих бројем d'), па пошто је d' делилац бројева b и $a \bmod b$, он мора делити и њихов НЗД тј. мора делити број d.

Еуклидов алгоритам, дакле, допушта веома једноставну рекурзивну карактеризацију.

```
int nzd(int a, int b) {
    if (b == 0)
       return a;
    else
       return nzd(b, a % b);
}
```

Ипак, имплементацију Еуклидовог алгоритма вршимо итеративно тако што у петљи која се извршава све док је број b већи од нуле пар променљивих (a, b) мењамо вредностима $(b, a \bmod b)$. Наивни покушај да се то уради на следећи начин:

```
a = b;
b = a % b;
```

није коректан, јер се приликом израчунавања остатка користи промењена вредност промењиве `a`. Зато је неопходно употребити помоћну променљиву. На пример:

```
tmp = b;
b = a % b;
a = tmp;
```

На крају петље вредност b једнака је нули, тако да као резултат можемо пријавити текућу вредност броја a.

Еуклидов алгоритам можемо представити и на следећи начин:

$$\begin{aligned}
r_0 &= a \\
r_1 &= b \\
r_2 &= r_0 - q_1 r_1, & 0 < r_2 < r_1 \\
&\dots \\
r_{i+1} &= r_{i-1} - q_i r_i, & 0 < r_{i+1} < r_i \\
&\dots \\
r_k &= r_{k-2} - q_{k-1} r_{k-1}, & 0 < r_k < r_{k-1} \\
r_{k+1} &= r_{k-1} - q_k r_k, & 0 = r_{k+1}
\end{aligned}$$

Вредност r_k НЗД бројева a и b. Заиста, пошто је $r_{k+1} = 0$, важи да је $r_{k-1} = q_k r_k$, па број r_k дели r_{k-1}. Међутим, пошто је $r_{k-2} = q_{k-1} r_{k-1} + r_k$, он дели и r_{k-2}. Сличним резоновањем, уназад, може се закључити да r_k дели и r_1 и r_0 тј. a и b. Обратно, ако неки број дели и a и b онда он дели и r_0 и r_1, а пошто је $r_2 = r_0 - q_1 r_1$, он дели и r_2. Сличним резоновањем, унапред, може се закључити да тај број мора делити и r_k. Стога је r_k НЗД бројева a и b.

У сваком кораку алгоритма одржавамо две узастопне вредности низа r_i. У почетку, то су чланови r_0 и r_1 тј. оригиналне вредности a и b. Важи да је $q_1 = a \operatorname{div} b$, а $r_2 = a \bmod b$. У другом кораку промењиве a и b треба да имају вредности чланова r_1 и r_2, што значи да се пар променљивих a, b мења вредностима b и $a \bmod b$, што је управо оно што смо радили у претходно описаном коду. Поступак се наставља све док пар узастопних вредности не постане r_k, r_{k+1}, тј., пошто пар узастопних вредности одржавамо у променљивама a и b, док b не постане нула и тада је НЗД који је једнак r_k садржан у променљивој a.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// izracunavanje najveceg zajednickog delioca brojeva a i b
int nzd(int a, int b) {
  // Euklidov algoritam
  while (b > 0) { // dok b ne postane nula
    int tmp = b;  // par (a, b) menjamo parom (b, a % b)
    b = a % b;    // jer je nzd(a, b) = nzd(b, a % b)
    a = tmp;
  }
  return a;       // nzd(a, 0) = a
}

int main() {
  // ucitavamo 3 broja
  int a, b, c;
  cin >> a >> b >> c;
  // izracunavamo njihov nzd
  cout << nzd(nzd(a, b), c) << endl;
  return 0;
```

```
}
```

Рецимо и да је оригинална формулација Еуклидовог алгоритма уместо мањег броја и остатка при дељењу већег мањим разматрала мањи број и разлику између већег и мањег броја. Ако су два броја значајно различита по величини, тој варијанти је потребан значајно већи број корака.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// izracunavanje najveceg zajednickog delioca brojeva a i b
int nzd(int a, int b) {
  // Euklidov algoritam sa oduzimanjem
  while (a != b) {
    if (a > b)
      a -= b;
    else
      b -= a;
  }
  return a;
}

int main() {
  // ucitavamo 3 broja
  int a, b, c;
  cin >> a >> b >> c;
  // izracunavamo njihov nzd
  cout << nzd(nzd(a, b), c) << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Број дељив са 1 до n

Поставка: Најмањи број који је дељив свим бројевима од 1 до 10 је број 2520. Напиши програм који за дати природан број n одређује који је најмањи број дељив бројевима од 1 до n.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се број n ($1 \leq n < 23$).

Излаз: На стандардни излаз се исписује тражени број.

Пример

Улаз	*Излаз*
`10`	`2520`

Решење: Најмањи број који је дељив са датим бројевима је по дефиницији њихов најмањи заједнички садржалац. Израчунавање најмањег заједничког садржаоца два броја може се свести на израчунавање њиховог највећег заједничког делиоца ако се зна да је $nzs(a,b) = \frac{a \cdot b}{nzd(a,b)}$. Дакле, ако имплементирамо функцију `nzd` која рачуна

највећи заједнички делиоц два броја Еуклидовим алгоритмом (као у задатку Спортски турнир инсеката), тада функцију `nzs` можемо имплементирати као

```
int nzs(int a, int b) {
   return (a / nzd(a, b)) * b;
}
```

Рецимо да је због опасности од настајања прекорачења прилично битно да се прво изврши дељење, па тек онда множење.

НЗС више од два броја рачунамо итеративно, тако што променљиву у којој га чувамо поставимо на 1, а затим у петљи обрађујемо број по број и променљиву мењамо вредношћу најмањег заједничког садржаоца њене текуће вредности и текућег броја.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// najveci zajednicki delilac dva broja
int nzd(int a, int b) {
  while (b > 0) {
    int tmp = a;
    a = b;
    b = tmp % b;
  }
  return a;
}

// najmanji zajednicki sadrzalac dva broja
int nzs(int a, int b) {
  return (a / nzd(a, b)) * b;
}

int main() {
  // ucitavamo broj n
  int n;
  cin >> n;

  // racunamo nzs(1, 2, 3, ..., n)
  int m = 1;
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    m = nzs(m, i);

  // ispisujemo rezultat
  cout << m << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Билијар из ћошка

Поставка: Билијарски сто је правоугаоног облика димензије $m \times n$ и има четири рупе у ћошковима. Посматрајмо цртеж стола, такав да му је ширина m, а висина n. Лоптица се удара из доњег левог угла (поља са координатама $(0, 0)$) дуж линије која је под углом од 45 степени у односу на ивице стола. Ако претпоставимо да лоптица не успорава своје кретање, да се од сваке се ивице одбија под углом од $45°$, да је веома мала и да у рупу упада само ако су јој координате центра једнаке координати рупе, напиши програм који одређује у коју рупу ће после неког времена упасти, као и колико ће се пута пре тога одбити о ивице стола.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе два цела броја m и n ($1 \leq m, n \leq 10^9$) који представљају димензије стола.

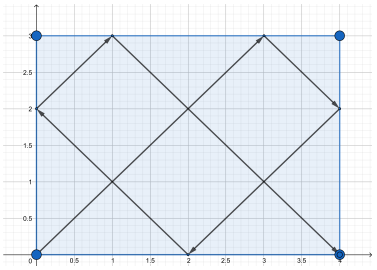
Излаз: На стандрадни излаз у првом реду исписати координате рупе у коју ће лоптица упасти, а у другом број одбијања о ивице стола пре него што се то деси.

Пример

Улаз	*Излаз*
`4 3`	`4 0`

Објашњење

Кретање лоптице је приказано на слици.



Слика 3.1: Билијар

Решење: Да би се лоптица нашла у некој рупи она крећући се хоризонтално треба да пређе растојање (дужину пређеног пута) које представља неки умножак ширине стола и крећући се вертикално треба да пређе растојање које представља неки умножак висине стола. Пошто је интензитет њене брзине и у хоризонталном и у вертикалном правцу исти (јер се стално креће под углом од 45 степени у односу на неку ивицу стола), растојање пређено у хоризонталном и у вертикалном смеру је увек исто. Дакле, лоптица упада у рупу у тренутку када је пређено растојање први пут неки умножак бројева m и n. Најмањи број који је дељив и са m и са n је њихов најмањи заједнички садржалац $nzs(m, n)$.

Број пута n_x који је лоптица хоризонтално пребрисала целу ширину стола једнак је количнику $nzs(m, n)$ и броја m, а број n_y пута који је лоптица вертикално пребрисала целу висину стола једнак је количнику $nzs(m, n)$ и броја n. Ако је број n_x непаран, лоптица се налази у некој рупи на десној, а ако је паран, налази се у некој рупи на

левој ивици стола, па x координату рупе лако одређујемо анализом парности броја n_x. Аналогно, анализом парности броја n_y одређујемо координату y рупе.

Ако је лоптица хоризонталну ширину прешла n_x пута, она се о неку леву и десну ивицу одбила тачно $n_x - 1$ пута. Слично, ако је вертикалну ширину прешла n_y пута, о горњу и доњу ивицу се одбила тачно $n_y - 1$ пута. Укупан број одбијања је, дакле, $(n_x - 1) + (n_y - 1)$.

НЗС два броја можемо израчунати Еуклидовим алгоритмом, али морамо водити рачуна да због великих улазних параметара може наступити прекорачење и морамо користити адекватне типове података.

```
#include <iostream>

using namespace std;

int nzd(int a, int b) {
  while (b > 0) {
    int ost = a % b;
    a = b;
    b = ost;
  }
  return a;
}

long long nzs(int a, int b) {
  return ((long long)a / nzd(a, b)) * b;
}

int main() {
  int m, n;
  cin >> m >> n;
  long long S = nzs(m, n);
  int nx = S / m, ny = S / n;
  int x = nx % 2 == 0 ? 0 : m;
  int y = ny % 2 == 0 ? 0 : n;
  cout << x << " " << y << endl;
  cout << (nx - 1) + (ny - 1) << endl;
  return 0;
}
```

Рачунање НЗС можемо избећи. За решење нама је потребно да знамо вредности $n_x = nzs(m,n)/m$ и $n_y = nzs(m,n)/n$. Пошто је $nzs(m,n) = (mn)/nzd(m,m)$, важи да је $n_x = n/nzd(m,n)$ док је $n_y = m/nzd(m,n)$. Тиме избегавамо потребу за радом са великим бројевима и избегавамо могућност настанка прекорачења.

```
#include <iostream>

using namespace std;
```

```
int nzd(int a, int b) {
  while (b > 0) {
    int ost = a % b;
    a = b;
    b = ost;
  }
  return a;
}

int main() {
  int m, n;
  cin >> m >> n;
  int N = nzd(m, n);
  int nx = n / N, ny = m / N;
  int x = nx % 2 == 0 ? 0 : m;
  int y = ny % 2 == 0 ? 0 : n;
  cout << x << " " << y << endl;
  cout << (nx - 1) + (ny - 1) << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Ученици на истим седиштима

Поставка: Ученици гледају два филма у биоскопској сали у којој су седишта распоређена у m врста и n колона (ученика има тачно $m \cdot n$). Када су гледали први филм, наставници су их распоредили тако што су их ређали по азбучном редоследу попуњавајући врсту по врсту, а када су гледали други филм, поново су били распоређени по азбучном редоследу, али овај пут врсту по врсту. Напиши програм који одређује колико ученика је седело на истом месту током гледања оба филма.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе два цела броја m и n ($1 \leq m, n \leq 10000$), сваки у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број који представља број ученика који су током гледања оба филма седели на истом седишту.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 5	3

Решење: Приликом ређања елемената врсту по врсту при чему у једној врсти има n елемената, елемент са редним бројем x налази у врсти $v_1 = x \operatorname{div} n$ и колони $k_1 = x \bmod n$ (бројање елемената, врста и колона почиње од нуле). Дакле на основу дефиниције целобројног дељења важи да је $x = v_1 \cdot n + k_1$, $0 \leq k_1 < n$. Слично, ако се елементи ређају колону по колону, и ако у једној колони има m елемената, тада се елемент са редним бројем x налази у колони $k_2 = x \operatorname{div} m$ и врсти $v_2 = x \bmod m$. Дакле, важи да је $x = k_2 \cdot m + v_2$ и $0 \leq v_2 < m$.

Да би елемент био на истој позицији мора да важи да је $k_1 = k_2$ и да је $v_1 = v_2$. Једно директно решење је да се за сваки редни број ученика од 0 до $m \cdot n - 1$ одреде v_1, k_1, v_2 и k_2 (целобројним дељењем, на горе описани начин) и затим да се види колико тако одређених бројева задовољава тражени услов (решење се дакле заснива на бројању елемената филтриране серије).

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main() {
  int m, n;
  cin >> m >> n;
  int brojNaIstimSedistima = 0;
  for (int ucenik = 0; ucenik < m*n; ucenik++) {
    int v1 = ucenik / m, k1 = ucenik % m;
    int k2 = ucenik / n, v2 = ucenik % n;
    if (v1 == v2 && k1 == k2)
      brojNaIstimSedistima++;
  }
  cout << brojNaIstimSedistima << endl;
  return 0;
}
```

Међутим, постоји и ефикасније решење. На основу горе реченог, мора да важи да је $x = v_1 \cdot n + k_1 = k_2 \cdot m + v_2$, а пошто x задовољава услов задатка ако и само ако важи $k_1 = k_2$ и $v_1 = v_2$, важи да је $v_1 \cdot n + k_1 = k_1 \cdot m + v_1$, тј. $v_1 \cdot (n-1) = k_1 \cdot (m-1)$. При том, мора да важи да је $0 \leq v_1 < m$ и $0 \leq k_1 < n$. Решења има онолико колико постоји парова (v_1, k_1) који задовољавају дати услов (такви су сигурно парови $(0,0)$ и $(m-1, n-1)$, али их има можда још. Означимо са d највећи заједнички делилац бројева $n-1$ и $m-1$. Нека је $n-1 = s \cdot d$ и $m-1 = t \cdot d$. Тада мора да важи $v_1 \cdot s \cdot d = k_1 \cdot t \cdot d$, тј. $v_1 \cdot s = k_1 \cdot t$, при чему су s и t узајамно прости бројеви. Ова једначина је задовољена ако и само ако постоји неко i такво да је $v_1 = i \cdot t$ и $k_1 = i \cdot s$. Из услова да је $0 \leq v_1 < m$ следи да је $0 \leq v_1 \leq m - 1 = t \cdot d$, што значи да је неопходно да важи да је $0 \leq i \leq d$. Слично, из $0 \leq k_1 < n$ следи да је $0 \leq k_1 \leq n - 1 = s \cdot d$, што је опет еквивалентно са $0 \leq i \leq d$. Дакле, парова (v_1, k_1) који задовољавају $v_1 \cdot (n-1) = k_1 \cdot (m-1)$, $0 \leq v_1 < m$ и $0 \leq k_1 < n$ једнак је броју вредности i које задовољавају $0 \leq i \leq d$, а то је тачно $d + 1$. Дакле, задатак се може решити тако што се израчуна НЗД бројева $m-1$ и $n-1$ и тај НЗД се увећа за један. НЗД се може израчунати Еуклидовим алгоритмом, како је показано у задатку Спортски турнир инсеката.

```
#include <iostream>

using namespace std;

int nzd(int a, int b) {
  while (b != 0) {
    int tmp = a % b;
```

```
    a = b;
    b = tmp;
  }
  return a;
}

int main() {
  int m, n;
  cin >> m >> n;
  cout << nzd(m-1, n-1) + 1 << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Модуларни инверз

Поставка: Миле и Тања морају да размене тајне поруке које се састоје од пуно великих бројева. Миле је желео да се додатно заштити и да те бројеве пре слања измени тако што је сваки број помножио тајним бројем a и израчунао остатак при дељењу са тајним бројем n. Пошто је добар математичар, Миле зна да ће Тања лако моћи да дешифрује поруку ако зна бројеве a и n и ако су они узајамно прости и зато их је изабрао баш на тај начин и унапред их је договорио са Тањом. Напиши програм који Тањи помаже да дешифрује бројеве које јој је Миле послао.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе бројеви a и n ($2 \leq a, n \leq 10^9$), за које се зна да су узајамно прости. Након тога уносе се бројеви x_i ($0 \leq x_i < n$), њих највише 10, сваки у посебном реду све до краја стандардног улаза, који представљају бројеве које је Миле добио након шифровања оригиналних бројева.

Излаз: На стандардни излаз исписати оригиналне (дешифроване) бројеве, сваки у посебном реду.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 5 1 2 3 4	2 4 1 3

Објашњење

Заиста, важи да је $(3 \cdot 2) \bmod 5 = 6 \bmod 5 = 1$, $(3 \cdot 4) \bmod 5 = 12 \bmod 5 = 2$, $(3 \cdot 1) \bmod 5 = 3 \bmod 5 = 3$ и $(3 \cdot 3) \bmod 5 = 9 \bmod 5 = 4$.

Решење: Нагласимо за почетак да је у програму потребно множити два броја који могу бити до 10^9 и израчунати производ који може бити до 10^{18}. Зато је у програму потребно користити 64-битно записане бројеве. У језику C++ можемо користити тип `long long`.

Претрага грубом силом

За сваки учитани број x треба одредити y такав да је $a \cdot_n y = x$. Број y се, дакле, може одредити тако што се изврши дељење броја x бројем a по модулу n. Дељење по модулу је веома специфична операција, другачија од свих операција по модулу које смо до сада срели. Чак ни постојање количника по модулу n није увек гарантовано (ако су бројеви a и n узајамно прости, као што јесу у овом задатку тада модуларни количник постоји за свако x и јединствен међу бројевима од 0 до $n - 1$).

Модуларно дељење грубом силом подразумевало би примену алгоритма претраге за свако x тј. испробавање свих могућих бројева y од 0 до $n - 1$ и проверу да ли је $a \cdot_n y = x$. Пошто n може бити прилично велики број, проналажење инверза и за једно x може бити веома неефикасно.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// pokusavamo da podelimo x sa a po modulu n
// ako postoji rezultat se smesta u y, a funkcija vraca podatak o tome
// da li kolicnik postoji
bool deli(long long x, long long a, long long n, long long& y) {
  // resenje grubom silom
  // posto je (a * y) mod n = (a mod n * y mod n) mod n
  // mozemo a zameniti sa a % n
  a %= n;
  // proveravamo sve moguce kandidate za y
  for (y = 0; y < n; y++)
    // ako je
    if ((a * y) % n == x)
      return true;
  // kolicnik ne postoji
  return false;
}

int main() {
  // ucitavamo brojeve
  long long a, n;
  cin >> a >> n;
  // ucitavamo sve brojeve do kraja ulaza
  long long x;
  while (cin >> x) {
    // delimo ih sa a po modulu n (po uslovima zadatka kolicnik
    // postoji)
    long long y;
    deli(x, a, n, y);
    cout << y << endl;
  }
  return 0;
```

}

Уместо независног дељења сваког броја x бројем a (по модулу n), бољи приступ је израчунавање модуларног инверза броја a и касније множење (по модулу n) свих бројева x тим инверзом

За дати број a потребно је пронаћи његов инверз по модулу n тј. број a^{-1} такав да је $a^{-1} \cdot_n a = 1$, тј. да је $(a^{-1} \cdot a) \bmod n = 1$. Ако се такав број нађе, онда важи да је $a^{-1} \cdot_n (a \cdot_n y) = a^{-1} \cdot_n x$. Пошто је $a^{-1} \cdot_n (a \cdot_n y) = (a^{-1} \cdot a) \cdot_n y = 1 \cdot_n y = y$, важи да је $y = a^{-1} \cdot_n x$, што нам омогућава да дешифровање тј. дељење по модулу извршимо операцијом множења по модулу.

Одређивање модуларног инверза се може урадити грубом силом тако што се редом испитају сви бројеви a^{-1} од 0 до $n - 1$ и провери се да ли је $a^{-1} \cdot_n a = 1$. Иако се претрага овај пут спроводи само једном, а не за свако x изнова, ово решење је опет веома неефикасно у случају када је n велики број.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// odredjujemo inverz broja a po modulu n i smestamo ga u promenljivu t
// funkcija vraca podatak o tome da li modularni inverz postoji
bool inverz(long long a, long long n, long long& t) {
  // resenje grubom silom

  // posto je (a * t) mod n = (a mod n * t mod n) mod n
  // mozemo a zameniti sa a % n
  a %= n;
  // proveravamo sve moguce kandidate za inverz
  for (t = 0; t < n; t++)
    // ako je ostatak 1, nasli smo inverz
    if ((t * a) % n == 1)
      return true;
  // inverz ne postoji
  return false;
}

int main() {
  // ucitavamo brojeve
  long long a, n;
  cin >> a >> n;
  // trazimo inverz elementa a po modulu n (po uslovima zadatka on
  // mora da postoji)
  long long inv_a;
  inverz(a, n, inv_a);
  // ucitavamo sve brojeve do kraja ulaza
  long long x;
  while (cin >> x)
```

```
    // delimo ih sa a po modulu tako sto ih mnozimo sa inverzom od a
    cout <<  (inv_a * x) % n << endl;
  return 0;
}
```

Проширени Еуклидов алгоритам и Безуова теорема

Једна изразито важна последица Еуклидовог алгоритма описаног у задатку Спортски турнир инсеката је Безуова теорема која каже да за свака два природна броја a и b постоје цели бројеви s и t тако да важи да је $s \cdot a + t \cdot b = nzd(a, b)$. Бројеви s и t се могу израчунати тзв. проширеним Еуклидовим алгоритмом. Посматрајмо наредну табелу.

$$\begin{array}{rclrclrcl}
r_0 &=& a & s_0 &=& 1 & t_0 &=& 0 \\
r_1 &=& b & s_1 &=& 0 & t_1 &=& 1 \\
r_2 &=& r_0 - q_1 r_1 & s_2 &=& s_0 - q_1 s_1 & t_2 &=& t_0 - q_1 t_1 \\
\ldots & & & & & & & & \\
r_{i+1} &=& r_{i-1} - q_i r_i & s_{i+1} &=& s_{i-1} - q_i s_i & t_{i+1} &=& t_{i-1} - q_i t_i \\
\ldots & & & & & & & & \\
r_k &=& r_{k-2} - q_{k-1} r_{k-1} & s_k &=& s_{k-2} - q_{k-1} s_{k-1} & t_k &=& t_{k-2} - q_{k-1} t_{k-1} \\
r_{k+1} &=& 0 & s_{k+1} &=& s_{k-1} - q_k s_k & t_{k+1} &=& t_{k-1} - q_k t_k
\end{array}$$

У сваком њеном кораку важи да је $s_i \cdot a + t_i \cdot b = r_i$. Заиста, у прва два корака једнакост је тривијално испуњена. Ако претпоставимо да важи $s_{i-1}a + t_{i-1}b = r_{i-1}$ и $s_i a + t_i b = r_i$, тада је на основу табеле $r_{i+1} = (s_{i-1}a + t_{i-1}b) - q_i(s_i a + t_i b) = (s_{i-1} - q_i s_i) \cdot a + (t_{i-1} - q_i t_i) \cdot b$. Пошто је у табели стављено да је $s_{i+1} = s_{i-1} - q_i s_i$ и $t_{i+1} = t_{i-1} - q_i t_i$, и у кораку $i+1$ важи да је $s_{i+1}a + t_{i+1}b = r_{i+1}$. Дакле, важи да је $s_k a + t_k b = r_k$, а пошто је r_k НЗД бројева a и b (што смо доказали у задатку Спортски турнир инсеката, бројеви s_k и t_k су тражени Безуови коефицијенти.

Додатно, важи да је $s_{k+1} = \pm\frac{b}{nzd(a,b)}$ и $t_{k+1} = \pm\frac{a}{nzd(a,b)}$. Заиста, важи да су бројеви s_{k+1} и t_{k+1} узајамно прости (то следи из идентитета $s_k t_{k+1} - t_k s_{k+1} = (-1)^k$). Пошто уз то важи и да је $as_{k+1} + bt_{k+1} = 0$, важи да број s_{k+1} дели број b док t_{k+1} дели број a, па тврђење следи. Може се показати и да бројеви s_i и t_i образују серије алтернирајућег знака које су (после неких првих чланова) строго растуће по апсолутној вредности. Зато важи да је $|s_i| < \frac{b}{nzd(a,b)}$ и $|t_i| < \frac{a}{nzd(a,b)}$, што је важно својство које нас осигурава од настанка прекорачења током израчунавања.

Прикажимо проширени Еуклидов алгоритам и на једном примеру.

$$\begin{array}{rclrclrcl}
r_0 &=& 86 & s_0 &=& 1 & t_0 &=& 0 \\
r_1 &=& 34 & s_1 &=& 0 & t_1 &=& 1 \\
r_2 &=& 86 - 2 \cdot 34 = 18 & s_2 &=& 1 - 2 \cdot 0 = 1 & t_2 &=& 0 - 2 \cdot 1 = -2 \\
r_3 &=& 34 - 1 \cdot 18 = 16 & s_3 &=& 0 - 1 \cdot 1 = -1 & t_3 &=& 1 - 1 \cdot (-2) = 3 \\
r_4 &=& 18 - 1 \cdot 16 = 2 & s_4 &=& 1 - 1 \cdot (-1) = 2 & t_4 &=& -2 - 1 \cdot 3 = -5 \\
r_5 &=& 16 - 8 \cdot 2 = 0 & s_5 &=& -1 - 8 \cdot 2 = -17 & t_4 &=& 3 - 8 \cdot (-5) = 43
\end{array}$$

Дакле $nzd(86, 34) = 2$, важи да је $2 \cdot 86 + (-5) \cdot 34 = 2$, и Безуови коефицијенти су $s = 2$ и $t = -5$, серија бројева s је 1, 0, 1, -1, 2, -17, а серија бројева t је 0, 1, -2, 3, -5, 43. Последњи коефицијенти у тој серији су заиста количници бројева a и b са њиховим НЗД.

Имплементација је једноставно уопштење основне имплементације Еуклидовог алгоритма. У по две промењљиве одржавамо две узастопне вредности низа r_i, низа s_i и низа t_i, у петљи их ажурирамо на основу приказаних формула све док члан низа r_i не постане једнак нули.

Видећемо да се проширени Еуклидов алгоритам може применити у много различитих ситуација.

Вратимо се нашем оригиналном проблему. Задатак смо свели на одређивање модуларног инверза броја a по модулу n тј. на то да треба пронаћи број q тако да је $a^{-1} \cdot a = q \cdot n + 1$, тј. $-q \cdot n + a^{-1} \cdot a = 1$. Пошто су бројеви a и n узајамно прости по претпоставци задатка (у супротном не бисмо могли да гарантујемо постојање решења), важи да је НЗД бројева a и n једнак 1. На основу Безуове теореме могуће је пронаћи бројеве s и t такве да је $s \cdot n + t \cdot a = 1$. Када проширеним Еуклидовим алгоритмом пронађемо те кеофицијенте, коефицијент t је тражени модуларни инверз. Ако је тај број негативан, онда се за инверз може узети $t + n$ (јер тада важи $(s - a) \cdot n + (t + n) \cdot a = 1$, а пошто је $|t| < \frac{n}{nzd(a,n)} = n$, број $t + n$ је сигурно позитиван).

```
#include <iostream>

using namespace std;

long long bezu(long long a, long long b, long long& s, long long& t) {
  long long r0 = a, r1 = b;
  long long s0 = 1, s1 = 0;
  long long t0 = 0, t1 = 1;
  while (r1 > 0) {
    long long q = r0 / r1;
    long long tmp;

    tmp = r0;
    r0 = r1;
    r1 = tmp - q*r1;

    tmp = s0;
    s0 = s1;
    s1 = tmp - q*s1;

    tmp = t0;
    t0 = t1;
    t1 = tmp - q*t1;
  }
  s = s0; t = t0;
  return r0;
}

bool inverz(long long a, long long n, long long& t) {
  long long s;
```

```
  long long r = bezu(n, a, s, t);
  if (t < 0) t += n;
  return r == 1;
}

int main() {
  long long a, n;
  cin >> a >> n;
  long long inv_a;
  inverz(a, n, inv_a);
  long long x;
  while (cin >> x)
    cout <<  (inv_a * x) % n << endl;
  return 0;
}
```

Приметимо да нам вредност броја s заправо није потребна, па се њено израчунавање у овој специјалној примени проширеног Еуклидовог алгоритма заправо може изоставити.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// izracunavamo broj t takav da je a * t mod n = 1
// vracamo podatak o tome da li takav broj t postoji
bool inverz(long long a, long long n, long long& t) {
  long long r = n, r1 = a;
  t = 0; long long t1 = 1;
  while (r1 > 0) {
    long long q = r / r1;
    long long tmp;

    tmp = r;
    r = r1;
    r1 = tmp - q*r1;

    tmp = t;
    t = t1;
    t1 = tmp - q*t1;
  }
  if (t < 0) t += n;
  return r == 1;
}


int main() {
  long long a, n;
```

```
  cin >> a >> n;
  long long inv_a;
  inverz(a, n, inv_a);
  long long x;
  while (cin >> x)
    cout <<  (inv_a * x) % n << endl;
  return 0;
}
```

Ојлерова теорема

Још један начин да ефикасно израчунамо модуларни инверз је коришћење Ојлерове теореме. Нека $\varphi(n)$ означава број бројева који су узајамно прости са бројем n (о њој и начину њеног ефикасног израчунавања било је речи у задатку Ојлерова функција). Ојлерова теорема тврди да ако су бројеви a и n узајмно прости важи да је $a^{\varphi(n)} \bmod n = 1$ тј. да је $\left(a^{\varphi(n)-1}\right) \cdot_n a \bmod n = 1$. Зато је a^{-1} по модулу n једнак броју $a^{\varphi(n)-1}$. Пошто експонент може бити велики број степеновање треба извршити неким ефикасним алгоритмом степеновања (степеновање се, наравно, врши по модулу n).

Уместо доказа Ојлерове теореме дајмо само мало појашњење на једном примеру. Посматрајмо број $n = 12$ и остатке при дељењу са 12 који су узајмно прости са 12. То су бројеви 1, 5, 7 и 11 и има их тачно $\varphi(12) = 4$. Узмимо било који број који је узајамно прост са 12. Нека то буде, на пример, број $a = 7$. Помножимо по модулу 12 све наведене остатке бројем 7. Тако добијамо бројеве $1 \cdot 7 \bmod 12 = 7$, $5 \cdot 7 \bmod 12 = 11$, $7 \cdot 7 \bmod 12 = 1$ и $11 \cdot 7 \bmod 12 = 5$. Приметимо да смо добили исте бројеве као на почетку (једино им се редослед променио). Кључни увид у доказу је да ће то увек бити случај када су a и n узајамно прости. Зато су производи $(7 \cdot 1) \cdot (7 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 11)$ тј. $7^4 \cdot (1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11)$ и $1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ једнаки по модулу 12 и зато број 7^4 при дељењу са 12 даје остатак 1, што је управо тврђење Ојлерове теореме.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// broj brojeva manjih od n koji su uzajamno prosti sa n
long long phi(long long n) {
  // Ojlerova formula kaze da je taj broj jednak
  // n * proizvod(1 - 1/p) za sve proste brojeve p koji dele broj n
  long long d = 2;
  long long proizvod = n;
  // dok broj n ne postane prost
  while (d*d <= n) {
    if (n % d == 0) {
      // nasli smo nov prost faktor pa azuriramo proizvod
      proizvod = (proizvod / d) * (d - 1);
      // uklanjamo ostala pojavljivanja tog faktora
      while (n % d == 0)
        n /= d;
```

```
    }
    // prelazimo na sledeceg kandidata
    d++;
  }
  // n je prost broj, pa treba azurirati proizvod i za njega
  if (n > 1)
    proizvod = (proizvod / n) * (n - 1);
  // vracamo rezultat
  return proizvod;
}

// izracunavamo x^k mod n koristeci algoritam efikasnog stepenovanja
long long stepen_po_modulu(long long x, long long k, long long n) {
  k %= n;
  long long stepen = 1;
  while (k > 0) {
    if (k % 2 == 1)
      stepen = (stepen * x) % n;
    x = (x * x) % n;
    k /= 2;
  }
  return stepen;
}

// izracunavamo broj t takav da je a * t mod n = 1
// funkcija pretpostavlja da su a i n uzajamno prosti i tada t uvek postoji
long long inverz(long long a, long long n) {
  return stepen_po_modulu(a, phi(n)-1, n);
}


int main() {
  // ucitavamo brojeve
  long long a, n;
  cin >> a >> n;
  // trazimo inverz elementa a po modulu n (po uslovima zadatka on
  // mora da postoji)
  long long inv_a = inverz(a, n);
  // ucitavamo sve brojeve do kraja ulaza
  long long x;
  while (cin >> x)
    // delimo ih sa a po modulu tako sto ih mnozimo sa inverzom od a
    cout <<  (inv_a * x) % n << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Кинеска теорема

Поставка: Пера покушава да паралелизује свој програм који ради над x података тако да сваки процесор обрађује исти број података. Ако распореди податке на n_1 процесора, остаје му a_1 података вишка, ако распореди податке на n_2 процесора, остаје му a_2 података вишка, а ако их распореди на n_3 процесора, остаје му a_3 података вишка. Ако се знају бројеви a_1, n_1, a_2, n_2, a_3 и n_3 и ако се зна да су бројеви n_i узајамно прости, напиши програм који одређује x.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се бројеви a_1, n_1, a_2, n_2, a_3 и n_3 ($2 \leq n_i \leq 10^5$, $0 \leq a_i < n_i$). Сваки пар се наводи у посебном реду, а бројеви су раздвојени размаком. Бројеви n_1, n_2 и n_3 су узајамно прости.

Излаз: На стандардни излаз исписати један природан број - јединствен природан број мањи од производа $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ који задовољава дате услове.

Пример

Улаз	*Излаз*
2 3 3 5 2 7	23

Објашњење

Када се 23 података подели на 3 процесора, сваки процесор добија 7 података (укупно 21) и 2 података остају нераспоређена. Када се подели на 5 процесора сваки процесор добија по 4 података (укупно 20) и три података остају нераспоређена. Када се подели на 7 процесора, сваки процесор добија по 3 података (укупно 21) и опет 2 података остају нераспоређена. Слично би важило и за 128 података, 233 података итд., али 23 је једини број мањи од $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ за који ово важи.

Решење:

Кинеска теорема о остацима

Иако се у задатку посматрају тачно три делиоца и остатка, размотримо мало општији случај проналажења броја r такво да за k узајамно простих бројева $n_1, \ldots, n_k$ важи да је $r \bmod n_1 = a_1, \ldots, r \bmod n_k = a_k$. Сличан проблем решавања система конруенција посматран је још у древној Кини, тако да је поступак решавања који ћемо описати и применити у решењу заснован на тврђењу које се назива кинеска теорема о остацима. Она тврди да ако је $N = n_1 \ldots n_k$ производ свих бројева n_i и ако су бројеви $n_1, \ldots, n_k$ међусобно, у паровима, узајамно прости, тада задати систем услова има јединствено решење r такво да је $0 \leq r < N$.

Ако за свако i такво да је $1 \leq i \leq k$ пронађемо број r_i такав да при дељењу са бројем n_i даје остатак a_i док при дељењу са свим другим бројевима n_j за $1 \leq j \leq k$ и $j \neq i$ даје остатак 0, тада ће тражени резултат r бити једнак збиру свих бројева r_i по модулу N тј. важиће да је $r = r_1 +_N \ldots +_N r_k$, односно $r = (r_1 + \ldots + r_k) \bmod N$.

Рецимо и да је овај поступак веома сличан оном код конструкције Лагранжевог интерполационог полинома тј. да је Лагранжев поступак интерполације заправо специјалан случај кинеске теореме о остацима, када се уместо бројева посматра прстен полинома.

Докажимо претходно тврђење. Ако важи да је $N \bmod n_i = 0$, тада за сваки број x важи да је $(x \bmod N) \bmod n_i = x \bmod n_i$. Заиста, ако је $y = (x \bmod N) \bmod n_i$ тада постоји неки број q такав да је $x \bmod N = q \cdot n_i + y$. Међутим, тада постоји неки број q' такав да је $x = q' \cdot N + q \cdot n_i + y$. Зато на основу особина сабирања, одузимања и множења по модулу описаних у задатку Операције по модулу, важи да је $x \bmod n_i = ((q' \cdot N) \bmod n_i + (q \cdot n_i) \bmod n_i + (y \bmod n_i)) \bmod n_i = (y \bmod n_i) \bmod n_i = y \bmod n_i = y$ (јер је $N \bmod n_i = 0$, $n_i \bmod n_i = 0$ и $0 \leq y < n_i$ па зато и $y \bmod n_i = y$).

Зато знамо да ће за свако $1 \leq i \leq k$ важити и

$$\begin{aligned} r \bmod n_i &= ((r_1 + \ldots + r_k) \bmod N) \bmod n_i \\ &= (r_1 + \ldots + r_k) \bmod n_i \\ &= (r_1 \bmod n_i + \ldots + r_i \bmod n_i + \ldots + r_k \bmod n_i) \bmod n_i \\ &= (0 + \ldots + a_i + \ldots + 0) \bmod n_i = a_i \end{aligned}$$

јер је $0 \leq a_i < n_i$.

Размотримо сада проблем одређивања вредности r_i. Ако је број r_i дељив са свим коефицијентима n_j осим евентуално са n_i он је дељив и са $p_i = N/n_i$ тј. мора да представља неки умножак броја p_i тј. мора бити облика $c_i \cdot p_i$, за неки коефицијент c_i. Да би r_i при дељењу са n_i дао остатак a_i желимо да важи да је $c_i \cdot_{n_i} p_i = a_i$. Одавде се намеће да се c_i може добити неким обликом дељења по модулу n_i броја a_i бројем p_i. Разматрајмо модуларни инверз p_i^{-1} броја p_i по модулу n_i, тј. број p_i^{-1} такав да је $(p_i^{-1} \cdot p_i) \bmod n_i = 1$ (проналажење модуларног инверза описали смо у задатку Модуларни инверз). Модуларни инверз ће постојати јер су бројеви p_i и n_i узајамно прости. Посматрајмо производ по модулу N бројева a_i, p_i^{-1} и p_i тј. број $r_i = a_i \cdot_N p_i^{-1} \cdot_N p_i$. Докажимо да он има тражена својства.

Важи да је $r_i = (a_i \cdot p_i^{-1} \cdot p_i) \bmod N$, па за свако $1 \leq j \leq k$ (укључујући и $j = i$) важи $r_i \bmod n_j = ((a_i \cdot p_i^{-1} \cdot p_i) \bmod N) \bmod n_j = (a_i \cdot p_i^{-1} \cdot p_i) \bmod n_j$.

- Ако је $j = i$, на основу особина множења по модулу, важи да је $r_i \bmod n_i = (((a_i \bmod n_i) \cdot ((p_i^{-1} \cdot p_i) \bmod n_i)) \bmod n_i$. Пошто је $0 \leq a_i < n_i$, важи да је $a_i \bmod n_i = a_i$. Такође, важи да је $(p_i^{-1} \cdot p_i) \bmod n_i = 1$, па је зато $r_i \bmod n_i = a_i$.
- Слично, за свако j такво да је $j \neq i$ и $1 \leq j \leq k$ важи да је $r_i \bmod n_j$ једнако $((a_i \bmod n_j) \cdot (p_i^{-1} \bmod n_j) \cdot (p_i \bmod n_j)) \bmod n_j$. Међутим, пошто је $p_i \bmod n_j = 0$, јер је n_j фактор броја p_i, важи да је $r_i \bmod n_j = 0$.

С обзиром на то да међурезултати могу бити велики бројеви, треба бити веома обазрив на могућност прекорачења. Узевши у обзир ограничења дата у тексту задатка (да су задата само три делиоца и три остатка, као и да су сви бројеви n_i ограничени одозго са 10^5), у имплементацији може да се користи 64-битни тип за запис целих бројева који може да чува вредности до 10^{18} (али и то само ако се формуле додатно мало трансформишу). Наиме, бројеви n_i имају ограничење 10^5 тако да њихов производ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ има ограничење 10^{15} и за његову репрезентацију никако нису довољна 32 бита, али јесте довољно 64 бита. Бројеви p_i имају горње ограничење 10^{10}, док њихов инверз по модулу n_i и број a_i имају горње ограничење 10^5, тако да би директно израчунавање производа $a_i \cdot p_i^{-1} \cdot p_i$ проузроковало прекорачење 64-битног типа података.

Чак и израчунавања остатка при дељењу са N пре и након сваке операције нас не би заштитило од прекорачења. Вредност $(a_i \cdot p_i^{-1}) \bmod N$ има горње ограничење 10^{15} (јер је N велики број), па би множење тог броја са бројем p_i чије је горње ограничење 10^{10} вероватно довело до прекорачења. Чак и да се редослед операција замени и да се број $(a_i \cdot p_i) \bmod N$ множи бројем p_i^{-1} који је доста мањи нас не би заштитило, јер би се множили бројеви чија су ограничења 10^{15} и 10^5, чији се производ опет не може репрезентовати са 64 бита.

Безбедно решење се може добити ако се примети да је $N = p_i \cdot n_i$ и да се заправо рачуна вредност израза $(a_i \cdot p_i^{-1} \cdot p_i) \bmod (p_i \cdot n_i)$ који и у бројиоцу и у имениоцу има заједнички фактор p_i. Вредност тог израза једнака је вредности израза $p_i \cdot ((a_i \cdot p_i^{-1}) \bmod n_i))$. Ова форма нам гарантује да неће доћи до прекорачења. Наиме, бројеви a_i, p_i^{-1} и n_i су мањи од 10^5, па је такав и $(a_i \cdot p_i^{-1}) \bmod n_i$. Пошто је p_i мањи од 10^{10} њихов је производ мањи од 10^{15} и може се представити 64-битним целим бројем.

Када постоји велика опасност од прекорачења, обично је најбезбедније решење (које додуше користи мало више операција него што је то стварно неопходно) је да се дефинишу посебне функције за сабирање и множење по модулу и да се оне позивају на месту сваког сабирања и множења у коду. Као што смо видели у овом примеру, чак ни то није гаранција и потребно је било веома пажљиво анализирати проблем да би се извела формула која гарантује да до прекорачења неће доћи.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

long long nzd(long long a, long long b) {
  while (b > 0) {
    long long ost = a % b;
    a = b;
    b = ost;
  }
  return a;
}

// t je inverz broja a po modulu n tj. broj takav da je (a * t) mod n = 1
// funkcija vraca da li je uspela da izracuna broj t
bool inverz(long long a, long long n, long long& t) {
  long long r = n, r1 = a;
  t = 0; long long t1 = 1;
  while (r1 > 0) {
    long long q = r / r1;
    long long tmp;

    tmp = r;
    r = r1;
    r1 = tmp - q*r1;
```

```
    tmp = t;
    t = t1;
    t1 = tmp - q*t1;
  }
  if (t < 0) t += n;
  return r == 1;
}

// proizvod brojeva x i y po modulu n
long long pm(long long x, long long y, long long n) {
  return ((x % n) * (y % n)) % n;
}

// zbir brojeva x i y po modulu n
long long zm(long long x, long long y, long long n) {
  return ((x % n) + (y % n)) % n;
}

// racuna (z * x) mod (z * y)
long long pmp(long long x, long long y, long long z) {
  return z * (x % y);
}

// na osnovu kineske teoreme o ostacima se izracunava rezultat tako da
// za sve elemente nizova n i a vazi da je rezultat mod n[i] = a[i]
// funkcija vraca da li je rezultat bilo moguce naci
bool kto(long long n[], long long a[], int duzina, long long& rezultat) {
  long long N = 1;
  for (int i = 0; i < duzina; i++)
    N *= n[i];

  rezultat = 0;
  for (int i = 0; i < duzina; i++) {
    long long pi = N / n[i];
    long long pi_inv;
    if (!inverz(pi, n[i], pi_inv))
      return false;
    // rezultat = (rezultat + (a[i] * pi_inv * p_i) % N) % N
    // zbod prekoracenja moramo koristiti vezu
    // rezultat = (rezultat + ((p_i * (a[i] * pi_inv)) % (p_i * n[i])) % N
    rezultat = zm(rezultat, pmp(pm(a[i], pi_inv, N), n[i], pi), N);
  }
  return true;
}

int main(void) {
```

```
  // ucitavamo ulazne podatke
  long long a[3], n[3];
  for (int i = 0; i < 3; i++)
    cin >> a[i] >> n[i];

  // rezultat izracunavamo na osnovu kineske teoreme o ostacima
  long long rezultat;
  if (!kto(n, a, 3, rezultat))
    cout << "Nisu uzajamno prosti" << endl;

  // prijavljujemo rezultat
  cout << rezultat << endl;

  return 0;
}
```

Поред општег поступка за решавање проблема за k остатака, у случају само два остатка постоји и веома сличан, али мало другачије формулисан поступак. За узајамно просте бројеве n_1 и n_2, на основу Безуове теореме могу се пронаћи бројеви s и t такви да важи да је $s \cdot n_1 + t \cdot n_2 = 1$. Може се лако показати да коефицијент s представља модуларни инверз броја n_1 по модулу n_2, док коефицијент t представља модуларни инверз броја n_2 по модулу n_1. Зато, на основу претходно приказаног решења, број $r_{12} = a_1 \cdot t \cdot n_2 + a_2 \cdot s \cdot n_1$ тј. његов остатак по модулу $n_1 \cdot n_2$, евентуално увећан за $n_1 \cdot n_2$ ако је негативан, при дељењу са n_1 даје остатак a_1, а при дељењу са n_2 даје остатак a_2. Ово је лако показати и директно. Важи да је

$$\begin{aligned} r_{12} &= a_1 \cdot t \cdot n_2 + a_2 \cdot s \cdot n_1 \\ &= a_1 \cdot t \cdot n_2 + a_2 \cdot s \cdot n_1 + a_1 \cdot s \cdot n_1 - a_1 \cdot s \cdot n_1 \\ &= a_1 \cdot (t \cdot n_2 + s \cdot n_1) + s \cdot n_1 \cdot (a_2 - a_1) \\ &= a_1 + s \cdot n_1 \cdot (a_2 - a_1) \end{aligned}$$

Слично се доказује и да је $r_{12} = a_2 + t \cdot n_2 \cdot (a_1 - a_2)$.

Дакле, ако Кинеску теорему примењујемо на два броја, не морамо два пута независно рачунати модуларни инверз, него оба потребна коефицијента можемо добити једном применом проширеног Еуклидовог алгоритма.

Ако има више бројева на које је потребно применити Кинеску теорему, Након одређивања решења за прва два, исти поступак се примењује да се одреди број који при дељењу са $n_1 \cdot n_2$ даје остатак r_{12}, а при дељењу са n_3 даје остатак a_3. Ако је $k > 3$, поступак се наставља на исти начин, док се не добије коначан резултат.

Приметимо да се у формули $(a_1 \cdot t \cdot n_2 + a_2 \cdot s \cdot n_1) \bmod (n_1 \cdot n_2)$ множе два пута по три броја, као и да је модул $n_1 \cdot n_2$ прилично велики број, па привремени резултати могу да прекораче опсег 64-битног типа, чак иако су сви a_i и n_i 32-битни целих бројеви и ако се модули рачунају пре и након сваке операције множења. То се може предупредити ако се примети да је $(a_1 \cdot t \cdot n_2) \bmod (n_1 \cdot n_2) = n_2 \cdot ((a_1 \cdot t) \bmod n_1)$ и да је $(a_2 \cdot s \cdot n_1) \bmod (n_1 \cdot n_2) = n_1 \cdot ((a_2 \cdot s) \bmod n_2)$.

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

// proizvod brojeva x i y po modulu n
long long pm(long long x, long long y, long long n) {
  return ((x % n) * (y % n)) % n;
}

// racuna (z * x) mod (z * y)
long long pmp(long long x, long long y, long long z) {
  return z * (x % y);
}

// zbir brojeva x i y po modulu n
long long zm(long long x, long long y, long long n) {
  return ((x % n) + (y % n)) % n;
}

// izracunavanje Bezuovih koeficijenata prosirenim Euklidovim
// algoritom - nakon primene funkcije vazi:
//    s*a + t*b = nzd(a, b)
//    pri cemu funkcija vraca vrednost nzd(a, b)
long long bezu(long long a, long long b, long long& s, long long& t) {
  long long r0 = a, r1 = b;
  long long s0 = 1, s1 = 0;
  long long t0 = 0, t1 = 1;
  while (r1 > 0) {
    long long q = r0 / r1;
    long long tmp;

    tmp = r0;
    r0 = r1;
    r1 = tmp - q*r1;

    tmp = s0;
    s0 = s1;
    s1 = tmp - q*s1;

    tmp = t0;
    t0 = t1;
    t1 = tmp - q*t1;
  }
  s = s0; t = t0;
  return r0;
}
```

```
// kineska teorema o ostacima za dva broja
long long kto(long long a1, long long n1, long long a2, long long n2) {
  long long m1, m2;
  // izracunavamo bezuove koeficijente tako da je m1*n1 + m2*n2 = 1
  bezu(n1, n2, m1, m2);
  // resenje je (a1*m2*n2 + a2*m1*n1) % (n1*n2),
  // ali zbog prekoracenja moramo transformisati formulu
  long long n = n1*n2;
  long long x = zm(pmp(pm(a1, m2, n), n1, n2),
                   pmp(pm(a2, m1, n), n2, n1), n);
  // popravak ako je resenje eventualno negativno
  if (x < 0)
    x += n;
  return x;
}

int main() {
  // ucitavamo prvi par
  long long a, n;
  cin >> a >> n;
  for (int j = 1; j < 3; j++) {
    // ucitavamo naredni par
    long long aj, nj;
    cin >> aj >> nj;
    // Kineskom teoremom izracunavamo resenje za tekuce vrednosti a, n i
    // ucitane vrednosti aj, nj i pripremamo a i n za sledecu iteraciju
    a = kto(a, n, aj, nj);
    n *= nj;
  }

  // ispisujemo resenje
  cout << a << endl;

  return 0;
}
```

Сито

Постоји још један поступак мање математички захтеван, мање ефикасан него претходни, али за који се показује да је довољно ефикасан да реши задатак у оквиру постављених ограничења. Приступ је заснован на паметној претрази. Ако број r са бројем n_1 даје остатак a_1 онда је он сигурно један од чланова аритметичког низа $a_1, a_1 + n_1, a_1 + 2n_1, \ldots$ У петљи редом проверавамо ове бројеве све док не наиђемо на први елемент који при дељењу са n_2 даје остатак n_2. Када такав број a_{12} нађемо (он ће бити најмањи позитиван број са особином да при дељењу са n_1 и n_2 даје редом остатке a_1 и a_2), знамо да ће сваки наредни број који задовољава то својство бити члан аритметичког низа $a_{12}, a_{12} + n_1 \cdot n_2, a_{12} + 2 \cdot n_1 \cdot n_2, \ldots$ Редом претражујемо елементе овог низа док не наиђемо на елемент a_{123} који при дељењу са n_3 даје остатак a_3. По-

што су у нашем задатку дата само три елемента, ово је и коначно решење. Поступак би се лако уопштио тако што би се након проналажења a_{123} посматрали бројеви a_{123}, $a_{123} + n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$, $a_{123} + 2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ и тако даље.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

int main() {
  // ucitavamo delioce i ostatke
  int k = 3;
  vector<long long> a(k), n(k);
  for (int i = 0; i < k; i++)
    cin >> a[i] >> n[i];

  // sortiramo nizove opadajuce po n - nizovi su kratki pa koristimo
  // naivnu implementaciju selection sort algoritma
  for (int i = 0; i < k; i++)
    for (int j = i+1; j < k; j++)
      if (n[i] > n[j]) {
        swap(n[i], n[j]);
        swap(a[i], a[j]);
      }

  // "sito"
  long long m = a[0], p = n[0];
  for (int i = 1; i < k; i++) {
    while (m % n[i] != a[i])
      m += p;
    p *= n[i];
  }

  // prijavljujemo rezultat
  cout << m << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Билијар

Поставка: Билијарски сто је правоугаоног облика димензије $m \times n$ и има четири рупе у ћошковима. Лоптица се удара из поља са целобројним координатама (x, y) (при чему то не може бити нека рупа), дуж линије која је паралелна или је под углом од 45 степени у односу на неку од ивица стола. Ако претпоставимо да лоптица не успорава своје кретање, да се од сваке се ивице одбија под углом од $45°$, да је веома

мала и да у рупу упада само ако су јој координате центра једнаке координати рупе, напиши програм који одређује да ли ће лоптица некада упасти у рупу и ако хоће у коју рупу ће упасти.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава 6 целих бројева. Димензије стола m и n ($1 \leq m, n \leq 10^9$), координате почетне позиције лоптице x и y ($0 \leq x \leq m$ и $0 \leq y \leq n$), тако да те координате не одређују рупу и хоризонтална и вертикална компонента брзине лоптице v_x и v_y ($-1 \leq v_x, v_y \leq 1$).

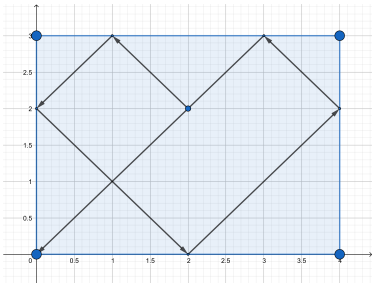
Излаз: На стандардни излаз исписати координате рупе у коју ће упасти лоптица или -1 ако ће се лоптица бесконачно дуго одбијати.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`4 3 2 2 -1 1`	`0 0`

Објашњење

Путања лоптице је приказана на слици.



Слика 3.2: Билијар

Пример 2

Улаз

```
4 4 2 0 1 1
```

Излаз

```
-1
```

Пример 3

Улаз

```
10 10 10 1 -1 0
```

Излаз

```
-1
```

Решење: Случајеви када се лоптица испаљује паралелно са ивицом стола су тривијални и могу се једноставно директно разрешити. Претпоставимо зато да је лоптица испаљена дуж неке косе праве.

Основна идеја за решавање задатка је слична оној приказаној у задатку . Обележимо са r_x почетно хоризонтално које лоптица пређе од њеног почетног положаја до леве тј. десне ивице стола ка којој се креће чим се испали. Растојање r_x биће једнако нули ако се лоптица већ налази на левој или десној ивици, биће једнако x ако се лоптица испаљује налево или $m - x$ ако се испаљује надесно. Током свог кретања лоптица се налази на левој или на десној ивици стола када хоризонтално пређе растојање r_x, након тога када додатно пређе једну ширину стола (када пређе $r_x + m$), након тога када додатно пређе још једну ширину стола (када пређе $r_x + 2m$) и тако даље. Дакле, лоптица ће бити на левој или десној ивици када је дужина њеног пређеног пута у хоризноталном правцу једнако $r_x + k_x m$, за неко целобројно k. Пошто је почетно растојање r_x до најближе ивице увек мање од ширине стола m, лоптица ће бити на левој или десној ивици ако и само ако је остатак при дељењу хоризонталног растојања са m једнак r_x. Слично, лоптица ће бити на горњој или доњој ивици стола ако и само ако је остатак при дељењу вертикалног растојања са n једнак r_y, где је r_y почетно растојање до горње или доње ивице ка којој је лоптица испаљена. Пошто је интензитет хоризонталне и вертикалне компоненте брзине увек једнак, укупно хоризонтално и вертикално пређено растојање биће увек једнако. Дакле, лоптица ће бити у рупи када хоризонтално и вертикално пређе најмање растојање r такво да је остатак при дељењу r са m једнако r_x и када је остатак при дељењу r са n једнако r_y. Када су r_x и r_y једнаки нули (када се лоптица на почетку налази у рупи), r ће бити НЗС бројева m и n.

Када нису, онда се r може одредити применом Кинеске теореме о остацима, коју смо приказали у задатку . Обратимо пажњу на то да бројеви m и n не морају бити узајамно прости, тако да се не можемо директно позвати на основни облик теореме. Нека је d највећи заједнички делилац бројева m и n. Ако бројеви r_x и r_y имају различити остатак при дељењу са d, тада решење не постоји и лоптица никада не упада у рупу.

Докажимо претходно тврђење. Заиста, претпоставимо да је $r_x = q_x \cdot d + r'_x$ и да је $r_y = q_y \cdot d + r'_y$, за $0 \leq r'_x, r'_y < d$. Ако би постојао број r који би давао остатак r_x при дељењу са m и остатак r_y при дељењу са n, важило би да је $r = q_m \cdot m + r_x = q_n \cdot n + r_y$. Пошто је d делилац бројева m и n важило би да је $q_m \cdot (m' \cdot d) + q_x \cdot d + r'_x = q_n(n' \cdot d) + q_y \cdot d + r'_y$. Зато разлика $r'_x - r'_y$ мора бити дељива са d, а пошто су оба та броја мања од d, они морају бити једнаки. Дакле, ако решење постоји, остатак при дељењу бројева r_x и r_y са d мора бити исти.

Ако бројеви r_x и r_y дају исти остатак при дељењу са d, тада задатак можемо решити мало модификованом применом Кинеске теореме о остацима. Тврдимо да ће постојати јединствен број мањи од највећег заједничког садржаоца бројева m и n (који је једнак $(m \cdot n)/d$) који при дељењу са m даје остатак r_x, а при дељењу са n даје остатак r_y.

Коришћењем Безуове теореме изразимо $d = c_m \cdot m + c_n \cdot n$, за неке целобројне коефицијенте c_m и c_n. Скраћивањем са d добијамо да је $c_m \cdot (m/d) + c_n \cdot (n/d) = 1$. Тражено решење је број $(r_x \cdot c_n \cdot (n/d) + r_y \cdot c_m \cdot (m/d)) \bmod ((m \cdot n)/d)$.

```
#include <iostream>
#include <algorithm>

using namespace std;
```

```
// zbir brojeva x i y po modulu n
long long zm(long long x, long long y, long long n) {
  return ((x % n) + (y % n)) % n;
}

// proizvod brojeva x i y po modulu n
long long pm(long long x, long long y, long long n) {
  return ((x % n) * (y % n)) % n;
}

// vrednost izraza (z * x) mod (z * y)
long long pmp(long long x, long long y, long long z) {
  return z * (x % y);
}

// izracunavanje Bezuovih koeficijenata prosirenim Euklidovim
// algoritom - nakon primene funkcije vazi:
//    s*a + t*b = nzd(a, b)
//    pri cemu funkcija vraca vrednost nzd(a, b)
long long bezu(long long a, long long b, long long& s, long long& t) {
  long long r0 = a, r1 = b;
  long long s0 = 1, s1 = 0;
  long long t0 = 0, t1 = 1;
  while (r1 > 0) {
    long long q = r0 / r1;
    long long tmp;

    tmp = r0;
    r0 = r1;
    r1 = tmp - q*r1;

    tmp = s0;
    s0 = s1;
    s1 = tmp - q*s1;

    tmp = t0;
    t0 = t1;
    t1 = tmp - q*t1;
  }
  s = s0; t = t0;
  return r0;
}

// kineska teorema o ostacima za dva broja
bool kto(long long a1, long long n1, long long a2, long long n2,
              long long& r) {
```

```
  long long m1, m2;
  // izracunavamo Bezuove koeficijente tako da je m1*n1 + m2*n2 = nzd(n1, n2)
  long long d = bezu(n1, n2, m1, m2);

  // proveravamo da li resenje postoji
  if (a1 % d != a2 % d)
    return false;

  // resenje je (a1*m2*(n2/d) + a2*m1*(n1/d)) % (n1*n2/d),
  // ali zbog prekoracenja sve operacije radimo po modulu
  long long n = (n1 / d) * n2;
  r = zm(pmp(pm(a1, m2, n), n1, n2 / d),
         pmp(pm(a2, m1, n), n2, n1 / d), n);

  // popravak ako je resenje eventualno negativno
  if (r < 0)
    r += n;
  return true;
}

int main() {
  int m, n, x, y, vx, vy;
  cin >> m >> n >> x >> y >> vx >> vy;
  if (vx == 0 && vy == 0)
    // loptica stoji
    cout << "-1" << endl;
  else if (vx == 0) {    // loptica se krece samo vertikalno
    if (x != 0 && x != m)
      cout << "-1" << endl;
    else if (vy > 0)
      cout << x << " " << m << endl;
    else
      cout << x << " " << 0 << endl;
  } else if (vy == 0) {  // loptica se krece samo horizontalno
    if (y != 0 && y != n)
      cout << "-1" << endl;
    else if (vx > 0)
      cout << m << " " << y << endl;
    else
      cout << 0 << " " << y << endl;
  } else {               // loptica se krece dijagonalno
    // horizontalno rastojanje potrebno da loptica dodje do leve ili
    // desne ivice
    int rx = (vx > 0 ? (m - x) : x) % m;
    // vertikalno rastojanje potrebno da loptica dodje do gornje ili
    // donje ivice
    int ry = (vy > 0 ? (n - y) : y) % n;
```

```
    // horizontalno i vertikalno rastojanje koje loptica predje dok ne
    // upadne u rupu
    long long r;
    // rastojanje odredjujemo primenom KTO
    if (!kto(rx, m, ry, n, r))
      // loptica nikada ne upada u rupu
      cout << "-1" << endl;
    else {
      // prva ivica koju loptica dodirne
      int prva_ivica_x;        // 0 je leva, a 1 je desna
      if (x == 0)              // vec je na levoj ivici
        prva_ivica_x = 0;
      else if (x == m)         // vec je na desnoj ivici
        prva_ivica_x = 1;
      else                     // zavisi od brzine
        prva_ivica_x = vx < 0 ? 0 : 1;
      int prva_ivica_y;        // 0 je donja, a 1 je gornja
      if (y == 0)              // vec je na donjoj ivici
        prva_ivica_y = 0;
      else if (y == n)         // vec je na gornjoj ivici
        prva_ivica_y = 1;
      else                     // zavisi od brzine
        prva_ivica_y = vy < 0 ? 0 : 1;
      // broj prelaza stola koja loptica napravi
      long long broj_prelaza_x = (r - rx) / m;
      long long broj_prelaza_y = (r - ry) / n;
      // koordinate na kojima se loptica nalazi
      int rupax = (prva_ivica_x + broj_prelaza_x) % 2 == 0 ? 0 : m;
      int rupay = (prva_ivica_y + broj_prelaza_y) % 2 == 0 ? 0 : n;
      cout << rupax << " " << rupay << endl;
    }
  }
  return 0;
}
```

Задатак: Ојлерова функција

Поставка: Напиши програм који одређује колико има природних бројева m мањих или једнаких од датог броја n који су узајамно прости са n тј. за које је $1 \leq m \leq n$ и $nzd(m, n) = 1$.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се број n ($1 \leq n \leq 2 \cdot 10^9$).

Излаз: На стандардни излаз исписати само тражени број.

Пример

Улаз	*Излаз*
9	6

Објашњење

Бројеви узајамно прости са бројем n су бројеви 1, 2, 4, 5, 7 и 8 и има их укупно 6.

Пример 2

Улаз

```
1
```

Излаз

```
1
```

Објашњење

Број 1 задовољава услове $1 \leq 1$ и $nzd(1, 1) = 1$.

Решење: Функцију $\varphi(n)$ која израчунава број бројева узајамно простих са n проучавао је Леонард Ојлер, па се ова функција обично назива Ојлерова функција.

Наивни приступ израчунавању заснивао би се на бројању елемената који су узајамно прости са датим бројем n (дакле, на бројању елемената који задовољавају дати услов, слично као, на пример, у задатку Просек одличних), при чему бисмо проверу да ли су два броја узајамно проста могли засновати на израчунавању НЗД и примени Еуклидовог алгоритма који смо описали у задатку Спортски турнир инсеката (бројеви су узајамно прости ако и само ако им је НЗД једнак 1).

```
#include <iostream>

using namespace std;

// izracunavanje najveceg zajednickog delioca brojeva a i b
int nzd(int a, int b) {
  // Euklidov algoritam
  while (b > 0) { // dok b ne postane nula
    int tmp = b;  // par (a, b) menjamo parom (b, a % b)
    b = a % b;    // jer je nzd(a, b) = nzd(b, a % b)
    a = tmp;
  }
  return a;       // nzd(a, 0) = a
}

int phi(int n) {
  int broj = 0;
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    if (nzd(i, n) == 1)
      broj++;
  return broj;
}

int main() {
  int n;
```

```
  cin >> n;
  cout << phi(n) << endl;
  return 0;
}
```

Ипак, математичка својства Ојлерове функције нам дају начин да њену вредност много брже израчунамо. Функција је мултипликативна, тј. ако су a и b узајмно прости бројеви, тада је $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Вредности мултипликативних функција се могу јако ефикасно израчунати на основу разлагања аргумента на просте чиниоце и израчунавању вредности функције за просте чиниоце (ту смо технику видели, на пример, у задатку Савршени бројеви). Ако је p прост број, тада је $\varphi(p) = p - 1$ (јер су сви бројеви мањи од p узајамно прости са p). Број узајамно простих бројева са бројем p^k је $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \cdot \left(\frac{p-1}{p}\right)$. Од свих p^k бројева из интервала $[1, p^k]$ једини који нису узајамно прости са p^k су умношци броја p (то су бројеви p, $2p$, $3p$, ..., $p^{k-1} \cdot p$). Њих је p^{k-1}, што доказује тврђење. Дакле, ако се број n растављa као $p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, тада је $\varphi(n) = \left(p_1^{k_1} \cdot \left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{k_m} \cdot \left(\frac{p_m-1}{p_m}\right)\right)$ тј. $(p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}) \frac{(1-p_1)\cdot\ldots\cdot(1-p_m)}{p_1\cdot\ldots\cdot p_m}$ односно $n \cdot \frac{(1-p_1)\cdot\ldots\cdot(1-p_m)}{p_1\cdot\ldots\cdot p_m}$.

Ово нам даје начин за ефикасно израчунавање вредности $\varphi(n)$. На основу алгоритма датог у задатку Растављање на просте чиниоце и сваки пут када наиђемо на прост чинилац p_i производ (који иницијализујемо на 1) множимо вредношћу $\frac{p_i-1}{p_i}$. Након тога из броја уклањамо сва појављивања чиниоца p_i (за свако појављивање чиниоца, без обзира на његову вишеструкост, производ се множи само једним чиниоцем).

На крају као резултат враћамо акумулирани производ помножен вредношћу броја n. Пошто се n мења током одређивања његових простих чинилаца, боље решење је производ на почетку иницијализовати на n.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// broj brojeva manjih od n koji su uzajamno prosti sa n
int phi(int n) {
  // Ojlerova formula kaze da je taj broj jednak
  // n * proizvod(1 - 1/p) za sve proste brojeve p koji dele broj n
  int d = 2;
  int proizvod = n;
  // dok broj n ne postane prost
  while (d*d <= n) {
    if (n % d == 0) {
      // nasli smo nov prost faktor pa azuriramo proizvod
      proizvod = (proizvod / d) * (d - 1);
      // uklanjamo ostala pojavljivanja tog faktora
      while (n % d == 0)
        n /= d;
    }
    // prelazimo na sledeceg kandidata
```

```
    d++;
  }
  // n je prost broj, pa treba azurirati proizvod i za njega
  if (n > 1)
    proizvod = (proizvod / n) * (n - 1);
  // vracamo rezultat
  return proizvod;
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  cout << phi(n) << endl;
  return 0;
}
```

Полиноми

Задатак: Вредност полинома

Поставка: Са стандардног улаза се уносе степен n и реални коефицијенти полинома $y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + x \cdot a_1 + a_0$. Напиши програм који израчунава вредност тог полинома у k равномерно распоређених тачака интервала $[p, q]$.

Улаз: У првој линији стандардног улаза унети n ($2 \leq n \leq 9$) - степен полинома, у следећих $n + 1$ линија реалне вредности коефицијената полинома, затим, у наредној линији k ($2 \leq k \leq 40$) - број равномерно распоређених тачака на интервалу $[p, q]$, у наредној линији реалну вредност p - почетак интервала, и у наредној линији реална вредност q - крај интервала.

Излаз: У k линија исписати вредност полинома у равномерно распоређеним тачакама интервала $[p, q]$ заокружену на две децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
2	4.00
1.0	9.00
2.0	16.00
1.0	25.00
10	36.00
1.0	49.00
10.0	64.00
	81.00
	100.00
	121.00

Решење:

Хорнерова шема

Вредност полинома

$$y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + x \cdot a_1 + a_0$$

се може израчунати без коришћења операције степеновања ако се полином представи у Хорнеровом облику:

$$y = (((\ldots(((a_n \cdot x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + \ldots + a_1) \cdot x + a_0$$

Ако се y иницијализује са 0, у $n+1$ итерација се израчунава $y = y \cdot x + a_n$, $y = y \cdot x + a_{n-1}$, ... , $y = y \cdot x + a_0$.

Да би се вредност полинома израчунала у k равномерно распоређених тачака интервала $[p, q]$ - вредност полинома се израчунава у тачкама $p + i \cdot h$ за $i = 0, 1, \ldots, k-1$ и $h = (q-p)/(k-1)$.

Класична дефиниција

Уместо Хорнерове шеме може се употребити и класична дефиниција вредности. Тада се у сваком кораку израчунава степен x^i (функцијом `pow` тј. `Math.Pow`), множи се са коефицијентом a_i (који се налази у низу коефицијената `a` на позицији `i`) и додаје на текући збир (који је иницијално постављен на нулу). Једна могућа оптимизација овог поступка (која избегава употребу степеновања) је да се одржава вредност степена (која се иницијализује на 1) и да се у сваком кораку, након увећања збира вредност степена помножи са x. Ипак, Хорнерова шема је најелегантније и најефикасније решење.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
using namespace std;
const int N_MAX = 100;

double VrednostPolinoma(double a[], int n, double x) {
  // Hornerova shema
  double y = 0.0;
  for (int i = n; i >= 0; i--)
    y = y*x + a[i];
  return y;
}

int main() {
  // stepen i koeficijenti polinoma
  int n;
  cin >> n;
  double a[N_MAX];
  for (int i = n; i >= 0; i--)
    cin >> a[i];

  // broj tacaka i granice intervala
  int k;
```

```
  double p, q;
  cin >> k >> p >> q;

  // duzina intervala
  double h = (q - p) / (k - 1);
  // tekuca tacka
  double x;
  int i;
  for (i = 0, x = p; i < k; i++, x += h)
    cout << fixed << showpoint << setprecision(2)
     << VrednostPolinoma(a, n, x) << endl;
}
```

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cmath>
using namespace std;
const int N_MAX = 100;

double VrednostPolinoma(double a[], int n, double x) {
  double y = 0.0;
  for (int i = 0; i <= n; i++)
    y += a[i] * pow(x, i);
  return y;
}

int main() {
  // stepen i koeficijenti polinoma
  int n;
  cin >> n;
  double a[N_MAX];
  for (int i = n; i >= 0; i--)
    cin >> a[i];

  // broj tacaka i granice intervala
  int k;
  double p, q;
  cin >> k >> p >> q;

  // duzina intervala
  double h = (q - p) / (k - 1);
  // tekuca tacka
  double x;
  int i;
  for (i = 0, x = p; i < k; i++, x += h)
    cout << fixed << showpoint << setprecision(2)
     << VrednostPolinoma(a, n, x) << endl;
}
```

Задатак: Аритметика над полиномима

Поставка: Дата су два полинома, P и Q степенима и низовима својих коефицијената. Одредити њихов збир и производ.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се степен n ($0 \leq n \leq 20$) првог полинома, а у следећих $n+1$ линија реални коефицијенти првог полинома и то редом почев од коефицијента уз највећи степен. Затим се на стандардном улазу налази степен m ($0 \leq m \leq 20$) другог полинома, а у следећих $m+1$ линија реални коефицијенти другог полинома и то редом почев од коефицијента уз највећи степен.

Излаз: Приказати редом збир и производ, сваки у посебној линији. За сваки полином приказати у једној линији његове коефицијенте, на две децимале и то редом почев од коефицијента уз највећи степен.

Пример

Улаз	*Излаз*
2	2.00 2.00 1.00
2	2.00 -1.00 1.00 -2.00
1	
2	
1	
1	
-1	

Решење: Нека су дати полимоми

$$P_n(x) = p_n \cdot x^n + p_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + x \cdot p_1 + p_0$$

$$Q_m(x) = q_m \cdot x^m + q_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + x \cdot q_1 + q_0$$

Збир полинома одређујемо на следећи начин:

- ако су полиноми истог степена ($n = m$) резултат је полином степена n и његови коефицијенти су једнаки збиру одговарајућих коефицијената полинома P и Q,
- ако су полиноми различитих степени нпр. $n > m$ онда је збир полином степена n и коефицијенти од n до $m-1$ једнаки су коефицијентима полинома P, а коефицијенти од m до 0 једнаки су збиру одговарајућих коефицијентима полинома P и Q

Производ полинома P и Q је полином R степена $n+m$. Производ одређујемо тако што множимо сваки моном једног полинома сваким мономом другог полинома и сабирамо добијене мономе истог степена.

$$P \cdot Q = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} p_i \cdot q_j \cdot x^{i+j}$$

Сабирање вршимо поступно - на почетку све коефицијенте резултујућег полинома r_k постављамо на нулу, а затим за свако i од 0 до n и за свако j од 0 до m увећамо коефицијент r_{i+j} за вредност производа $p_i \cdot q_j$ (приликом множења монома $p_i \cdot x^i$ мономом $q_j \cdot x^j$ добијамо моном $p_i \cdot q_j \cdot x^{i+j}$, који се додаје моному $r_{i+j}x^{i+j}$ тренутно акумулираном у резулату).

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <iomanip>

using namespace std;

const int MAX_STEPEN = 20;

struct Polinom {
   double a[2 * MAX_STEPEN + 1];
   int n;
};

void unos(Polinom& P) {
  cin >> P.n;
  for (int i = P.n; i >= 0; i--)
    cin >> P.a[i];
}

void prikaz(Polinom P) {
  for (int i = P.n; i >= 0; i--)
    cout << fixed << setprecision(2) << showpoint << P.a[i] << " ";
  cout << endl;
}

Polinom zbir(Polinom P, Polinom Q) {
  Polinom R;
  R.n = max(P.n, Q.n);
  for (int i = 0; i < R.n; i++)
    R.a[i]=0;
  for (int i = 0; i <= R.n; i++) {
    if (i <= P.n)
      R.a[i] += P.a[i];
    if (i <= Q.n)
      R.a[i] += Q.a[i];
  }
  return R;
}

Polinom proizvod(Polinom P, Polinom Q) {
  Polinom R;
  R.n = P.n + Q.n;
  for (int i = 0; i <= R.n; i++)
    R.a[i]=0;
  for (int i = 0; i <= P.n; i++)
    for (int j = 0; j <= Q.n; j++)
      R.a[i + j] += P.a[i] * Q.a[j];
```

```
  return R;
}

int main() {
    Polinom P, Q, R, S;
    unos(P);
    unos(Q);
    R = zbir(P, Q);
    prikaz(R);
    R = proizvod(P, Q);
    prikaz(R);
    return 0;
}
```

Задатак: Множење полинома

Поставка: Напиши програм који ефикасно одређује производ два полинома.

Улаз: Са стандардног улаза се носе два полинома. За сваки полином је у једној линији дат степен n (цео број између 1 и 50000), а затим у наредној линији коефицијенти (реални бројеви заокружени на једну децималу, раздвојени размацима). Коефицијенти се задају редом, кренувши од слободног члана тј. коефицијента уз x^0, па закључно са коефицијентом уз x^n.

Излаз: На стандардни излаз исписати полином производ, у истом формату у ком су задати и чиниоци, осим што сви коефицијенти треба да буду заокружени на две децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
2 1.0 2.0 3.0 1 1.0 2.0	3 1.00 4.00 7.00 6.00

Решење: Множење можемо извршити класичним алгоритмом множења, који смо приказали у задатку Аритметика над полиномима. Сложеност тог алгоритма је $O(n_1 \cdot n_2)$, где су n_1 и n_2 степени полинома који се множе.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>

using namespace std;

// funkcija mnozi dva polinoma p1*p2
vector<double> proizvod(const vector<double>& p1,
                        const vector<double>& p2) {
  int n1 = p1.size(), n2 = p2.size();
```

```
  vector<double> proizvod(n1+n2-1, 0);
  for (int i = 0; i < n1; i++)
    for (int j = 0; j < n2; j++)
      proizvod[i+j] += p1[i] * p2[j];
  return proizvod;
}

vector<double> ucitajPolinom() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<double> p(n+1, 0.0);
  for (int i = 0; i <= n; i++)
    cin >> p[i];
  return p;
}

int main() {
  vector<double> p1 = ucitajPolinom();
  vector<double> p2 = ucitajPolinom();
  vector<double> r = proizvod(p1, p2);
  for (size_t i = 0; i < r.size(); i++)
    cout << fixed << showpoint << setprecision(2) << r[i] << " ";
  cout << endl;
  return 0;
}
```

Иако се неко време сматрало да је доња граница сложености множења полинома $O(n_1 \cdot n_2)$, Анатолиј Карацуба је 1960. показао да је декомпозицијом могуће добити ефикаснији алгоритам. Претпоставимо да је потребно помножити полиноме $a + bx$ и $c + dx$. Директан приступ подразумева израчунавање $ac + (ad + bc)x + bd$, што подразумева 4 множења. Карацубина кључна опаска је да се исто може остварити само са три множења (на рачун мало већег броја сабирања тј. одузимања, што није критично, јер са сабирање и одузимање обично врши брже него множење, а што важи и за полиноме, јер је сабирање и одузимање полинома операција линеарне сложености). Наиме, важи да је $ad + bc = (a + b)(c + d) - (ac + bd)$. Потребно је, дакле, само израчунати производе ac, bd и $(a + b)(c + d)$, а онда прва два производа употребити по два пута (они су потребни и директно и за израчунавање производа $ad + bc$).

Имајући овај Карацубин "трик" у виду, лако можемо направити алгоритам заснован на декомпозицији. Да би имплементација била једноставнија пре множења полиноме допуњујемо нулама тако да оба имају 2^n коефицијената. Пошто множење задовољава једначину $T(n) = 3T(n/2) + O(n)$, Сложеност множења је онда $O(n^{\log_2 3})$.

Имплементацију најједноставније можемо направити тако да се у сваком рекурзивном позиву сви међурезултати, као и крајњи резултат смештају у посебним векторима. Међутим, таква имплементација је неефикасна и тестови показују да не доприноси побољшању ефикасности наивне процедуре. Кључни проблем је то што се током рекурзије граде вектори у којима се чувају привремени резултати и те алокације и деалокације троше јако пуно времена.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

// funkcija mnozi dva polinoma p1*p2 sa po 2^k koeficijenata
vector<double> karacuba(const vector<double>& p1,
                        const vector<double>& p2) {
  // broj koeficijenata polinoma
  int n = p1.size();

  // polinome stepena 0 direktno množimo
  if (n == 1)
    return vector<double>{p1[0] * p2[0], 0.0};

  // delimo p1 na dve polovine: a i b
  vector<double> a(n / 2), b(n / 2);
  copy_n(begin(p1), n/2, begin(a));
  copy_n(next(begin(p1), n/2), n/2, begin(b));

  // delimo p2 na dve polovine: c i d
  vector<double> c(n / 2), d(n / 2);
  copy_n(begin(p2), n/2, begin(c));
  copy_n(next(begin(p2), n/2), n/2, begin(d));

  // Važi:
  //   (ax+b)*(cx+d) = a*c*x^2 + ((a+b)*(c+d) - a*c - b*d)*x + b*d

  // rekurzivno računamo a*c i b*d
  vector<double> ac = karacuba(a, c);
  vector<double> bd = karacuba(b, d);

  // izračunavamo a+b (rezultat smeštamo u vektor a)
  for (int i = 0; i < n/2; i++)
    a[i] += b[i];
  // izračunavamo c+d (rezultat smeštamo u vektor c)
  for (int i = 0; i < n/2; i++)
    c[i] += d[i];

  // izračunavamo (a+b)*(c+d)
  vector<double> adbc = karacuba(a, c);
  // izračunavamo (a+b)*(c+d) - a*c - b*d
  for (int i = 0; i < n; i++)
    adbc[i] -= ac[i] + bd[i];
```

```
  // sklapamo proizvod iz delova
  vector<double> proizvod(2*n, 0.0);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    proizvod[n + i] += bd[i];
    proizvod[n/2 + i] += adbc[i];
    proizvod[i] += ac[i];
  }

  // vraćamo rezultat
  return proizvod;
}

// najmanji broj oblika 2^k koji je veci ili jednak od n
int stepenDvojke(int n) {
  int s = 1;
  while (s < n)
    s <<= 1;
  return s;
}

vector<double> ucitajPolinom() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<double> p(n+1, 0.0);
  for (int i = 0; i <= n; i++)
    cin >> p[i];
  return p;
}

int main() {
  vector<double> p1 = ucitajPolinom();
  int n1 = p1.size() - 1;
  vector<double> p2 = ucitajPolinom();
  int n2 = p2.size() - 1;
  int s1 = stepenDvojke(p1.size());
  int s2 = stepenDvojke(p2.size());
  int s = max(s1, s2);
  p1.resize(s, 0.0); p2.resize(s, 0.0);

  vector<double> r = karacuba(p1, p2);
  for (int i = 0; i <= n1 + n2; i++)
    cout << fixed << showpoint << setprecision(2) << r[i] << " ";
  cout << endl;
  return 0;
}
```

Пажљивија анализа показује да је могуће сву помоћну меморију алоцирати само једном и онда током рекурзије користити стално исти помоћни меморијски простор. Ве-

личина потребне помоћне меморије је $4n$ (два пута по n да се сместе полиноми $a + b$ и $c + d$ и још $2n$ да се смести њихов производ). Додатна оптимизација је да се примети да је за мале степене полинома класичан алгоритам бржи него алгоритам заснован на декомпозицији (ово је чест случај код алгоритама заснованих на декомпозицији). Експерименталном анализом се утврђује да се више исплати применити класичан алгоритам кад год је $n \leq 4$.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

// množimo polinome čiji su koeficijenti smešteni u vektorima
// p1[start1, start1+n) i p2[start2, start2+n)
// i rezultat smeštamo u vektor
// proizvod[start_proizvod, start_proizvod + 2n),
// koristeći pomocni memorijski prostor u vektoru
// pom[start_pom, start_pom + 4n)
void karacuba(int n,
              const vector<double>& p1, int start1,
              const vector<double>& p2, int start2,
              vector<double>& proizvod, int start_proizvod,
              vector<double>& pom, int start_pom) {

  // izlaz iz rekurzije
  if (n <= 4) {
    // klasični algoritam množenja
    for (int i = 0; i < 2*n; i++)
      proizvod[start_proizvod + i] = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
      for (int j = 0; j < n; j++)
        proizvod[start_proizvod + i+j] +=
           p1[start1 + i] * p2[start2 + j];
    return;
  }

  // Važi: (a+bx)*(c+dx) =
  //           a*c + ((a+b)*(c+d) - a*c - b*d)*x + b*d*x^2

  // Izračunavamo rekurzivno a*c i smeštamo ga u levu polovinu
  // proizvoda
  karacuba(n / 2, p1, start1, p2, start2,
           proizvod, start_proizvod, pom, start_pom);
  // Izračunavamo rekurzivno b*d i smeštamo ga u desnu polovinu
  // proizvoda
  karacuba(n / 2, p1, start1 + n/2, p2, start2 + n/2,
```

```
            proizvod, start_proizvod + n, pom, start_pom);

  // Izračunavamo a+b i smeštamo ga u pomoćni vektor (na početak)
  for (int i = 0; i < n/2; i++)
    pom[start_pom + i] =
        p1[start1 + i] + p1[start1 + n/2 + i];
  // Izračunavamo c+d i smeštamo ga u pomoćni vektor (iza (a+b))
  for (int i = 0; i < n/2; i++)
    pom[start_pom + n / 2 + i] =
        p2[start2 + i] + p2[start2 + n/2 + i];

  // Rekurzivno izračunavamo (a+b)*(c+d) i smeštamo ga
  // u pomoćni vektor, iza (a+b) i (c+d)
  karacuba(n / 2, pom, start_pom, pom, start_pom + n / 2,
           pom, start_pom + n, pom, start_pom + 2*n);

  // Izračunavamo (a+b)*(c+d) - (ac + bd)
  for (int i = 0; i < n; i++)
    pom[start_pom + n + i] -=
      proizvod[start_proizvod + i] + proizvod[start_proizvod + n + i];

  // Dodajemo ad+bc na sredinu proizvoda
  for (int i = 0; i < n; i++)
    proizvod[start_proizvod + n/2 + i] += pom[start_pom + n + i];
}

// funkcija množi dva polinoma p1*p2 sa po 2^k koeficijenata
vector<double> karacuba(const vector<double>& p1,
                        const vector<double>& p2) {
  int n = p1.size();
  // koeficijenti proizvoda
  vector<double> proizvod(2 * n);
  // pomoćni memorijski prostor potreban za realizaciju algoritma
  vector<double> pom(4 * n);
  // vršimo množenje
  karacuba(n, p1, 0, p2, 0, proizvod, 0, pom, 0);
  // vraćamo proizvod
  return proizvod;
}

// najmanji broj oblika 2^k koji je veci ili jednak od n
int stepenDvojke(int n) {
  int s = 1;
  while (s < n)
    s <<= 1;
  return s;
}
```

```
vector<double> ucitajPolinom() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<double> p(n+1, 0.0);
  for (int i = 0; i <= n; i++)
    cin >> p[i];
  return p;
}

int main() {
  vector<double> p1 = ucitajPolinom();
  int n1 = p1.size() - 1;
  vector<double> p2 = ucitajPolinom();
  int n2 = p2.size() - 1;
  int s1 = stepenDvojke(p1.size());
  int s2 = stepenDvojke(p2.size());
  int s = max(s1, s2);
  p1.resize(s); p2.resize(s);
  vector<double> r = karacuba(p1, p2);
  for (int i = 0; i <= n1 + n2; i++)
    cout << fixed << showpoint << setprecision(2) << r[i] << " ";
  cout << endl;
  return 0;
}
```

Глава 4

Алгоритми текста

Хеширање ниски

Алгоритми хеширања могу бити корисни у решавању различитих проблема над текстом, као што је рецимо проналажење узорка у тексту или проналажење најдуже ниске која се јавља бар два пута као сегмент дате ниске или приликом компресије ниске и слично. Хеширање је корисно и приликом верификације лозинки: приликом логовања на неки систем, рачуна се хеш вредност лозинке и шаље се серверу на проверу. Лозинке се на серверу чувају у хешираном облику, из безбедоносних разлога.

Коришћење хеширања често служи да се алгоритми грубе силе учине ефикаснијим. Размотримо проблем упоређивања две ниске карактера. Алгоритам грубе силе пореди карактер по карактер датих ниски и сложености је $O(\min\{n_1, n_2\})$, где су n_1 и n_2 дужине улазних ниски. Да ли постоји ефикаснији алгоритам? Сваку ниску можемо конвертовати у цео број и уместо ниски карактера упоредити добијене бројеве. Конверзију вршимо помоћу **хеш функције**, а добијене целе бројеве називамо **хеш вредностима** (или скраћено хешевима) ниски карактера. Потребно је да важи следећи услов: ако су две ниске s и t једнаке, и њихове хеш вредности $h(s)$ и $h(t)$ морају бити једнаке. Обратимо пажњу да обратно не мора да важи: ако је $h(s) = h(t)$ не мора нужно да важи $s = t$. На пример, ако бисмо хтели да вредност хеш функције буде јединствена за сваку ниску дужине до 15 карактера која се састоји само од малих слова азбуке, хеш вредности ниски не би стале у опсег 64-битних целих бројева (а свакако нам није циљ да упоређујемо целе бројеве са произвољно много цифара јер би такво поређење било сложености $O(n)$, где је n број цифара). Овакво упоређивање је сложености $O(1)$, међутим само хеширање је сложености $O(n_1 + n_2)$.

Дакле, обично је циљ пресликати скуп ниски у вредности из фиксираног опсега $[0, m)$. Притом је, наравно, пожељно да за две различите ниске вероватноћа да њихове хеш вредности буду једнаке, односно да дође до *колизије*, буде веома мала. У великом броју случајева могућност колизије се игнорише, потенцијално притом нарушавајући коректност алгоритма. Друга могућност је да се у случајевима када се добију једнаке хеш вредности две ниске изврши провера једнакости ове две ниске карактер по карак-

тер, чиме се потенцијално жртвује ефикасност алгоритма. Одабир једна од ове две опције зависи од конкретне примене.

Јасно је да хеш функција треба да зависи од дужине ниске и од редоследа карактера у ниски. Добар и широко распрострањен начин дешинисања хеш функције ниске s дужине n је коришћењем наредне *полиномијалне хеш функције* (енгл. polynomial rolling hash function):

$$h(s) = (s[0] + s[1] \cdot p + s[2] \cdot p^2 + \ldots s[n-1] \cdot p^{n-1}) \bmod m = (\sum_{i=0}^{n-1} s[i] \cdot p^i) \bmod m$$

при чему су $s[i]$ целобројни кодови карактера ниске s, а p и m су неки унапред одабрани, позитивни бројеви. Пажљив одабир параметара је важан да би се осигурала добра својства хеш функције. Обично се за p бира први већи прост број од броја карактера у улазној азбуци. На пример, ако се ниске састоје само од малих слова азбуке онда је добар избор $p = 31$. Ово одговара представљању броја s у систему са основом p. Пожељно је да број m буде неки велики број јер је вероватноћа да две случајно одабране ниске имају исту хеш вредност приближно једнака $1/m$. Међутим, избегаваћемо превелике вредности за параметар m (јер је добро да вредност $m \cdot m$ не изазива прекорачење). Као и за параметар p, и за параметар m је погодно бирати неки прост број.

Често је претходно дефинисана полиномијална хеш функција довољно добра и приликом тестирања неће доћи до колизије. На пример, за одабир $m = 10^9 + 9$ вероватноћа да дође до колизије је само $1/m = 10^{-9}$, под претпоставком да су све хеш вредности једнако вероватне. Међутим, уколико ниску s поредимо са 10^6 различитих ниски, вероватноћа да се деси бар једна колизија је око 10^{-3}, а ако поредимо 10^6 ниски међусобно вероватноћа бар једнек колизије је 1. Последња поменута појава је позната под називом *рођендански парадокс* и односи се на наредни контекст: ако се у једној соби налази n особа, вероватноћа да неке две имају рођендан истог дана износи око 50% за $n = 23$, док за $n = 70$ она износи чак 99.9%. Постоји једноставни трик којим се може смањити вероватноћа да дође до колизије – рачунањем две различите хеш вредности (нпр. коришћењем исте функције за различите вредности параметара p и/или m). Ако је m око 10^9 за обе функције, онда је ово упоредиво са коришћењем једне хеш функције за вредност m приближно једнако 10^{18}. Сада, ако поредимо 10^6 ниски међусобно, вероватноћа колизије смањиће се на 10^{-6}.

У језику C++ на располагању нам је и структура `hash` која се може употребити за рачунање хеш вредности ниски (али и осталих основних типова података).

```
hash<string> h;
cout << h("abrakadabra") << endl;
```

Z-НИЗ

z-низ ниске s дужине n садржи на позицији $k = 0, 1, \ldots, n-1$ дужину најдужег сегмента ниске s који почиње на позицији k и префикс је ниске s. Дакле, ако важи $z[k] = p$ онда је ниска $s[0..p-1]$ једнака са ниском $s[k..k+p-1]$ и ни за једно $q > p$ не

важи да се ниске $s[0..q-1]$ и $s[k..k+q-1]$ поклапају. Многи проблеми над нискама могу се ефикасно решити коришћењем z-низа; неки од њих су испитивање да ли се нека ниска садржи у дугој ниски, компресија ниске у контексту одређивања најкраће ниске тако да се полазна ниска може представити надовезивањем одређеног броја те ниске итд. Вредност низа z на позицији 0 је суштински једнака дужини ниске јер је комплетна ниска увек префикс саме себе, али нам овде неће бити од значаја.

z-низ ниске `ACBACDACBACBACDA` једнак је:

```
|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9|10|11|12|13|14|15|
|A|C|B|A|C|D|A|C|B|A| C| B| A| C| D| A|
|-|0|0|2|0|0|5|0|0|7| 0| 0| 2| 0| 0| 1|
```

Вредност $z[6] = 5$ означава да је сегмент `ACBAC` (који почиње на позицији 6 и дужине је 5) префикс ниске s, док сегмент `ACBACB` (који почиње на истој позицији и дужине је 6) није.

Остаје питање како конструисати z-низ за дату ниску. Директно решење би се састојало у томе да се за сваки индекс тражи изнова позиција поклапајућег префикса ниске који почиње на текућој позицији у ниски. Ово решење би се реализовало уз помоћне две угњеждене петље и било би сложености $O(n^2)$.

z-алгоритам је алгоритам за конструкцију z-низа сложености $O(n)$. У њему се вредности z-низа израчунавају слева надесно, на основу претходно израчунатих вредности низа z. У алгоритму се одржава опсег индекса $[l, d]$ који означава да је сегмент $s[l..d]$ префикс ниске s при чему је d максимално могуће за фиксирано l. Чињеницу да је префикс $s[0..d-l]$ једнак сегменту $s[l..d]$ користимо за рачунање z-вредности за позиције $l+1, l+2, \ldots, d$.

Дакле, за текући индекс i за који треба израчунати вредност $z[i]$ могућа су два случаја:

- $i > d$ – текућа позиција је ван опсега $[l, d]$ који смо обрадили, те немамо никаквих информација о позицији i. Стога вредност $z[i]$ рачунамо тривијалним алгоритмом, тј. поређењем карактер по карактер. Ако добијемо $z[i] > 0$, онда је потребно ажурирати опсег $[l, d]$
- $i \leq d$ – текућа позиција је унутар поклопљеног сегмента $[l, d]$ те можемо искористити већ израчунате вредности z-низа за иницијализацију вредности $z[i]$ (уместо да крећемо од вредности 0). Сегменти $s[l..d]$ и $s[0..d-l]$ се поклапају, па се поклапају и сегменти $s[i..d]$ и $s[i-l..d-l]$ па приликом рачунања вредности $z[i]$ можемо кренути од вредности $z[i-l]$. Међутим, вредност $z[i-l]$ у неким случајевима може бити превелика, јер када се примени на позицију i може да превазиђе вредност индекса d, а то није добро јер ми не знамо ништа о карактерима ниске s након позиције d. Дакле, максимална вредност поклопљеног дела може бити једнака броју карактера од текуће позиције i до последње прегледане позиције d, а то је $d-i+1$. Стога се за почетну вредност поставља $z_0[i] = \min\{d-i+1, z[i-l]\}$. Након тога утврђујемо да ли се вредност $z[i]$ може повећати покретањем тривијалног алгоритма.

Дакле, алгоритам се дели на два случаја који се разликују само по иницијализацији вредности $z[i]$ након чега се поступак своди на примену тривијалног алгоритма.

Размотримо пример конструкције z-низа за ниску ACBACDACBACBACDA:

На почетку, опсег $[l, d]$ једнак је $[0, 0]$ па вредности z-низа на позицијама 1, 2 и 3 рачунамо тривијалним алгоритмом и добијамо $z[1] = z[2] = 0, z[3] = 2$. Након израчунате вредности $z[3]$ ажурирамо опсег $[l, d] = [3, 4]$.

```
       l_d
       | |
|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9|10|11|12|13|14|15|
|A|C|B|A|C|D|A|C|B|A| C| B| A| C| D| A|
|-|0|0|2|0|0|5|?|?|?| ?| ?| ?| ?| ?| ?|
```

Након тога, вредност 4 добијамо на основу вредности $z[4] = z[1] = 0$. Вредности $z[5]$ и $z[6]$ добијамо покретањем тривијалног алгоритма и добијамо $z[5] = 0$, а $z[6] = 5$ и текући $[l, d]$ опсег постаје $[6, 10]$.

```
            l_______d
            |       |
|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9|10|11|12|13|14|15|
|A|C|B|A|C|D|A|C|B|A| C| B| A| C| D| A|
|-|0|0|2|0|0|5|?|?|?| ?| ?| ?| ?| ?| ?|
```

Након овог корака, можемо ефикасно израчунати наредне z-вредности, јер знамо да су ниске $s[0..4]$ и $s[6..10]$ једнаке. Најпре, с обзиром на то да је $z[1] = z[2] = 0$ добијамо и да је $z[7] = z[8] = 0$. Након тога, с обзиром на то да је $z[3] = 2$, знамо да је $z[9] \geq 2$. Међутим, немамо информације о ниски након позиције 10, па поредимо сегменте карактер по карактер.

```
            l_______d
            |       |
|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9|10|11|12|13|14|15|
|A|C|B|A|C|D|A|C|B|A| C| B| A| C| D| A|
|-|0|0|2|0|0|5|0|0|?| ?| ?| ?| ?| ?| ?|
```

Испоставља се да је $z[9] = 7$, па је нови $[l, d]$ опсег једнак $[9, 15]$.

```
                l_______________d
                |               |
|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9|10|11|12|13|14|15|
|A|C|B|A|C|D|A|C|B|A| C| B| A| C| D| A|
|-|0|0|2|0|0|5|0|0|7| ?| ?| ?| ?| ?| ?|
```

Након овога, све преостале вредности z-низа могу се одредити на основу информација које се већ налазе у z-низу.

```
                l_______________d
                |               |
|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9|10|11|12|13|14|15|
|A|C|B|A|C|D|A|C|B|A| C| B| A| C| D| A|
|-|0|0|2|0|0|5|0|0|7| 0| 0| 2| 0| 0| 1|
```

Покажимо да је приказани алгоритам линеарне временске сложености. Након сваког неуспешног поређења карактера, текућа итерација `for` петље се завршава, а укупан

број итерација је n. Стога укупно можемо имати највише n непоклапања карактера. Сваки карактер који се поклопи у унутрашњој `while` петљи се више никада не пореди, те је и број успешно поклопљених карактера највише n. Одавде се добија да је укупна сложност алгоритма $O(n)$.

Често се за решавање неког проблема над нискама може искористити и хеширање ниски и z-алгоритам и ствар је избора који од ова два приступа изабрати. За разлику од хеширања, z-алгоритам увек ради и не постоји ризик од колизије, али је нешто тежи за имплементацију.

Задатак: З алгоритам

Поставка: За дати текст и узорак пронаћи све индексе у тексту на којима се налази узорак.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају 2 ниске (текст и узорак редом).

Излаз: На стандардни излаз исписати индексе свих појављивања узорка у тексту (индексирање почиње од 0).

Пример

Улаз	*Излаз*
`aaabbbabcdcccabcdddddabcd` `abcd`	`6 13 21`

Решење: Једна идеје може бити да се искористи З-алгоритам да се израчуна З-низ у ниски која се добија кад се узорак налепи на почетак текста. Додатно још треба додати неки карактер који је ван азбуке текста и узорка између њих (узорак$текст). Након тога се израчунава З-низ помоћу З-алгоритма. Након тога је довољно одредити индексе у З-низу где се налазе вредности које су једнаке дужини узорка. Када од тих вредности одузмемо дужину узорка добијамо позиције на којима почиње узорак.

Друга идеја је следећа: За сваки индекс у тексту проверавамо да ли на тој позицији почиње тражени узорак. Уколико се налази исписујемо позицију и настављамо кретање кроз текст, у супротном само настављамо кретање кроз текст.

```
#include<iostream>
#include<vector>

std::vector<int> count_z_array(const std::string &s)
{
  int n = s.size();
  std::vector<int> z(n);
  int l = 0;
  int r = 0;

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    if (i <= r)
      z[i] = std::min(r - i + 1, z[i - l]);
```

```
    while (i + z[i] < n && s[z[i]] == s[i + z[i]])
      z[i]++;

    if (i + z[i] - 1 > r) {
      l = i;
      r = i + z[i] - 1;
    }
  }

  return z;
}

void find_all_occurences(std::string text, const std::string &pattern)
{
  text = pattern + "$" + text;

  std::vector<int> z_array = count_z_array(text);

  int n = z_array.size(), pattern_len = pattern.size();

  for (int i = 0; i < n; i++)
    if (z_array[i] == pattern_len)
      std::cout << i - pattern_len - 1 << " ";

  std::cout << "\n";
}

int main()
{
  std::string text, pattern;

  std::cin >> text;

  std::cin >> pattern;

  find_all_occurences(text, pattern);

  return 0;
}
```

Тражење узорка у тексту

Један од најчешће сретаних задатака у раду са текстом је то да се провери да ли једна ниска садржи другу.

Задатак: Префикс суфикс

Поставка: Домине се слажу једна уз другу, тако што се поља на доминама постављеним једну уз другу морају поклапати. Домине обично имају само два поља, међутим, наше су домине специјалне и имају више различитих поља (означених словима). Ако све домине које слажемо имају исту шару, напиши програм који одређује како је домине могуће сложити тако да заузму што мање простора по дужини (свака наредна домина мора бити смакнута бар за једно поље). На пример,

```
ababcabab
     ababcabab
          ababcabab
```

Улаз: Први ред стандардног улаза садржи ниску малих слова енглеске абецеде које представљају шаре на доминама. Дужина ниске је између 2 и 50000 карактера. У наредном реду се налази цео број n ($1 \leq n \leq 1000$) који представља број домина.

Излаз: На стандардни излаз исписати цео број који представља укупну дужину сложених домина.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`ababcabab` `3`	`19`	`abc` `5`	`15`	`aa` `10`	`11`

Решење: Кључ решења овог задатка је одређивање најдужег правог префикса ниске који је уједно и њен прави суфикс (префикс и суфикс су прави, ако нису једнаки целој ниски). Такав префикс тј. суфикс зваћемо *префикс-суфикс*. Један начин да се он пронађе је груба сила (да се упореде сви прави префикси са одговарајућим суфиксима и да се од оних који се поклапају одабере најдужи).

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
  string str;
  cin >> str;
  int n;
  cin >> n;

  int maxD = 0;
  for (int d = 1; d < str.size(); d++) {
    bool prefiks_suffix = true;
    for (int i = 0, j = str.size() - d; i < d; i++, j++)
      if (str[i] != str[j]) {
    prefiks_suffix = false;
    break;
```

```
      }
    if (prefiks_sufiks)
      maxD = d;
  }

  cout << maxD + n * (str.size() - maxD) << endl;
  return 0;
}
```

Ипак, много ефикасније решење засновано је на динамичком програмирању које чини основу чувеног Кнут-Морис-Пратовог (КМП) алгоритма.

Рекурзивна формулација

Задатак има рекурзивно решење. Ако је ниска s празна она нема префикс-суфикс (јер нема правих префикса ни суфикса), а ако је једнословна, тада јој је једини префикс-суфикс празна ниска. Зато претпоставимо да је $|s| > 1$ и да је $s = s'a$ за неку ниску s' и неки карактер a. Кључни увид је то да се сваки префикс-суфикс речи s, осим празног, добија проширивањем неког префикс-суфикса речи s' за слово a. Претпоставимо да је x најдужи префикс-суфикс речи s' (он се може израчунати рекурзивно, јер је реч s' краћа од речи s) и да му је дужина d. Тада постоје ниске u и v такве да је $s' = xu = vx$. Оне су непразне јер је x прави префикс тј. прави суфикс ниске s', па није једнак s'. Нека је b прво слово ниске u и нека је $u = bu'$, за неку реч u'. Тада је $s = xbu'a = vxa$. Ако је $a = b$, тада је $xa = xb$ најдужи префикс-суфикс ниске s и његова дужина је $d + 1$. Остаје питање шта радити у случају када је $a \neq b$. Ако је x празан, тј. ако је $d = 0$, тада је једини префикс-суфикс речи s празан. У супротном, морамо размотрити неки краћи префикс-суфикс ниске s'. Следећи кандидат је најдужи прави суфикс од x који је уједно прави префикс од x иза њега треба проверити да ли се можда може продужити словом a. Овим смо проблем свели на проналажење најдужег префикс-суфикса ниске x, а то се може решити рекурзивно (јер је реч x краћа од речи s).

Поступак испитивања кандидата креће од најдужег префикс-суфикса речи s' и наставља скраћивањем кандидата се све док се не први пут не наиђе на префикс-суфикс који се може наставити или док се не утврди да ни празан префикс-суфикс не може да се продужи. Претпоставимо да је $|s| = n$. Тада је $a = s_{n-1}$, а пошто је $|x| = d$, важи да је $b = s_d$, па се поређење $a = b$ своди на поређење $s_{n-1} = s_d$. Ако су једнаки, дужина је $d+1$, а у супротном, ажурирамо d на дужину најдужег префикс-суфикса ниске x (тј. првих d карактера ниске s) и понављамо поређење s_d и s_{n-1} и поступак настављамо све док се не испостави да су они једнаки или да су различити и да је дужина $d = 0$.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;

// odredjuje najduzi pravi prefiks-sufiks reci str[0, ..., i]
int prefiks_sufiks(const string& str, int i);
```

```
int prefiks_sufiks_(const string& str, int k, int i) {
  int ps = prefiks_sufiks(str, k);
  if (str[ps] == str[i])
    return ps + 1;
  else if (ps == 0)
    return 0;
  return prefiks_sufiks_(str, ps - 1, i);
}

int prefiks_sufiks(const string& str, int i) {
  if (i == 0)
    return 0;
  return prefiks_sufiks_(str, i - 1, i);
}

int main() {
  string str;
  cin >> str;
  int n;
  cin >> n;

  int ps = prefiks_sufiks(str, str.size() - 1);
  cout << ps + n * (str.size() - ps) << endl;
  return 0;
}
```

Динамичко програмирање

Можемо приметити да ће се у претходно описаном рекурзивном поступку многи рекурзивни позиви поклапати (више пута ће се одређивати дужина најдужег префикс-суфикса за исти префикс ниске s). Стога је потребно применити мемоизацију, или још боље динамичко програмирање. У тој ситуацији одржавамо низ d_i који садржи дужине најдужих префикс-суфикса за префикс ниске s дужине i. Тако ће d_n садржати тражену дужину најдужег префикс-суфикса целе ниске s. Прва два елемента низа можемо иницијализовати на нулу (јер празна и једнословна ниска не могу имати непразан префикс-суфикс). Могуће је чак први елемент поставити на -1, како би се нагласило да ни празна ниска није прави суфикс-префикс празне ниске. Након тога, попуњавамо остале елементе низа, један по један.

Дужину најдужег префикс-суфикса речи $s_0 \dots s_i$ бележимо као d_{i+1} (јер та реч има тачно $i+1$ слово). Ту дужину одређујемо тако што поредимо s_i са s_{d_i} (заиста, d_i је дужина најдужег префикс-суфикса за $s_0 \dots s_{i-1}$, па се први следећи карактер иза њега налази на позицији s_{d_i}). Ако су једнаки, важи да је $d_{i+1} = d_i + 1$. У супротном, ако је d_i једнак 0, закључујемо да је $d_{i+1} = 0$, а ако није, настављамо исти поступак тако што уместо d_i посматрамо d_{d_i} и поредимо s_i са $s_{d_{d_i}}$. Заправо, можемо променљиву d иницијализовати на d_i, а затим поредити s_i са s_d, ако су једнаки постављати d_{i+1} на $d+1$ и прекидати поступак, а ако нису, онда постваљати d_{i+1} на нулу и прекидати поступак

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
  string str;
  cin >> str;
  int n;
  cin >> n;

  // kmp[i] - je duzina najduzeg prefiks-sufiksa dela str[0,..,i]
  vector<int> kmp(str.size());
  kmp[0] = 0;
  for (int i = 1; i < str.size(); i++) {
    int k = kmp[i - 1];
    while (true) {
      if (str[i] == str[k]) {
    kmp[i] = k + 1; break;
      } else if (k == 0) {
    kmp[i] = 0; break;
      } else
    k = kmp[k - 1];
    }
  }

  int ps = kmp[str.size() - 1];
  cout << ps + n * (str.size() - ps) << endl;
  return 0;
}
```

Имплементацију истог алгоритма можемо направити и мало другачије.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
  string str;
  cin >> str;
  int n;
  cin >> n;

  vector<int> kmp(str.size() + 1);
  kmp[0] = -1;
```

```
  for (int i = 0; i < (int)str.size(); i++) {
    int k = i;
    while (k > 0 && str[i] != str[kmp[k]])
      k = kmp[k];
    kmp[i + 1] = kmp[k] + 1;
  }

  cout << kmp[str.size()] + n * (str.size() - kmp[str.size()]) << endl;

  return 0;
}
```

z-алгоритам

z-алгоритам такође може бити користан за решавање овог проблема. Потребно је пронаћи најдужи суфикс домине (ниске) који је уједно и њен префикс. Ако претпоставимо да се n домина не преклапају њихова укупна дужина је $n * l$ где је l дужина једне домине. Ако од овог броја одузмемо $(n-1) * suf_l$ где је suf_l дужина најдужег суфикса који је и префикс добићемо тачну најмању свих домина уколико се почетак једне може надовезати на крај друге. Најдужи суфикс се може наћи креирањем z-низа, и то тако што у z-низу тражимо индекс i такав да важи да је вредност z-низа на тој позицији максимална вредност која је мања од дужине ниске (јер не желимо целу ниску да сматрамо најдужим суфиксом који је уједно префикс). Додатно још треба да важи да је $i + z[i] == z.size()$, тј да се ради баш о суфиксу ниске (а не да се индекс и налази негде у сред ниске и да одатле почиње неки суфикс).

Задатак: Подниска

Поставка: Написати програм којим се за две дате речи проверава да ли је друга садржана у првој, ако јесте одредити прву позицију на којој се друга реч појављује у првој.

Улаз: На стандардном улазу налазе се две речи свака у посебној линији. Свака реч има највише 20 карактера.

Излаз: На стандарном излазу приказати прву позицију (позиције су нумерисане од 0) на којој се налази друга реч у првој, ако се друга реч не налази у првој приказати -1.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`banana`	`1`
`ana`	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
`branka`	`-1`
`ana`	

Решење:

Библиотечке функције претраге

Када смо речи у језику C++ учитали у две променљиве типа `string` (назовимо их `igla` и `plast`, јер је тако одмах јасно шта у чему тражимо) онда позицију првог појављивања речи `igla` у речи `plast` можемо одредити помоћу `plast.find(igla)`. Ако реч `plast` не садржи реч `igla` онда `find` враћа специјалну вредност `string::npos`.

```
ios_base::sync_with_stdio(false);
// ucitavamo reci
string plast, igla;
cin >> plast >> igla;
// pretragu podniske vrsimo koriscenjem bibliotecke metode
size_t poz = plast.find(igla);
// ako niska nije nadjena, rezultat je string::npos
if (poz != string::npos)
  cout << poz << endl;
else
  cout << -1 << endl;
```

Имплементација претраге грубом силом

Осим коришћења библиотечких функција, решење је било могуће испрограмирати и "пешке" тако што ћемо дефинисати своју функцију претраге. Наравно, у реалној ситуацији је увек боље употребити библиотечке функције јер се кôд једноставније пише, мања је могућност грешке, а алгоритми на којима су засноване библиотечке функције су често напреднији од наивних алгоритама на којима се "пешке" решења понекад заснивају, какво је и ово које ћемо описати у наставку.

Размотримо, на пример, како бисмо у речи `ababcab` тражили реч `abc`. Прво можемо проверити да ли се реч `abc` налази у речи `ababcab` почевши од позиције 0. То радимо тако што поредимо редимо слова речи `abc` и слова речи `ababcab` почевши од позиције 0, све док не пронађемо различито слово или док не дођемо до краја речи `abc` а не пронађемо разлику. У овом примеру разлика ће бити пронађена на позицији 2 (слова `a` на позицији 0 и `b` на позицији 1 ће бити једнака, а онда ће се слово `c` разликовати од слова `a`). Пошто смо нашли разлику пре него што смо стигли до краја речи `abc`, настављамо претрагу тако што проверавамо да ли се можда реч `abc` налази у речи `ababcab` почевши од позиције 1. Овај пут поредимо слово на позицији 0 у речи `abc` са словом на позицији 1 у речи `ababcab` и одмах наилазимо на разлику, јер `a` није једнако `b`. Након тога претрагу настављамо тако што проверавамо да ли се реч `abc` налази у речи `ababcab` почевши од позиције 2. Тада поредимо слово `a` на позицији 0 у речи `abc`, са словом `a` на позицији 2 у речи `ababcab`, слово `b` на позицији 1 у речи `abc`, са словом `b` на позицији 3 у речи `ababcab` и слово `c` на позицији 2 у речи `abc`, са словом `c` на позицији 4 у речи `ababcab` и пошто не наилазимо на разлику, констатујемо да је подреч пронађена.

Ако бисмо, на пример, тражили реч `cba` у речи `ababcab` тада бисмо по истом принципу кренули да је тражимо од позиције 0, затим 1 итд. Када реч `cba` не пронађемо ни тако да почиње од позиције 4 речи `ababcab` (јер `cab` није исто што и `cba`) нема потребе да тражимо даље, јер иза позиције 4 нема довољно карактера да би се реч `abc` пронашла.

Дакле, за сваку позицију i у речи `plast`, од позиције 0, па док важи да је збир позиције i и дужине речи `igla` мањи или једнак дужини речи `plast` проверавамо да ли се реч `igla` налази у речи `plast` почевши од позиције i. То радимо тако што спроводимо алгоритам линеарне претраге који редом, за сваку позицију j у речи `igla` проверава да ли је слово у речи `igla` на тој позицији различито од слова на позицији $i + j$ у речи `plast`. Алгоритам претраге имплементирамо на неки од начина који смо приказали у задатку Негативан број. На пример, у петљи увећавамо j од нуле, па све док је j мање

од дужине речи `igla` и док важи да су слова у речи `igla` на позицији j и речи `plast` на позицији $i + j$ једнака. Када се петља заврши, проверавамо зашто је прекинута. Ако утврдимо да је вредност j једнака дужини речи `igla`, можемо констатовати да разлика није пронађена, да се прво појављивање речи `igla` у речи `plast` налази на позицији i и функција може да врати резултат i (прекидајући тиме спољашњу петљу). У супротном је пронађено различито слово, и наставља се са извршавањем спољашње петље (i се увећава, и подниска се тражи од следеће позиције, ако евентуално није достигнут услов за завршетак спољашње петље).

Још један начин да имплементирамо претрагу је да уведемо логичку променљиву која бележи да ли је разлика пронађена и коју иницијализујемо на `false`. У сваком кораку унутрашње петље (петље по j) проверавамо да ли је су слова у речи `igla` на позицији j и речи `plast` на позицији $i + j$ једнака. Ако нису, логичкој променљивој постављамо вредност `true` и прекидамо унутрашњу петљу. Након унутрашње петље проверавамо да ли је вредност логичке променљиве остала `false` и ако јесте, функција може да врати вредност i.

```
// Trazimo "iglu u plastu" tj. trazimo poziciju u reci plast
// na kojoj se nalazi rec igla.
// Ako takva pozicija ne postoji, funkcija vraca -1.
int podniska(string igla, string plast) {
  // za svaku poziciju u reci plast takvu da do kraja
  // ima bar onoliko karaktera koliko ima u reci igla
  for (size_t i = 0; i + igla.size() <= plast.size(); i++) {
    // proveravamo da li se rec igla nalazi u reci plast
    // pocevsi od pozicije i
    bool razliciti = false;
    for (size_t j = 0; j < igla.size(); j++) {
      // proveravamo da li je j-to slovo reci igla razlicito od j-tog
      // slova reci plast krenuvsi od pozicije i
      if (plast[i+j] != igla[j]) {
        razliciti = true;
        break;
      }
    }
    // ako smo dosli do kraja reci igla, tada smo je pronasli
    if (!razliciti)
      return i;
  }
  // nismo nasli rec igla i vracamo -1
  return -1;
}


int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);
  string plast, igla;
  cin >> plast >> igla;
```

```
  cout << podniska(igla, plast) << endl;
  return 0;
}
```

Рецимо да је описан алгоритам било могуће спровести и над нискама које су терминисане нулом, једино што се у петљи не би ишло до дужине ниске (она није унапред позната и потребно је проћи кроз целу ниску да би се пронашла нула и да би јој се израчунала дужина), већ би се итерација вршила док карактер на текућој позицији не постане нула. Итерација кроз ниску `s` терминисану нулом, канонски се врши на следећи начин:

```
for (int i = 0; s[i] != '\0'; i++)
  ...
```

или још једноставније

```
for (int i = 0; s[i]; i++)
  ...
```

```
// trazimo "iglu u plastu" tj. trazimo poziciju u reci plast na kojoj
// se nalazi rec igla. Ako takva pozicija ne postoji, funkcija vraca -1
int podniska(char igla[], char plast[]) {
  // za svaku poziciju u reci plast
  for (int i = 0; plast[i] != '\0'; i++) {
    // Proveravamo da li se rec igla nalazi u reci plast pocevsi od
    // pozicije i. Brojac j uvecavamo dok ne dodjemo do kraja neke
    // reci ili do prve razlike.
    int j;
    for (j = 0; igla[j] != '\0' && plast[i+j] != '\0' &&
                plast[i+j] == igla[j]; j++)
      ;
    // ako smo dosli do kraja reci igla, tada smo nasli njeno
    // pojavljivanje
    if (igla[j] == '\0')
      return i;
  }
  // nismo nasli rec igla i vracamo -1
  return -1;
}
```

Кнут-Морис-Пратов алгоритам

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>
using namespace std;

int kmpPretraga(const string& igla, const string& plast) {
  // kmp[i] je duzina najduzeg prefiksa reci str[0..i-1] koji je ujedno
  // sufiks te reci
  vector<int> kmp(igla.size() + 1);
```

```
  kmp[0] = -1;
  for (size_t i = 0; i < igla.size(); i++) {
    int k = i;
    while (k > 0 && igla[i] != igla[kmp[k]])
      k = kmp[k];
    kmp[i + 1] = kmp[k] + 1;
  }

  // na osnovu konstruisane tablice vrsimo pretragu
  size_t i = 0, j = 0;
  while (i < plast.size()) {
    if (plast[i] == igla[j]) {
      i++; j++;
      if (j == igla.size())
        return i - igla.size();
    } else if (j == 0)
      i++;
    else
      j = kmp[j];
  }

  return -1;
}

  int main() {
    // ucitavamo reci
    string plast, igla;
    cin >> plast >> igla;
    cout << kmpPretraga(igla, plast) << endl;
  }
```

Рабин-Карпов алгоритам

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>
using namespace std;

// Trazimo "iglu u plastu" tj. trazimo poziciju u reci plast na
// kojoj se nalazi rec igla. Ako takva pozicija ne postoji,
// funkcija vraca -1.
int RabinKarpPretraga(const string& igla, const string& plast) {
  // Rabin-Karpov algoritam (zasnovan na hesiranju)

  // osiguravamo da je igla kraca nego plast
  if (igla.size() > plast.size())
    return -1;
```

```
// velicina azbuke
const int b = 26;
// sto veci prost broj koji ne izaziva prekoracenje
const int p = 1000003;

// duzina podniske
int n = igla.size();

// racunamo b^(n-1) mod p - bice potreban za azuriranje hes vrednosti
int bn1 = 1;
for (int i = 0; i < n-1; i++)
  bn1 = (bn1 * b) % p;

// Hornerovom shemo racunamo hes vrednosti za podnisku i prvih n
// karaktera niske
int iglaH = 0, plastH = 0;
for (int i = 0; i < n; i++) {
  iglaH = (iglaH * b + (igla[i] - 'a')) % p;
  plastH = (plastH * b + (plast[i] - 'a')) % p;
}

// znamo hes-vrednosti niske na pozicijama [m-n, m)
size_t m = n;
while (true) {
  if (plastH == iglaH) {
    // ako su hes vrednosti jednake proveravamo da li su niske
    // zaista jednake
    bool jednaki = true;
    for (size_t i = m-n; i < m; i++) {
      if (plast[i] != igla[i-m+n]) {
        jednaki = false;
        break;
      }
    }
    if (jednaki)
      return m-n;
  }

  // obradili smo sve pozicije i nismo nasli podnisku
  if (m == plast.size())
    return -1;

  // azuriramo hes vrednost tako sto iz tekuceg dela niske uklanjamo
  // pocetni karakter (onaj sa pozicije m-n) i dodajemo novi krajnji
  // karakter (onaj koji je na poziciji m)
  plastH = ((plastH - bn1*(plast[m-n] - 'a'))*b + (plast[m] - 'a')) % p;
  if (plastH < 0)
```

```
      plastH += p;
    // azuriramo brojac obradjenih pozicija
    m++;
  }
}

int main() {
  // ucitavamo reci
  string plast, igla;
  cin >> plast >> igla;
  cout << RabinKarpPretraga(igla, plast) << endl;
}
```

z-алгоритам

Можемо искористити z-алгоритам где ћемо претрагу вршити у ниски $s1\#s$ при чему је ниска $s1$ ниска која се тражи, а ниска s ниска у којој се тражи. Када нађемо вредност у z-низу која је једнака дужини ниске $s1$ позиција где она почиње у оригиналној ниски се једноставно одређује.

```
// Trazimo "iglu u plastu" tj. trazimo poziciju u reci plast na kojoj
// se nalazi rec igla. Ako takva pozicija ne postoji, funkcija vraca
// -1.
int podniska(string igla, string plast) {
  // za svaku poziciju u reci plast takvu da do kraja ima bar onoliko
  // karaktera koliko ima u reci igla
  for (size_t i = 0; i + igla.size() <= plast.size(); i++) {
    // proveravamo da li se rec igla nalazi u reci plast pocevsi od
    // pozicije i
    if (equal(igla.begin(), igla.end(),
              next(plast.begin(), i)))
      return i;
  }
  // nismo nasli rec igla i vracamo -1
  return -1;
}
```

Задатак: Број појављивања подниске

Поставка: Напиши програм који одређује колико пута се дата ниска јавља као подниска друге дате ниске. Више појављивања подниске се могу преклапати.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе две ниске, свака у посебном реду. Прва ниска има највише 10 карактера, а друга највише 1000.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени број појављивања.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`aba`	`4`	`aa`	`3`
`abababcababac`		`aaaa`	

Решење:

Претрага од сваке позиције

Директан алгоритам да се овај задатак реши је да се покуша претрага подниске од сваке позиције кренувши од нулте, па до оне позиције на којој се десни крај ниске поклапа са десним крајем подниске. Обилазак позиција, дакле, тече све док је збир текуће позиције и дужине подниске мањи или једнак од дужине ниске. За сваку такву позицију проверавамо да ли на њој почиње подниска и ако почиње, увећавамо бројач иницијално постављен на нулу.

Проверу да ли се подниска налази у датој ниски кренувши од дате позиције можемо урадити на разне начине. Један начин је да издвојимо део ниске од дате позиције помоћу функције `substr` и да га упоредимо са датом подниском помоћу оператора `==`.

Овај приступ може бити неефикасан јер се непотребно сваки пут гради нова ниска пре него што се изврши поређење.

У језику `C++` можемо употребити функцију `equal` која проверава једнакост два опсега исте дужине (један опсег је одређена итераторима на почетак и непосредно иза краја, док је други одређен итератором на почетак).

Поређење ниски (тј. њихових подниски) можемо и сами испрограмирати функцију која коришћењем линеарне претраге (попут оне у задатку Погођена комбинација) проверава да ли постоји карактер у којима се две ниске разликују, при чему функција уз ниске `s` и `t` које се пореде, може добити и индексе позиција `ps` и `pt` од којих ће се поређење вршити и дужину `n` делова ниски који се пореде. У петљи чији бројач `i` креће од 0 и тече све док је мањи од `n` пореде се карактери на позицијама `s[ps + i]` и `t[pt + i]` и ако су различити функција враћа `false`. Ако се петље заврше без пронађене разлике делови су једнаки и функција враћа `true`.

Уместо засебне функције такву претрагу можемо реализовати и у главној функцији у телу петље која набраја потенцијалне позиције почетка, али нам је тада за имплементацију линеарне претраге потребна помоћна логичка променљива и неки начин да унутрашњу петљу прекинемо када се наиђе на први различити карактер.

```
string niska, podniska;
cin >> podniska >> niska;
int brojPojavljivanja = 0;
for (int p = 0; p + podniska.length() <= niska.length(); p++)
  if (equal(podniska.begin(), podniska.end(), next(niska.begin(), p)))
    brojPojavljivanja++;
cout << brojPojavljivanja << endl;
```

Библиотечка претрага подниске

Библиотечка функција за претрагу подниске обично има додатни параметар којим се контролише позиција од које претрага треба да крене. То важи за методу `find` у је-

зику C++, која враћа позицију првог пронађеног појављивања подниске (које није испред наведене позиције) или специјалну ознаку `string::npos` када нема појављивања подниске који нису испред наведене позиције. Сваки пут када се пронађе подниска, увећава се бројач, а нова претрага креће од позиције непосредно иза позиције где је подниска пронађена.

Рецимо да би се пажљивом анализом ниске која се тражи то могло оптимизовати. На пример, ако смо нашли ниску `abcacbabc` унутар шире ниске, ново појављивање те подниске не треба тражити од наредне позиције (позиције првог карактера `b`), већ од треће позиције на којој се појављује карактер `a` (то је најдужи суфикс који је уједно и префикс ниске која се тражи). Ово је основа алгоритма КМП о ком ће бити више речи у наредном тому ове збирке.

```
string niska, podniska;
cin >> podniska >> niska;
int brojPojavljivanja = 0;
int p = 0;
while ((p = niska.find(podniska, p)) != string::npos) {
  brojPojavljivanja++;
  p++;
}
cout << brojPojavljivanja << endl;
```

Кнут-Морис-Пратов алгоритам

Задатак веома ефикасно можемо решити и алгоритмом КМП.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <string>
using namespace std;

// izracunavamo koliko se puta niska igla javlja unutar niske plast
int brojPojavljivanjaKMP(const string& igla, const string& plast) {
  // primenjujemo Knut-Moris-Pratov algoritam

  // trazeni broj pojavljivanja
  int broj = 0;

  // kmp[i] je duzina najduzeg prefiksa reci str[0..i-1] koji je ujedno
  // sufiks te reci
  vector<int> kmp(igla.size() + 1);
  kmp[0] = -1;
  for (size_t i = 0; i < igla.size(); i++) {
    int k = i;
    while (k > 0 && igla[i] != igla[kmp[k]])
      k = kmp[k];
    kmp[i + 1] = kmp[k] + 1;
  }
```

```
  // na osnovu konstruisane tablice vrsimo pretragu
  size_t i = 0, j = 0;
  while (i < plast.size()) {
    if (plast[i] == igla[j]) {
      i++; j++;
      if (j == igla.size()) {
        // pronasli smo podnisku
        broj++;
        // nastavljamo pretragu
        j = kmp[j];
      }
    } else if (j == 0) {
      i++;
    } else {
      j = kmp[j];
    }
  }
  return broj;
}

int main() {
  string niska, podniska;
  cin >> podniska >> niska;
  cout << brojPojavljivanjaKMP(podniska, niska) << endl;
  return 0;
}
```

Рабин-Карпов алгоритам (хеширање)

Иако је Рабин-Карпов алгоритам веома ефикасан када се проверава да ли ниска садржи подниску, када је број појављивања подниске велики и када је потребно их све пронаћи, његова ефикасност рапидно опада. Наиме, пошто на основу једнаконсти хеш-вредности не можемо децидно тврдити да ће и одговарајуће ниске бити једнаке, потребно је за свако пронађено појављивање подниске потврдити експлицитном провером свих њених карактера.

```
#include <iostream>
#include <string>
using namespace std;

// izracunavamo koliko se puta niska igla javlja unutar niske plast
int brojPojavljivanjaRabinKarp(const string& igla, const string& plast) {
  // osiguravamo da je igla kraca nego plast
  if (igla.size() > plast.size())
    return 0;

  // Rabin-Karpov algoritam (zasnovan na hesiranju)

  // velicina azbuke
```

```
const int b = 257;
// sto veci prost broj koji ne izaziva prekoracenje
const int p = 30011;

// duzina podniske
int n = igla.size();

// racunamo b^(n-1) mod p - bice potreban za azuriranje hes vrednosti
int bn1 = 1;
for (int i = 0; i < n-1; i++)
  bn1 = (bn1 * b) % p;

// Hornerovom shemo racunamo hes vrednosti za podnisku i prvih n
// karaktera niske
int iglaH = 0, plastH = 0;
for (int i = 0; i < n; i++) {
  iglaH = (iglaH * b + igla[i]) % p;
  plastH = (plastH * b + plast[i]) % p;
}

// trazeni broj pojavljivanja
int broj = 0;

// znamo hes-vrednosti niske na pozicijama [m-n, m)
size_t m = n;
while (true) {
  if (plastH == iglaH) {
    // ako su hes vrednosti jednake proveravamo da li su niske
    // zaista jednake
    bool jednaki = true;
    for (size_t i = m-n; i < m; i++)
      if (plast[i] != igla[i-m+n]) {
        jednaki = false;
        break;
      }
    if (jednaki)
      broj++;
  }

  // obradili smo sve pozicije
  if (m == plast.size())
    break;

  // azuriramo hes vrednost tako sto iz tekuceg dela niske uklanjamo
  // pocetni karakter (onaj sa pozicije m-n) i dodajemo novi krajnji
  // karakter (onaj koji je na poziciji m)
  plastH = ((plastH - bn1*plast[m-n])*b + plast[m]) % p;
```

```
    if (plastH < 0)
      plastH += p;
    // azuriramo brojac obradjenih pozicija
    m++;
  }

  return broj;
}

int main() {
  // ucitavamo reci
  string plast, igla;
  cin >> igla >> plast;
  cout << brojPojavljivanjaRabinKarp(igla, plast) << endl;
  return 0;
}
```

За решавање овог проблема можемо користити и z-алгоритам. Прво израчунамо z-низ за ниску $s1\#s$ где је $s1$ ниска чија се појављивања траже, а ниска s ниска у којој тражимо појављивања. Проласком кроз z-низ само треба да пребројимо колико има елемената који су једнаки дужини ниске $s1$.

Задатак: Немењајуће ротације

Поставка: Ниска дужине n се циклично помера за једно место у лево тако што се њен почетни карактер са почетка пребаци на крај. Након n цикличних померања ниска се враћа у почетни положај. На пример, сва циклична померања ниске `abcabc` су `bcabca`, `cabcab`, `abcabc`, `bcabca`, `cabcab` и `abcabc`. Од њих су два циклична померања једнака полазној ниски.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава ниска састављена само од малих слова енглеске абецеде.

Излаз: На стандардни излаз исписати колико је њених цикличних померања једнако почетној ниски.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`algoritmi`	`0`	`dadadada`	`4`

Решење: Задатак можемо решити грубом силом, тако што у сваком кораку ниску ротирамо за једном место улево и проверавамо да ли је једнака полазној. Сложеност таквог решења је $O(n^2)$.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <algorithm>

using namespace std;
```

```
int main() {
  string s;
  cin >> s;
  int n = s.size();
  int broj = 0;
  string ss = s;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (ss == s)
      broj++;
    rotate(begin(ss), next(begin(ss)), end(ss));
  }
  cout << broj << endl;
  return 0;
}
```

Једно ефикасно решење се заснива на томе да ће се свако циклично померање ниске s појавити као подниска ниске ss (почетно померање ће се појавити два пута). Овим се проблем своди на пребројавање појављивања ниске s унутар ниске ss, што се ефикасно може урадити KMP алгоритмом.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
  string s;
  cin >> s;
  vector<int> kmp(s.size() + 1, 0);
  kmp[0] = -1;
  for (size_t i = 0; i < s.size(); i++) {
    int k = i;
    while (k > 0 && s[i] != s[kmp[k]])
      k = kmp[k];
    kmp[i + 1] = kmp[k] + 1;
  }

  int broj = 0;
  string ss = s + s;
  size_t i = 0, j = 0;
  while (i < ss.size()) {
    if (ss[i] == s[j]) {
      i++; j++;
      if (j == s.size()) {
        broj++;
        j = kmp[j];
      }
```

```
    } else if (j == 0)
      i++;
    else
      j = kmp[j];
  }

  cout << broj - 1 << endl;
  return 0;
}
```

Једно ефикасно решење се заснива на томе да ће се свако циклично померање ниске s појавити као подниска ниске ss (почетно померање ће се појавити два пута). Овим се проблем своди на пребројавање појављивања ниске s унутар ниске ss, што се ефикасно може урадити z-алгоритмом.

Задатак: Периодичност ниске

Поставка: Реч w је периодична ако постоји непразна реч $p = p_1p_2$ и природан број $n \geq 2$ тако да је $w = p^n p_1$. На пример, реч $abacabacabacab$ је периодична јер се понавља $abac$, при чему се последње понављање не завршава цело већ се зауставља са ab, тј. реч је $(abac)^3ab$. Напиши програм који проверава да ли је унета реч периодична.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи реч која се састоји само од малих слова енглеског алфабета – њих највише 50000.

Излаз: На стандардни излаз исписати реч `da` ако реч јесте периодична тј. `ne` ако није.

Пример

Улаз	*Излаз*
`abbaabbaabbaa`	`da`

Решење:

Решење грубом силом

Задатак можемо решити грубом силом, тако што ћемо за сваку вредност d такву да је $2d \leq |w|$ проверити да ли је реч периодична при чему је период префикс речи w дужине d. Једноставно се доказује да је реч периодична са периодом p чија је дужина d, ако и само ако за свако i за које је $0 \leq i$ и $i + d < |w|$ важи да је $w_i = w_{i+d}$. Задатак се онда решава са две угнежђене линеарне претраге – у спољној проверавамо све потенцијалне вредности дужине d, а у унутрашњој проверавамо да ли постоји вредност i таква да је $w_i \neq w_{i+d}$. Ако у унутрашњој петљи утврдимо да такво i не постоји, тада је ниска периодична. Ако пронађемо такво i, можемо прекинути унутрашњу петљу (реч није периодична са периодом дужине d) и прећи на следеће d (за један веће). Ако такво d не постоји, тада можемо констатовати да реч није периодична.

Сложеност најгорег случаја овог алгоритма је квадратна. Заиста, унутрашња линеарна претрага може у најгорем случају захтевати $O(|w|)$ итерација, и она се понавља $O(|w|)$ пута. Ипак, ако је ниска насумична, реално је очекивати да ће се за већину вредности d веома брзо установљавати да је $w_i \neq w_{i+d}$, па програм може радити доста брже од најгорег случаја.

```
#include <iostream>
#include <string>

using namespace std;

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  string str;
  cin >> str;

  bool periodicna = false;
  for (int p = 1; 2 * p <= str.size(); p++) {
    bool greska = false;
    for (int i = 0; i + p < str.size(); i++)
      if (str[i] != str[i + p]) {
    greska = true;
    break;
      }
    if (!greska) {
      periodicna = true;
      break;
    }
  }

  cout << (periodicna ? "da" : "ne") << endl;

  return 0;
}
```

Кнут-Морис-Пратов алгоритам

Ефикасно решење се заснива на теореми која каже да је ниска w периодична ако и само ако има прави префикс-суфикс чија је дужина најмање половина ниске, тј. ако постоје непразни x, s и t такви да је $xs = tx$ и $2 \cdot |x| \geq |w|$. На пример, ако је ниска `abacabacaba`, тада је тражени префикс-суфикс x једнак, `abacaba` остатак s једнак је `caba`, док је t једнак `abac`.

Докажимо претходну карактеризацију. Прво, претпоставимо да је ниска периодична. Тада постоји непразно $p = p_1p_2$ тако да је $x = p^np_1$, за неко $n \geq 2$. Тада је $t = p_1p_2 = p$, $x = p^{n-1}p_1$, док је $s = p_2p_1$. Важи да је $|x| = (n-1)|p| + |p_1|$, а пошто је $n \geq 2$, важи да је $(n-1) \cdot |p| \geq |p|$, па је $|x| \geq |t|$ и $2 \cdot |x| \geq |x| + |t| = |w|$.

Докажимо и супротан смер.

Докажимо прво индукцијом да ако важи да је $w = xs = tx$ за непразне t и s, тада постоје речи u и v тако да је $t = uv$, $s = vu$ и $w = (uv)^n$. Претпоставимо да тврђење важи за све речи дужине мање од k и претпоставимо да је реч w дужине k. Ако је $|x| < |t|$, тада постоји y тако да је $t = xy$, па на основу $xs = tx$ следи и да је $s = yx$. Тражене речи u и v су тада x и y. Ако је $|x| \geq |t|$ тада постоји y тако да је $x = ty$,

па на основу $xs = tx$ следи $ys = x$ тј. $ys = ty$. Пошто је s и t непразно важи да је $|ty| = |x| < |w|$, па на основу индуктивне хипотезе постоје u и v такви да је $t = uv$, $s = vu$ и n такво да је $y = (uv)^n u$. Тада је $x = ty = uv(uv)^n u = (uv)^{n+1}a$, па тврђење следи.

Докажимо и да је реч периодична. Нека су u, v и n такви да је $t = uv$, $s = vu$ и $w = (uv)^n u$ (они постоје на основу претходне дискусије). Прво, $n \geq 1$ (ако би важило $n = 0$, тада би важило да је $w = s = t = u$, а да је x празна реч, па одатле следи да је $|t| \geq 1 > |x| = 0$, што је контрадикција са претпоставком да је $|x| \geq |t|$). Ако би важило да је $n = 1$, тада би важило да је $w = uvu$, па из тј. $w = tx = xs$ мора да важи да је $x = u$, што са $|x| \geq |t|$ повлачи да је $t = s = x = u$. Тада је $p = p_2 = u$, док је p_1 празно, па је $w = u^2$ и периодична је. Преостаје још случај $n \geq 2$. Међутим, тада се може узети да је $p_1 = u$, $p_2 = v$, $p = uv$ и важи да је $w = p^n u$, при чему је $n \geq 2$, па је реч поново периодична.

Дакле, решење се заснива на томе да пронађемо дужину d најдужег правог суфикса речи w који је уједно њен префикс, и да се провери да ли важи да је $2d \geq |w|$. То можемо урадити помоћу Кнут-Морис-Пратовог алгоритма (исто као у задатку Префикс суфикс).

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <string>

using namespace std;

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false);

  string str;
  cin >> str;

  vector<int> kmp(str.size() + 1, 0);
  kmp[0] = -1;
  for (int i = 0; i < (int)str.size(); i++) {
    int k = i;
    while (k > 0 && str[i] != str[kmp[k]])
      k = kmp[k];
    kmp[i + 1] = kmp[k] + 1;
  }

  if (2 * kmp[str.size()] >= (int)str.size())
    cout << "da" << endl;
  else
    cout << "ne" << endl;

  return 0;
}
```

Још један ефикасан начин да се пронађе најдужи суфикс који је уједно и префикс (зашто је потребан најдужи суфикс који је уједно и префикс је објашњено у решењу помоћу КМП алгоритма) је помоћу z-алгоритма (исто као у задатку Префикс суфикс).

Најдужи палиндроми

Задатак: Најдужа палиндромска подниска

Поставка: Дат је стринг s који садржи само мала слова. Приказати најдужи сегмент стринга s (низ узастопних елемената стринга) који је палиндром у стрингу s. Ако има више најдужих сегмената приказати сегмент чији почетак има најмањи индекс.

Улаз: Прва и једина линија стандардног улаза садржи стринг састављен од малих слова.

Излаз: На стандардном излазу приказати први најдужи сегмент датог стринга који је палиндром.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`cabbadcmmc`	`abba`	`babcbabcbaccba`	`abcbabcba`

Решење:

Провера свих сегмената

Задатак је могуће решити анализом свих сегмената, провером да ли је текући сегмент палиндром и одређивањем најдужег пронађеног палиндрома.

Пошто је провера палиндрома сложености $O(n)$, а сегмената има $O(n^2)$, сложеност овог приступа је $O(n^3)$.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;

// provera da li je s[i, j] palindrom
bool palindrom(const string& s, int i, int j){
  while (i < j && s[i] == s[j]) {
    i++; j--;
  }
  return i >= j;
}

int main() {
  string s;
  cin >> s;
```

```
  int n = s.size();

  int maxDuzina = 0, maxPocetak = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++)
    for (int j = i; j < n; j++)
      if (palindrom(s, i, j)) {
    int duzina = j - i + 1;
    if (duzina > maxDuzina) {
      maxDuzina = duzina;
      maxPocetak = i;
    }
      }

  cout << s.substr(maxPocetak, maxDuzina) << endl;

  return 0;
}
```

Провера свих сегмената у редоследу опадајуће дужине

Имплементација се може мало поједноставити и дугачки палиндроми се могу пронаћи брже, ако се примети да сегменте можемо анализирати редом почев од најдужег сегмента па уназад до сегмента дужине 1 (слично као у задатку Све подречи по опадајућој дужини). Приметимо да ће са овим редоследом обиласка први сегмент који је палиндром управо бити најдужи палиндром који тражимо. Приметимо да излаз из угнежђених петљи није могуће остварити наредбом `break` (тиме би се изашло из унутрашње, али не и спољашње петље), већ излаз морамо реализовати помоћу помоћне логичке променљиве (слично као у случају алгоритама претраге, као, на пример, у задатку Негативан број) или наредбом `goto` (иако је потребно избегавати је, неки аутори сматрају да је прекид угнежђених петљи једина ситуација у којој је употреба `goto` оправдана). Сложеност најгорег случаја овог приступа је и даље $O(n^3)$.

```
#include <iostream>

using namespace std;

// provera da li je s[i, j] palindrom
bool palindrom(const string& s, int i, int j){
  while (i < j && s[i] == s[j]) {
    i++; j--;
  }
  return i >= j;
}

int main() {
  string s;
  cin >> s;
  // duzina niske s
  int n = s.size();
```

```
  // potrebno za prekid dvostruke petlje
  bool nasli = false;
  // proveravamo sve duzine redom
  for(int d = n; d >= 1 && !nasli; d--) {
    // proveravamo rec odredjenu indeksima [p, p + d - 1]
    for(int p = 0; p + d - 1 < n && !nasli; p++) {
      // ako smo naisli na palindrom
      if (palindrom(s, p, p + d - 1)) {
    // ispisujemo ga
    cout << s.substr(p, d) << endl;
    // prekidamo dvostruku petlju
    nasli = true;
      }
    }
  }

  return 0;
}
```

Провера центара

Палиндроми поседују одређено својство инкременталности које нам може помоћи да пронађемо ефикаснији алгоритам. Наиме, ако је познат центар палиндрома (то може бити било неко слово, било позиција тачно између два суседна слова) и ако знамо да се k слова око тог центра сликају као у огледалу (и тиме граде палиндром), онда за проверу да ли се $k+1$ слова око тог центра сликају као у огледалу не треба проверавати све из почетка, већ је довољно само проверити да ли су два слова на спољним позицијама ($k+1$. слово лево тј. десно од центра) једнака. Зато ефикасније решење добијамо ако за свако слово свако слово речи одредимо најдужи палиндром непарне дужине такав да му је изабрано слово центар и за сваку позицију између два слова одредимо најдужи полином парне дужине којима је та позиција центар.

Да бисмо одредили палиндром са центром у слову s_i, ширимо палиндром s_i у десно и у лево за k слова док се налазимо унутар речи ($i - k \geq 0, i + k < n$) и док су одговарајућа слова једнака ($s_{i-k} = s_{i+k}$). У тренутку када се то први пут наруши добијамо најдужи палиндром са центром у s_i (ако се изађе из речи даље проширивање није могуће, а ако се пронађе различит пар слова даља проширивања не могу више да дају палиндром). Одређивање најдужег палиндрома са центром између два слова вршимо на веома сличан начин.

За сваку позицију (а њих има $2n-1$ тј. $O(n)$) налазимо најдужи палиндром са центром на њој ширећи текући палиндром налево и надесно и глобално најдужи палиндром налазимо као најдужи од тих палиндрома.

Ширење се обавља једним проласком и захтева време $O(n)$ и укупна сложеност алгоритма је $O(n^2)$.

```
#include <iostream>
#include <string>
using namespace std;
```

```
int main() {
  string s;
  cin >> s;
  // duzina ucitane reci
  int n = s.size();

  // duzina i pocetak najduzeg palindroma
  int maxDuzina = 0, maxPocetak;

  // prolazimo kroz sva slova reci
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int duzina, pocetak;

    // nalazenje najduzeg palindroma neparne duzine ciji je centar
    // slovo s[i]
    int k = 1;
    while (i - k >= 0 && i + k < n && s[i - k] == s[i + k])
      k++;
    // duzina i pocetak maksimalnog palindroma
    duzina = 2 * k - 1;
    pocetak = i - k + 1;

    // azuriramo maksimum ako je to potrebno
    if (duzina > maxDuzina) {
      maxDuzina = duzina;
      maxPocetak = pocetak;
    }

    // nalazenje najduzeg palindroma parne duzine ciji je centar
    // izmedju slova s[i] i s[i+1]
    k = 0;
    while(i - k >= 0 && i + k + 1 < n && s[i - k] == s[i + k + 1])
      k++;
    // duzina i pocetak maksimalnog palindroma
    duzina = 2 * k;
    pocetak = i - k + 1;

    // azuriramo maksimum ako je to potrebno
    if (duzina > maxDuzina) {
      maxDuzina = duzina;
      maxPocetak = pocetak;
    }
  }

  // izdvajamo i ispisujemo odgovarajuci palindrom
  cout << s.substr(maxPocetak, maxDuzina) << endl;
```

```
  return 0;
}
```

Допуна речи и позиције

Постоји неколико техника које могу да мало скрате имплементацију претходног алгоритма, обједињавајући случајеве палиндрома парне и непарне дужине. Замислимо да се пре првог, након последњег и између свака два суседна слова речи постави специјални карактер `|`. На пример, реч `aabcbab` допуњавамо до речи `|a|a|b|c|b|a|b|`. На тај начин добијамо то да су сада сви центри палиндрома карактери овако допуњеног речи и довољно је анализирати само палиндроме непарне дужине у њему. Ово допуњавање је могуће реализовати и физички (у програму креирати допуњени стринг), што може мало да олакша имплементацију по цену мало споријег програма (додуше не асимптотски) и додатног заузећа меморије. Ипак наредно разматрање нам говори да ове помоћне карактере можемо само разматрати док разматрамо алгоритам, без експлицитног прављења допуњеног стринга у програму.

Да бисмо олакшали излагање индексе у допуњеној речи ћемо називати позиције, а у оригиналној речи само индекси. На пример,

```
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14   - pozicije
|  a  |  a  |  b  |  c  |  b  |  a  |  b  |
   0     1     2     3     4     5     6       - indeksi
```

Приметимо неколико чињеница. Ако је полазна реч дужине n, укупно имамо $N = 2n + 1$ позицију. Слова полазне речи се налазе на непарним позицијама, док се на парним позицијама налази специјални знак `|`. Слово са индексом k се налази на позицији $p = 2k + 1$, што значи да се на непарној позицији p налази слово оригиналне речи са индексом $k = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

За сваку позицију i ($0 \leq i < N$) дужину палиндрома са центром на тој позицији можемо одредити на исти начин, без обзира на то да ли је на тој позицији слово или специјални знак `|`. Рецимо да ћемо овде подразумевати дужину палиндрома у оригиналној речи (а не допуњеној) и она је једнака броју карактера са леве стране дате позиције у допуњеној речи који су једнаки одговарајућим карактерима са десне стране те позиције у допуњеној речи. На пример, у претходном примеру за позицију 7 то је 3, јер је палиндром `bcb` дужине 3, што одговара томе да три карактера `|b|` са леве стране карактера `c` у допуњеној речи одговарају карактерима `|b|` са десне стране карактера `c`.

На почетку, дужину палиндрома d постављамо на 1, ако је позиција непарна тј. 0 ако је парна. Заиста, ако је позиција непарна, на њој се налази слово које је само за себе палиндром дужине 1 (из другог угла гледано, лево и десно од ње се налазе `|`, па је бар један карактер једнак). Ако је позиција парна, око ње се налазе два слова (осим у случају крајњих позиција) и не знамо унапред да ли су она једнака, тако да дужину палиндрома иницијално постављамо на 0. Овим постижемо да су бројеви $i+d$ и $i-d$ парни, што значи да су $i-d-1$ и $i+d+1$ непарни и ако су у опсегу $[0, N)$, они указују на наредна два карактера чију једнакост треба проверити. Ако су карактери на одговарајућим индексима једнаки (то су индекси $\lfloor \frac{i-d-1}{2} \rfloor$ и $\lfloor \frac{i+d+1}{2} \rfloor$) онда се d увећава за 2 (из једног угла гледано, та два једнака карактера се додају текућем палиндрому

па му се дужина повећава за 2, а из другог угла гледано, испред првог и иза другог се налазе специјални знаци | који су сигурно једнаки и њихову једнакост није потребно експлицитно проверавати). Тиме се одржава и инваријанта да су бројеви $i + d$ и $i - d$ парни и петља се може наставити на исти начин све док се наиђе на два различита слова или се не изађе ван опсега допуњене речи.

Рецимо још и да се и провера припадности индекса тј. позиција опсегу речи може елиминисати ако се полазна реч прошири са додатним специјалним карактерима на почетку и на крају (они морају бити различити и обично се користе ^ и $, јер се ти карактери користе за означавање почетка и краја у регуларним изразима).

```
#include <iostream>
#include <string>

using namespace std;

string dopuni(const string& s) {
  string rez = "^";
  for (int i = 0; i < s.size(); i++)
    rez += "|" + s.substr(i, 1);
  rez += "|$";
  return rez;
}

int main() {
  string s;
  cin >> s;
  string t = dopuni(s);

  // dovoljno je pronaci najveci palindrom neparne duzine u prosirenoj reci

  int maxDuzina = 0, maxCentar;
  // proveravamo sve pozicije u dopunjenoj reci
  for (int i = 1; i < t.size() - 1; i++) {
    // prosirujemo palindrom sa centrom na poziciji i dokle god je to
    // moguce
    int d = 0;
    while (t[i - d - 1] == t[i + d + 1])
      d++;

    // azuriramo maksimum ako je potrebno
    if (d > maxDuzina) {
      maxDuzina = d;
      maxCentar = i;
    }
  }

  // ispisujemo konacan rezultat, odredjujuci pocetak najduzeg palindroma
```

```
  int maxPocetak = (maxCentar - maxDuzina) / 2;
  cout << s.substr(maxPocetak, maxDuzina) << endl;
}
```

Маначеров алгоритам

Посматрајмо сада како изгледа дужина најдужег палиндрома за сваку од позиција у речи babcbabcbaccba. Обележимо ову дужину са d_p. Обележимо допуњену реч са t.

```
  0   1   2   3   4   5   6   7   8   9   10  11  12  13  14
| b | a | b | c | b | a | b | c | b | a | c | c | b | a |
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
0 1 0 3 0 1 0 7 0 1 0 9 0 1 0 5 0 1 0 1 0 1 2 1 0 1 0 1 0
```

Посматрајмо палиндром са центром на позицији 11 - његова дужина је $d_{11} = 9$ и простире се од позиције 2 до позиције 20.

Посматрајмо сада дужину најдужег палиндрома са центром на позицији 12. Пошто је наш палиндром симетричан око позиције 11, позицији 12, одговара позиција 10. Знамо да је $d_{10} = 0$. То је зато што је $t_9 \neq t_{11}$. Међутим, ми знамо да је $t_9 = t_{13}$ (пошто су обе унутар нашег палиндрома), па је зато $t_{11} \neq t_{13}$ и важи да је $d_{12} = d_{10} = 0$. Приметимо да ово можемо констатовати без икакве потребе за упоређивањем карактера.

Посматрајмо сада дужину најдужег палиндрома са центром на позицији 13. Њему одговара палиндром са центром на позицији 9. Важи да је $d_9 = 1$, јер је $t_8 = t_{10}$ и $t_7 \neq t_{11}$. На основу симетрије палиндрома са центром у 11, важи да је $t_8 = t_{14}$, да је $t_{10} = t_{12}$, $t_7 = t_{15}$ и да је $t_{11} = t_{11}$. Зато је $t_{14} = t_{12}$ и $t_{15} \neq t_{11}$, па је $d_{13} = d_9 = 1$.

Наизглед, важи да је за свако i унутар ширег палиндрома са центром у некој позицији C број d_i једнак броју d'_i, где се i' одређује као симетрична позиција позицији i у односу на C (важи да је растојање од C до i и i' једнако, па је тј $C - i' = i - C$, тј. $i' = C - (i - C)$). Но, то није увек тачно.

Посматрајмо d_{15} и њему одговарајућу вредност d_7. Оне нису једнаке. Зашто? Посматрајмо шта је оно то можемо закључити из симетрије палиндрома са центром на позицији 11. Важи да је t_2 до t_{12} једнако одговарајућим карактерима t_{20} до t_{10} - то је гарантовано симетријом и није потребно проверавати. Међутим, важи да је $d_7 = 7$. Знамо зато и да је $t_1 = t_{13}$, међутим, не можемо да тврдимо да је $t_{21} = t_9$, зато то t_{21} није више део палиндрома са центром на позицији C - проверу да ли је $t_{21} = t_9$ је потребно посебно извршити.

Дакле, важи следеће. Претпоставимо да је $[L, R]$ палиндром са центром на позицији C (тада је $C-L = R-C$), да је i неки индекс унутар тог палиндрома (нека је $C < i < R$) и да је $i' = C - (i - C)$ њему симетричан индекс. Ако је палиндром са центром у i' садржан у палиндрому (L, R) (без урачунатих крајева) тј. ако је $L < i' - d_{i'}$, тј. $d_{i'} < i' - L = (C - (i - C)) - (C - (R - C)) = R - i$ тј. $d_{i'} < R - i$, тада је $d_i = d_{i'}$. Докажимо ово. За сваку вредност $0 \leq j \leq d_{i'}$ треба доказати да је $t_{i-j} = t_{i+j}$. Заиста, пошто важи да је $L < i' - j$ и да је $i + j < R$, важи да је $t_{i-j} = t_{i'+j}$ и да је $t_{i+j} = t_{i'-j}$. Међутим, пошто је i' центар палиндрома дужине $d_{i'}$, важи да је $t_{i'-j} = t_{i'+j}$. Зато је на позицији i центар палиндрома дужине бар $d_{i'}$. Докажимо да је ово и горње ограничење, тј. докажимо да је $t_{i-d_{i'}-1} \neq t_{i+d_{i'}+1}$. Пошто је $i + d_{i'} < R$,

важи да је $i + d_{i'} + 1 \leq R$, па је $t_{i-d_{i'}-1} = t_{i'+d_{i'}+1}$ и $t_{i+d_{i'}+1} = t_{i'-d_{i'}-1}$. Међутим, пошто је палиндром са центром у i' дужине $d_{i'}$ важи да је $t_{i'-d_{i'}-1} \neq t_{i'+d_{i'}+1}$.

Ако је $[L, R]$ палиндром са центром на позицији C и ако је i неки индекс унутар тог палиндрома ($C < i < R$), али такав да је $d_{i'} \geq R - i$, онда можемо само да закључимо да је $d_i \geq R - i$.

Ово инспирише наредни алгоритам, познат под именом Маначеров алгоритам. Слично као у претходној верзији обрађујемо све позиције i од 0 до $N - 1$. При том одржавамо индексе C и R такве да је $[C - (R - C), R]$ палиндром. Ако је $i \geq R$, тада палиндром са центром у i одређујемо из почетка, повећавајући за два дужину палиндрома d_i која креће од 0 или 1 (у зависности од парности позиције i), све док је то могуће, исто као у претходно описаном алгоритму. Међутим, ако је $i < R$, тада одређујемо $i' = C - (i - C)$ и ако важи да је $d_{i'} < R - i$, постављамо одмах $d_i = d_{i'}$. Ако је $d_{i'} \geq R - i$, тада дужину d_i постављамо на почетну вредност $R - i$ тј. на $R - i + 1$ тако да су $i - d_i$ и $i + d_i$ парни бројеви, и онда је постепено повећавамо за 2, све док је то могуће (опет, веома слично као у претходно описаном алгоритму). Ако је пронађени палиндром са центром у i такав да му десни крај превазиђе позицију R, онда њега проглашавамо за нови палиндром $[L, R]$, постављајући му центар $C = i$ и десни крај $R = i + d_i$. На почетку можемо иницијализовати $R = C = 0$ (тиме обезбеђујемо да не може да важи да је $i < R$ и да се на почетку неће користити симетричност окружујућег полинома).

Могуће је доказати да је сложеност овог алгоритма $O(n)$ (интуитивно, проналажење кратких палиндрома захтева мали број извршавања унутрашње петље, док је проналажење једног дугачког палиндрома захтева дуже извршавање унутрашње петље, али доводи до тога да ће се у наредним корацима у великом броју случајева у потпуности избегава њено извршавање).

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;

// da bismo uniformno posmatrali palindrome i parne i neparne duzine,
// prosirujemo string dodajuci ^ i $ oko njega i umecuci | izmedju
// svih slova npr. abc -> ^|a|b|c$
string dopuni(const string& s) {
  string rez = "^";
  for (int i = 0; i < s.size(); i++)
    rez += "|" + s.substr(i, 1);
  rez += "|$";
  return rez;
}

int main() {
  string s;
  cin >> s;
```

```
// jednostavnosti radi dopunjavamo rec s
string t = dopuni(s);
// d[i] je najveci broj takav da je [i - d[i], i + d[i]] palindrom
// to je ujedno i duzina najduzeg palindroma ciji je centar na
// poziciji i (pozicije su ili slova originalnih reci, ili su
// izmedju njih)
vector<int> d(t.size());
// znamo da je [L, R] palindrom sa centrom na poziciji C
int C = 0, R = 0; // L = C - (R - C)
for (int i = 1; i < t.size() - 1; i++) {
  // karakter simetrican karakteru i u odnosu na centar C
  int i_sim = C - (i - C);
  if (i < R && i + d[i_sim] < R)
    // nalazimo se unutar palindroma [L, R], ciji je centar C
    // palindrom sa centrom u i_sim i palindrom sa centrom u i su
    // celokupno smesteni u palindrom (L, R)
    d[i] = d[i_sim];
  else {
    // ili se ne nalazimo u okviru nekog prethodnog palindroma ili
    // se nalazimo unutar palindroma [L, R], ali je palindrom sa
    // centrom u i_sim takav da nije celokupno smesten u (L, R) - u
    // tom slucajmo znamo da je duzina palindroma sa centrom u i bar
    // R-i, a da li je vise od toga, treba proveriti
    d[i] = i <= R ? R-i : 0;
    // prosirujemo palindrom dok god je to moguce krajnji karakteri
    // ^$ obezbedjuju da nije potrebno proveravati granice
    while (t[i - d[i] - 1] == t[i + d[i] + 1])
  d[i]++;
  }

  // ako palindrom sa centrom u i prosiruje desnu granicu onda njega
  // uzimamo za palindrom [L, R] sa centrom u C
  if (i + d[i] > R) {
    C = i;
    R = i + d[i];
  }
}

// pronalazimo najvecu duzinu palindroma i pamtimo njegov centar
int maxDuzina = 0, maxCentar;
for (int i = 1; i < t.size() - 1; i++)
  if (d[i] > maxDuzina) {
    maxDuzina = d[i];
    maxCentar = i;
  }
```

```
  // ispisujemo konacan rezultat, odredjujuci pocetak najduzeg palindroma
  cout << s.substr((maxCentar - maxDuzina) / 2, maxDuzina) << endl;

  return 0;
}
```

Проширивање ниске није неопходно вршити експлицитно.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
  string s;
  cin >> s;

  // broj pozicija u reci s (pozicije su ili slova originalnih reci,
  // ili su izmedju njih). Npr. niska abc ima 7 pozicija i to |a|b|c|
  int N = 2 * s.size() + 1;

  // d[i] je duzina najduzeg palindroma ciji je centar na poziciji i
  // to je ujedno i broj pozicija levo i desno od i na kojima se
  // podaci poklapaju - ili su obe pozicije izmedju slova ili su na
  // njima jednaka slova
  vector<int> d(N);


  // Niz d[i] visoko simetrican i da se mnoge njegove vrednosti mogu
  // odrediti na osnovu prethodnih, bez potrebe za ponovnim
  // izracunavanjem.

  // znamo da je [L, R] palindrom sa centrom u C
  int C = 0, R = 0; // L = C - (R - C)
  for (int i = 0; i < N; i++) {
    // karakter simetrican karakteru i u odnosu na centar C
    int i_sim = C - (i - C);
    if (i < R && i + d[i_sim] < R)
      // nalazimo se unutar palindroma [L, R], ciji je centar C
      // palindrom sa centrom u i_sim i palindrom sa centrom u i su
      // celokupno smesteni u palindrom (L, R)
      d[i] = d[i_sim];
    else {
      // ili se ne nalazimo u okviru nekog prethodnog palindroma ili
      // se nalazimo unutar palindroma [L, R], ali je palindrom sa
      // centrom u i_sim takav da nije celokupno smesten u (L, R) - u
      // tom slucajmo znamo da je duzina palindroma sa centrom u i bar
```

```
      // R-i, a da li je vise od toga, treba proveriti
      d[i] = i <= R ? R - i : 0;

      // prosirujemo palindrom dok god je to moguce

      // osiguravamo da je i + d[i] stalno paran broj
      if ((i + d[i]) % 2 == 1)
    d[i]++;

      // dok god su pozicije u opsegu i slova na odgovarajucim
      // indeksima jednaka uvecavamo d[i] za 2 (jedno slovo s leva i
      // jedno slovo zdesna)
      while (i - d[i] - 1 >= 0 && i + d[i] + 1 < N &&
         s[(i - d[i] - 1) / 2] == s[(i + d[i] + 1) / 2])
    d[i] += 2; // ukljucujemo dva slova u palindrom
    }

    // ako palindrom sa centrom u i prosiruje desnu granicu onda njega
    // uzimamo za palindrom [L, R] sa centrom u C
    if (i + d[i] > R) {
      C = i;
      R = i + d[i];
    }
  }

  // pronalazimo najvecu duzinu palindroma i pamtimo njegov centar
  int maxDuzina = 0, maxCentar;
  for (int i = 0; i < N; i++) {
    if (d[i] > maxDuzina) {
      maxDuzina = d[i];
      maxCentar = i;
    }
  }

  // ispisujemo konacan rezultat, odredjujuci pocetak najduzeg palindroma
  int maxPocetak = (maxCentar - maxDuzina) / 2;
  cout << s.substr(maxPocetak, maxDuzina) << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Најкраћа допуна до палинрома

Поставка: Ниска $abaca$ није палиндром (не чита се исто слева и сдесна), али ако јој на почетак допишемо карактере ac, добијамо ниску $acabaca$ која јесте палиндром (чита се исто и слева и сдесна). Напиши програм који за дату ниску одређује дужину

најкраћег палиндрома који се може добити дописивањем карактера с леве стране дате ниске.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси ниска састављена од N ($1 \leq N \leq 50000$) малих слова енглеске абецеде.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражену дужину најкраће проширене ниске која је палиндром.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`abaca`	`7`	`anavolimilovana`	`15`	`anavolimilovanakapak`	`25`

Решење: Претпоставимо да се најкраћи могући палиндром може добити дописивањем ниске p на ниску s тј. да је ps најкраћи палиндром коме је s суфикс. Тада је $ps = s'p'$, где је s' ниска која се добија обртањем карактера ниске s, док је p' ниска која се добија обртањем карактера ниске p. Дакле, s се завршава са p' и постоји неки њен префикс t такав да је $s = tp'$. Зато је $ptp' = pt'p'$, па је $t = t'$ тј. t мора бити палиндром. Да би дужина префикса p била што мања, дужина палиндрома t мора бити што већа, па је t најдужи могући палиндром којим почиње ниска s.

На пример, да бисмо одредили најдужи палиндром којим се допуњује ниска $s = abacba$, примећујемо да је њен најдужи палиндромски префикс ниска $t = aba$, да је $p' = cba$, па је $p = abc$ и резултујући палиндром је $ps = abcabacba$.

Ако је n_t дужина палиндрома t, а n дужина ниске s, дужина дела p једнака је $n - n_t$, па је укупна дужина траженог палиндрома једнака $(n - n_t) + n = 2n - n_t$.

Палиндром t можемо одредити грубом силом, тако што редом проверавамо све префиксе ниске s и тражимо најдужи палиндром међу њима.

```
#include <iostream>
#include <string>

using namespace std;

bool jePalindrom(const string& s, int n) {
  for (int i = 0, j = n - 1; i < j; i++, j--)
    if (s[i] != s[j])
      return false;
  return true;
}

int duzinaNajduzegPalindromskogPrefiksa(const string& s) {
  for (int n = s.size() - 1; n >= 1; n--)
    if (jePalindrom(s, n))
      return n;
  return 1;
}

int main() {
```

```
  string s;
  cin >> s;
  // s razlazemo na prefiks + sufiks tako da je prefiks sto duzi
  // palindrom. Tada je trazeni palindrom (palindrom koji se dobija sa
  // sto manje dopisivanja slova na pocetak niske s) jednak:
  // obrnut_sufiks + prefiks + sufiks
  int duzinaPrefiksa = duzinaNajduzegPalindromskogPrefiksa(s);
  int duzinaSufiksa = s.size() - duzinaPrefiksa;
  int duzinaNajkracegPalindroma = duzinaSufiksa + duzinaPrefiksa + duzinaSufiksa;
  cout << duzinaNajkracegPalindroma << endl;
  return 0;
}
```

Задатак ефикасније можемо решити алгоритмом KMP. Ако уместо ниске s посматрамо ниску ss' добијену надовезивањем ниске добијене обртањем редоследа карактера ниске s најдужи палиндромски префикс ниске s је најдужи префикс ниске ss' који је уједно њен суфикс и који има највише n карактера, где је n дужина ниске s. Да би се спречило да се приликом попуњавања KMP низа урачунају и они суфикси и префикси који садрже целу полазну ниску, довољно је да се између s и s' постави било који карактер који они не садрже (пошто се ниске састоје само од малих слова енглеске абецеде, можемо, на пример, употребити карактер `.`). Када изградимо ниску $s.s'$, тада на исти начин као у задатку Префикс суфикс попуњавамо KMP низ и њен последњи елемент представља дужину најдужег палиндромског префикса.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <string>
#include <algorithm>

using namespace std;

int duzinaNajduzegPalindromskogPrefiksa(const string& s) {
  string sObratno(s.rbegin(), s.rend());
  string str = s + "." + sObratno;
  vector<int> kmp(str.size() + 1, 0);
  kmp[0] = -1;
  for (int i = 0; i < str.size(); i++) {
    int k = i;
    while (k > 0 && str[i] != str[kmp[k]])
      k = kmp[k];
    kmp[i + 1] = kmp[k] + 1;
  }
  return kmp[kmp.size() - 1];
}

int main() {
  string s;
  cin >> s;
```

```
  // s razlazemo na prefiks + sufiks tako da je prefiks sto duzi
  // palindrom. Tada je trazeni palindrom dobijen sa sto manje
  // dopisivanja slova na pocetak jednak:
  //    obrni(sufiks) + prefiks + sufiks
  int duzinaPrefiksa = duzinaNajduzegPalindromskogPrefiksa(s);
  int duzinaSufiksa = s.size() - duzinaPrefiksa;
  int duzinaNajkracegPalindroma = duzinaSufiksa + duzinaPrefiksa + duzinaSufiksa;
  cout << duzinaNajkracegPalindroma << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Најдужи подниз палиндром

Поставка: Написати програм којим се за дати стрингу s одређује дужину најдужег подниза ниске s који је палиндром. Подниз не мора да садржи узастопне карактере ниске, али они морају да се јављају у истом редоследу (подниз се добија брисањем произвољног броја карактера).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава ниска s састављена само од малих слова енглеске абецеде, чија је дужина највише 5000 карактера.

Излаз: На стандардни излаз исписати само тражену дужину најдужег палиндромског подниза.

Пример

Улаз	*Излаз*
`najduzipalindrom`	`5`

Решење: Кренимо од рекурзивног решења.

- Празна ниска има само празан подниз, па је дужина најдужег палиндромског подниза једнака нули. Ниска дужине 1 је сама свој палиндромски подниз, па је дужина њеног најдужег палиндромског подниза једнака 1.
- Ако ниска има бар два карактера, онда рамзатрамо да ли су њен први и последњи карактер једнаки. Ако јесу, онда они могу бити део најдужег палиндромског подниза и проблем се своди на проналажење најдужег палиндромског подниза дела ниске без првог и последњег карактера. У супротном они не могу истовремено бити део најдужег палиндромског подниза и потребно је елиминисати бар један од њих. Проблем, дакле, сводимо на проналажење најдужег палиндромског подниза суфикса ниске без првог карактера и на проналажење најдужег палиндромског подниза префикса ниске без последњег карактера. Дужи од та два палиндромска подниза је тражени палиндромски подниз целе ниске.

Овим је практично дефинисана рекурзивна процедура којом се решава проблем. У сваком рекурзивном позиву врши се анализа неког сегмента (низа узастопних карактера полазне ниске), па је сваки рекурзивни позив одређен са два броја који представљају границе тог сегмента. Ако са $f(l, d)$ означимо дужину најдужег палиндромског подниза дела ниске $s[l, d]$, тада важе следеће рекурентне везе.

$$
\begin{aligned}
f(l,d) &= 0, \quad \text{za } l > d \\
f(l,d) &= 1, \quad \text{za } l = d \\
f(l,d) &= 2 + f(l+1, d-1), \quad \text{za } l < d \text{ i } s_l = s_d \\
f(l,d) &= \max\left(f(l+1,d), f(l,d-1)\right), \quad \text{za } l < d \text{ i } s_l \neq s_d
\end{aligned}
$$

На основу овога, функцију је веома једноставно имплементирати.

```
#include <iostream>
#include <string>

using namespace std;

int najduziPalindrom(const string& s, int l, int d) {
  if (l > d)
    return 0;
  if (l == d)
    return 1;
  if (s[l] == s[d])
    return 2 + najduziPalindrom(s, l+1, d-1);
  return max(najduziPalindrom(s, l, d-1),
             najduziPalindrom(s, l+1, d));
}

int najduziPalindrom(const string& s) {
  return najduziPalindrom(s, 0, s.length() - 1);
}

int main() {
   string s;
   cin >> s;
   cout << najduziPalindrom(s) << endl;
   return 0;
}
```

У претходној функцији долази до преклапања рекурзивних позива, па је пожељно употребити мемоизацију. За мемоизацију користимо матрицу (практично, њен горњи троугао у којем је $l < d$).

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

int najduziPalindrom(const string& s, int l, int d,
```

```
                    vector<vector<int>>& memo) {
  if (memo[l][d] != -1)
    return memo[l][d];
  if (l > d)
    return memo[l][d] = 0;
  if (l == d)
    return memo[l][d] = 1;
  if (s[l] == s[d])
    return memo[l][d] = 2 + najduziPalindrom(s, l+1, d-1, memo);
  return memo[l][d] = max(najduziPalindrom(s, l, d-1, memo),
                          najduziPalindrom(s, l+1, d, memo));
}

int najduziPalindrom(const string& s) {
  vector<vector<int>> memo(s.length(), vector<int>(s.length(), -1));
  return najduziPalindrom(s, 0, s.length() - 1, memo);
}

int main() {
   string s;
   cin >> s;
   cout << najduziPalindrom(s) << endl;
   return 0;
}
```

До ефикасног решења можемо доћи и динамичким програмирањем одоздо навише. Елемент на позицији (l, d) матрице зависи од елемената на позицијама $(l+1, d)$, $(l, d-1)$ и $(l+1, d-1)$, док се коначно решење налази у горњем левом углу матрице, тј. на пољу $(0, n-1)$. Због оваквих зависности матрицу не можемо попуњавати ни врсту по врсту, ни колону по колону, већ дијагоналу по дијагоналу. На дијагоналу испод главне уписујемо све нуле, на главну дијагоналу све јединице, а затим попуњавамо једну по једну дијагоналу изнад главне, све док не дођемо до елемента у горњем левом углу.

Прикажимо како изгледа попуњена матрица на примеру ниске `abaccba`.

```
    abaccba
    0123456
    -------
a 0|1133346
b 1|0111244
a 2| 011224
c 3|  01222
c 4|   0111
b 5|    011
a 6|     01
```

Коначно решење 6 одговара поднизу `abccba`.

Ово решење има и меморијску и временску сложеност $O(n^2)$.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;

int najduziPalindrom(const string& s) {
  int n = s.length();
  vector<vector<int>> dp(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    dp[i].resize(n, 0);
    dp[i][i] = 1;
  }
  for (int k = 1; k < n; k++)
    for (int l = 0; l + k < n; l++) {
      int d = l + k;
      if (s[l] == s[d])
        dp[l][d] = dp[l+1][d-1] + 2;
      else
        dp[l][d] = max(dp[l+1][d], dp[l][d-1]);
    }

  return dp[0][n - 1];
}

int main() {
   string s;
   cin >> s;
   cout << najduziPalindrom(s) << endl;
   return 0;
}
```

Меморијску сложеност је могуће редуковати. Примећујемо да елементи сваке дијагонале зависе само од елемената претходне две дијагонале. Могуће је да чувамо само две дијагонале - текућу и претходну. Током ажурирања текуће дијагонале њене постојеће елементе истовремено преписујемо у претходну. Када су карактери једнаки, тада у привремену промењиву бележимо одговарајући елемент претходне дијагонале, на његово место уписујемо одговарајући елемент текуће дијагонале, а онда на место тог елемента уписујемо вредност привремене промењиве увећану за два. Када су карактери различити одговарајући елемент текуће дијагонале уписујемо на одговарајуће место у претходној дијагонали, а на његово место уписујемо максимум те и наредне вредности текуће дијагонале.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;
```

```
int najduziPalindrom(const string& s) {
  int n = s.length();
  // elementi dve prethodne dijagonale
  vector<int> dpp(n, 0);
  vector<int> dp(n, 1);
  for (int k = 1; k < n; k++) {
    for (int l = 0; l + k < n; l++) {
      int d = l + k;
      if (s[l] == s[d]) {
        int tmp = dp[l];
        dp[l] = dpp[l+1] + 2;
        dpp[l] = tmp;
      }
      else {
        dpp[l] = dp[l];
        dp[l] = max(dp[l], dp[l+1]);
      }
    }
    dpp[n-k] = dp[n-k];
  }

  return dp[0];
}

int main() {
   string s;
   cin >> s;
   cout << najduziPalindrom(s) << endl;
   return 0;
}
```

Рецимо још и да је решење овог задатка могуће добити и свођењем на проблем одређивања најдужег заједничког подниза две ниске који је описан у задатку Најдужи заједнички подниз две ниске. Наиме, најдужи палиндромски подниз једнак је најдужем заједничком поднизу оригиналне ниске и ниске која се добија њеним обртањем. Сложеност ове редукције је иста као и сложеност директног решења (временски $O(n^2)$, а просторно $O(n)$).

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

int najduziZajednickiPodniz(const string& s1, const string& s2) {
  int n1 = s1.size(), n2 = s2.size();
```

```
  vector<int> dp(n2 + 1, 0);
  for (int i = 1; i <= n1; i++) {
    int prethodni = dp[0];
    for (int j = 1; j <= n2; j++) {
      int tekuci = dp[j];
      if (s1[i-1] == s2[j-1]) {
        dp[j] = prethodni + 1;
      } else {
        dp[j] = max(dp[j-1], dp[j]);
      }
      prethodni = tekuci;
    }
  }
  return dp[n2];
}

int najduziPalindrom(const string& s) {
  string sObratno = s;
  reverse(begin(sObratno), end(sObratno));
  return najduziZajednickiPodniz(s, sObratno);
}

int main() {
   string s;
   cin >> s;
   cout << najduziPalindrom(s) << endl;
   return 0;
}
```

Регуларни изрази

Задатак: Датуми

Поставка: У тексту се налази одређен број датума, али су записани у два различита формата. Неки су записани у облику `dd.mm.gggg.` (при чему дан и месец могу бити и једноцифрени), а неки у облику `mm/dd/gggg` (ту су дан и месец увек двоцифрени). Напиши програм који издваја све те датуме и све их исписује у првом формату, са двоцифреним даном и месецом. Претпоставити да су сви датуми у документу исправно записани.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси линија по линија текста, све до краја улаза. Претпоставити да се у свакој линији налази највише један датум.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражене датуме, један испод другог.

Пример

Улаз	*Излаз*
`Nikola Tesla se rodio 10.7.1856.`	`10.07.1856.`
`Nikola Tesla was born on 07/10/1856.`	`10.07.1856.`

Решење: Најједноставнији начин да се задатак реши је да се употребе регуларни изрази. Регуларним изразима се описују шаблони текста на основу којих можемо вршити претрагу и замену. Основна врста регуларног израза је ниска. На пример, регуларни израз је `abc` и једина ниска која је тим изразом покривена је управо `abc`. Регуларни изрази се комбинују следећим операторима.

- `|` - овај оператор се чита "или". На пример, регуларни израз `abc|def` је шаблон у који се уклапају две могуће ниске: прва је `abc`, а друга `def`.
- `*` - овај оператор се чита "нула или више пута". На пример, регуларни израз `a*` означава да се `a` јавља нула или више пута и обухвата празну ниску, затим `a`, `aa`, `aaa` и тако даље.
- `+` - овај оператор се чита "један или више пута". На пример, регуларни израз `a+` означава да се `a` јавља један или више пута и обухвата ниске `a`, `aa`, `aaa` и тако даље.
- `?` - овај оператор се чита "нула или један пут". На пример, регуларни израз `a?` описује или празну ниску или ниску `a`.
- Када се на израз допише `{n}` то означава да се ниска описана изразом понавља тачно `n` пута. На пример, `a{5}` означава ниску `aaaaa`.
- регуларни изрази постављени један поред другог представљају дописивање ниски. На пример, `(ab)+(cd)?` означава да се `ab` јавља један или више пута, за чим може, а не мора да следи `cd`. Неке ниске које су описане овим изразом су `ab`, `abcd`, `abab`, `ababcd` итд.
- Изрази облика `[a-z]` су такозване карактерске класе и представљају један карактер из датог распона. Израз `[a-z]` описује ниске `a`, `b`, `c` итд., док израз `[0-9]` описује једну цифру.
- Израз `.` описује било који карактер, осим преласка у нови ред.

Постоји још велики број регуларних операција и начина да се регуларни изрази компактније запишу, али их нећемо помињати.

Датуми првог облика се могу описати регуларним изразом `[0-9][0-9]?[.][0-9][0-9]?[.][0-9]{5}`, а другог облика изразом `[0-9]{2}/[0-9]{2}/[0-9]{4}`.

```
#include <iostream>
#include <regex>

using namespace std;

string pad(string s) {
  return s.size() == 1 ? ("0" + s) : s;
}

int main() {
  string format1 = "([0-9][0-9]?)[.]([0-9][0-9]?)[.]([0-9][0-9][0-9][0-9])[.]";
  string format2 = "([0-9]{2})/([0-9]{2})/([0-9]{4})";
```

```
  regex datum("(" + format1 + "|" + format2 + ")");
  smatch sm;
  string linija;
  while (getline(cin, linija))
    if (regex_search(linija, sm, datum)) {
      string prepoznat_datum = sm[0];
      if (regex_match(prepoznat_datum, sm, regex(format1)))
        cout << pad(sm[1]) << "." << pad(sm[2]) << "." << sm[3] << "." << endl;
      else if (regex_match(prepoznat_datum, sm, regex(format2)))
        cout << sm[2] << "." << sm[1] << "." << sm[3] << "." << endl;
    }
  return 0;
}
```

Формалне граматике

Задатак: Потпуно заграђен израз

Поставка: Написати програм који исправан инфиксни аритметички израз који има заграде око сваке примене бинарног оператора преводи у постфиксни облик. Једноставности ради претпоставити да су сви операнди једноцифрени бројеви и да се јављају само операције сабирања и множења.

Улаз: Једина линија стандардног улаза садржи исправан, потпуно заграђен израз.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени постфиксни облик.

Пример

Улаз	*Излаз*
`(((3*5)+(7+(2*1)))*4)`	`35*721*++4*`

Решење: Чињеница да је израз потпуно заграђен олакшава израчунавање, јер нема потребе да водимо рачуна о приоритету и асоцијативности оператора. Такви изрази се описују наредном, веома једноставном граматиком.

```
<izraz> :: <cifra>
<izraz> :: '(' <izraz> '+' <izraz> ')'
<izraz> :: '(' <izraz> '*' <izraz> ')'
```

Један начин да се приступи решавању проблема је да се примени индуктивно-рекурзивни приступ. Обрада структурираног улаза рекурзивним функцијама се назива *рекурзивни спуст* и детаљно се изучава у курсевима превођења програмских језика. Дефинишемо рекурзивну функцију чији је задатак да преведе део ниске који представља исправан инфиксни израз. Он може бити или број, када је превођење тривијално јер се он само препише на излаз или израз у заградама. У овом другом случају читамо отворену заграду, затим рекурзивним позивом преводимо први операнд, након тога читамо оператор, затим рекурзивним позивом преводимо други

операнд, након тога читамо затворену заграду и исписујемо оператор који смо прочитали (он бива исписан непосредно након превода својих операнада).

Променљива `i` мења своју вредност кроз рекурзивне позиве. Стога ћемо је преноси по референци тако да представља и улазну и излазну величину функције. Задатак функције је да прочита израз који почиње на позицији i, да га преведе у постфиксни облик и да променљиву `i` промени тако да њена нова вредност i' указује на позицију ниске непосредно након израза који је преведен.

```
#include <iostream>
#include <string>

using namespace std;

// Prevodi deo izraza od pozicije i u postfiksni oblik i rezultat
// nadovezuje na nisku postfiks. Po zavrsetku rada funkcije,
// promenljiva i ukazuje na poziciju iza prevedenog izraza.
void prevedi(const string& izraz, int& i, string& postfiks) {
  if (isdigit(izraz[i]))
    postfiks += izraz[i++];
  else {
    // preskačemo otvorenu zagradu
    i++;
    // prevodimo prvi operand
    prevedi(izraz, i, postfiks);
    // pamtimo operator
    char op = izraz[i++];
    // prevodimo drugi operand
    prevedi(izraz, i, postfiks);
    // preskačemo zatvorenu zagradu
    i++;
    // ispisujemo upamćeni operator
    postfiks += op;
  }
}

// prevodi potpuno zagradjen izraz u postfiksni oblik
string prevedi(const string& izraz) {
  string postfiks = "";
  int i = 0;
  prevedi(izraz, i, postfiks);
  return postfiks;
}

int main() {
  string izraz;
  cin >> izraz;
  string postfiks = prevedi(izraz);
```

```
  cout << postfiks << endl;
  return 0;
}
```

Да бисмо се ослободили рекурзије, потребно је да употребимо стек. Кључна опаска је да се у стек оквиру функције, пре рекурзивног позива за превођење другог операнда памти оператор. Ово нам сугерише да нам је за нерекурзивну имплементацију неопходно да одржавамо стек на који ћемо смештати операторе. Када наиђемо на број преписујемо га на излаз, када наиђемо на оператор стављамо га на стек, а када наиђемо на затворену заграду скидамо и исписујемо оператор са врха стека.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <stack>
using namespace std;

bool jeOperator(char c) {
  return c == '+' || c == '*';
}

string prevedi(const string& izraz) {
  string postfiks;
  stack<char> operatori;
  for (char c : izraz) {
    if (isdigit(c))
      postfiks += c;
    else if (c == ')') {
      postfiks += operatori.top();
      operatori.pop();
    } else if (jeOperator(c))
      operatori.push(c);
  }
  return postfiks;
}

int main() {
  string izraz;
  cin >> izraz;
  string postfiks = prevedi(izraz);
  cout << postfiks << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Незагрђен израз

Поставка: Напиши програм који израчунава вредност аритметичког израза у којем се јављају природни бројеви и између њих оператори `+`, `-` и `*`. Нпр. `3+4*5-7*2`.

Улаз: Једина линија стандардног улаза садржи описани израз.

Излаз: Стандардни излаз треба да садржи само тражену вредност учитаног израза.

Пример

Улаз	*Излаз*
`3+4*5-7*2`	`9`

Решење:

Рекурзивни спуст

Канонско решење овог задатка је да се примени техника рекурзивног спуста. Граматика којом се могу описати ови изрази је следећа

```
E -> E + T
  |  E - T
  |  T
T -> T * num
  | num
```

Ослобађањем од леве рекурзије добијамо граматику:

```
E -> T E'
E' -> + T E'
    | - T E'
    | eps
T -> num T'
T' -> * num T'
    | eps
```

Имплементација је на даље једноставна. Сваком нетерминалу у граматици придружујемо једну функцију. Да бисмо постигли коректно израчунавање и леву асоцијативност (која нам је битна због присуства одузимања), функције које одговарају симболима `E'` и `T'` као аргументе примају вредност израза са своје леве стране.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <cctype>

using namespace std;

enum token {BROJ, PLUS, MINUS, PUTA, EOI};
int _vrednost;
int _poz;
string _ulaz;
token _preduvid;

token lex() {
  if (_poz >= _ulaz.length())
    return EOI;
  char c = _ulaz[_poz++];
```

```
  if (c == '+')
    return PLUS;
  if (c == '-')
    return MINUS;
  if (c == '*')
    return PUTA;
  _vrednost = c - '0';
  while (_poz < _ulaz.length() && isdigit(_ulaz[_poz]))
    _vrednost = 10 * _vrednost + _ulaz[_poz++] - '0';
  return BROJ;
}

int E();
int EP(int);
int T();
int TP(int);

int E() {
  // E -> T E'
  return EP(T());
}

int EP(int x) {
  if (_preduvid == PLUS) {
    // E' -> + T E'
    _preduvid = lex();
    return EP(x + T());
  } else if (_preduvid == MINUS) {
    // E' -> - T E'
    _preduvid = lex();
    return EP(x - T());
  } else {
    // E' -> eps
    return x;
  }
}

int T() {
  // T -> num T'
  int a = _vrednost;
  _preduvid = lex();
  return TP(a);
}

int TP(int x) {
  if (_preduvid == PUTA) {
    // T' -> * num T'
```

```
    _preduvid = lex();
    int a = _vrednost;
    _preduvid = lex();
    return TP(x * a);
  } else {
    // T' -> eps
    return x;
  }
}

int vrednost(const string& s) {
  _ulaz = s;
  _poz = 0;
  _preduvid = lex();
  return E();
}

int main() {
  string s;
  getline(cin, s);
  cout << vrednost(s) << endl;
  return 0;
}
```

Пошто је рекурзија у свим случајевима репна, могуће је потпуно је уклонити.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <cctype>

using namespace std;

enum token {BROJ, PLUS, MINUS, PUTA, EOI};
int _vrednost;
int _poz;
string _ulaz;
token _preduvid;

token lex() {
  if (_poz >= _ulaz.length())
    return EOI;
  char c = _ulaz[_poz++];
  if (c == '+')
    return PLUS;
  if (c == '-')
    return MINUS;
  if (c == '*')
    return PUTA;
```

```
  _vrednost = c - '0';
  while (_poz < _ulaz.length() && isdigit(_ulaz[_poz]))
    _vrednost = 10 * _vrednost + _ulaz[_poz++] - '0';
  return BROJ;
}

int T() {
  int x = _vrednost;
  _preduvid = lex();
  while (_preduvid == PUTA) {
    _preduvid = lex();
    x *= _vrednost;
    _preduvid = lex();
  }
  return x;
}

int E() {
  int x = T();
  while (_preduvid == PLUS || _preduvid == MINUS) {
    if (_preduvid == PLUS) {
      _preduvid = lex();
      x += T();
    } else { // if (preduvid == MINUS)
      _preduvid = lex();
      x -= T();
    }
  }
  return x;
}

int vrednost(const string& s) {
  _ulaz = s;
  _poz = 0;
  _preduvid = lex();
  return E();
}

int main() {
  string s;
  getline(cin, s);
  cout << vrednost(s) << endl;
  return 0;
}
```

Рачунање вредности текућег сабирка

Још једна могућност је да памтимо вредност израза без последњег сабирка и посебно

вредност последњег (текућег) сабирка. Вредност последњег сабирка иницијализујемо на 1, читамо број и оператор иза њега, вредност последњег сабирка множимо са бројем и ако је прочитани оператор + или - или ако смо стигли до краја ниске, завршили смо управо са израчунавањем тог сабирка, и његову додајемо или одузимамо од резултата у зависности од тога који је био претходни адитивни оператор. Ако смо прочитали оператор + или -, памтимо га. Вредност првог сабирка можемо израчунати засебно и резултат иницијализовати на њега, а можемо на почетку претпоставити да је претходни адитивни оператор био + (иако он не пише испред израза) и први сабирак обрадити као и све остале.

Прикажимо рад овог алгоритма на изразу `8+4*5*2-7*2`. У старту вредност израза постављамо на нулу, вредност претходног сабирка на један, а претходни оператор на + (еквивалентно, можемо увести променљиву у којој памтимо знак сабирка и можемо је иницијализовати на 1). Након читања броја `8`, множимо претходни сабирак који има иницијалну вредност `1` са њим, добијамо `8` и пошто смо наишли на +, завршили смо са обрадом једог сабирка и вредност текућег резултата која је `0` увећавамо за производ вредности `8` (то је вредност управо обрађеног сабирка) и `1` (то је вредност знака). Вредност знака опет постављамо на `1` (јер смо наишли на + и у наредном кораку ће опет бити потребно увећање вредности), а вредност текућег сабирка поново враћамо на иницијалну вредност `1`. Читамо затим `4` и множимо текући сабирак са `4` (добијамо вредност `4`), затим читамо `5` и множимо га са `5` (добијамо вредност `20`) и затим читамо `2` и множимо га са `2` (чиме добијамо `40`). Пошто је следећи оператор -, завршили смо са обрадо још једног сабирка и резултат увећавамо за вредност текућег сабирка помножену вредношћу знака (добијамо вредност `48`). Знак постављамо на `-1` (јер ће се наредни сабирак одузимати) и вредност текућег сабирка поново враћамо на иницијалну вредност `1`. Након тога читамо `7` и њиме множимо вредност текућег сабирка (добијамо вредност `7`), затим читамо `2` и њоме множимо вредност текућег сабирка (добијамо вредност `14`) и пошто смо стигли до краја, резултат увећавамо за производ знака и вредности текућег сабирка (тј. на збир додајемо `-14`), чиме добијамо коначну вредност `34`.

```
#include <iostream>
#include <string>

using namespace std;

int vrednost(const string& s) {
  int rezultat = 0;
  int znakTekucegSabirka = 1;
  int tekuciSabirak = 1;
  int tekuciBroj = 0;
  for (int i = 0; i <= s.length(); i++)
    if (i < s.length() && isdigit(s[i]))
      // procitali smo cifru
      // dodajemo je kao poslednju cifru tekuceg broja
      tekuciBroj = 10 * tekuciBroj + s[i] - '0';
    else {
      // dosli smo do nekog operatora ili kraja broja
```

```
      // tekuci broj je faktor tekuceg sabirka
      tekuciSabirak *= tekuciBroj;
      // zavrsili smo sa obradom tekuceg broja i pripremamo se za
      // citanje narednog
      tekuciBroj = 0;

      // ako smo stigli do kraja ili procitali aditivni operator
      // zavrsili smo obradu tekuceg sabirka
      if (i == s.length() || s[i] == '+' || s[i] == '-') {
    // rezultat uvecavamo ili umanjujemo za tekuci sabirak u
    // zavisnosti od ranije odredjenog znaka
    rezultat += znakTekucegSabirka * tekuciSabirak;
    if (i < s.length()) {
      // pripremamo se za obradu narednog sabirka
      tekuciSabirak = 1;
      // njegov znak postavljamo u zavisnosti od operatora na koji
      // smo naisli
      znakTekucegSabirka = s[i] == '+' ? 1 : -1;
    }
      }
    }
  return rezultat;
}

int main() {
  string s;
  getline(cin, s);
  cout << vrednost(s) << endl;
  return 0;
}
```

Спекулативно израчунавање

Интересантна техника коју можемо применити у овом задатку је израчунавање редом једног по једног подизраза. Размотримо израз `3+4-2+5*7`. Израчунавамо вредност израза `3`, затим `3+4`, затим `3+4-2`, затим `3+4-2+5` и на крају `3+4-2+5*7`. Вредност претходно израчунатог израза помаже да се израчуна вредност наредног израза. На пример, ако знамо вредност израза `3`, тада вредност израза `3+4` добијамо тако што на ту вредност додајемо вредност броја `4`. То важи и у општем случају. Ако знамо вредност израза `e`, тада вредност израза `e+x` добијамо тако што на ту вредност додамо вредност броја `x`. Слично, ако знамо вредност израза `e`, тада вредност израза `e-x` добијамо тако што од те вредности одузмемо вредност броја `x`. Случај множења је мало компликованији. Ако знамо вредност израза `3+4-2+5`, вредност израза `3+4-2+5*7` не можемо израчунати једноставним множењем са `7`. Наиме, у изразу `3+4-2+5` број `5` представља одређени вишак и он је додат на текућу суму спекулативно (под претпоставком да се иза њега неће наћи оператор множења). Ако се тај оператор ипак појави, онда ту вредност `5` треба одузети од текућег збира (тако да се добије вредност

израза `3+4-2`), затим је помножити са 7 и на крају тај производ додати на вредност израза. У општем случају, ако имамо израз облика `e+e'*x`, и знамо вредност израза `e+e'`, вредност новог израза добијамо тако што од вредности израза `e+e'` одузмемо вредност `e'` а затим додамо вредност `e'*x`. Да би ово било могуће уз вредност сваког текућег израза који мало по мало проширујемо, увек памтимо и вредност последњег сабирка који у њему учествује (тај сабирак може бити и негативан, ако је испред њега знак минус).

Прикажимо рад овог алгоритма на изразу `8+4*5*2-7*2`. У старту вредност израза постављамо на нулу, као и вредност последњег сабирка. Након тога наилазимо на вредност `8`, увећавамо вредност израза на `8`, што је уједно и вредност последњег сабирка. Након тога наилазимо на вредност `4`, увећавамо вредност израза на `12`, а вредност последњег сабирка постављамо на `4`. Пошто након тога наилазимо на множење бројем `5`, од вредности `12` одузимамо вредност `4` и додајемо `4*5`, чиме добијамо `28`, док вредност последњег сабирка постављамо на `20`. Пошто наилазимо на још једно множење опет од вредности `28` одузимамо вредност `20`, а затим додајемо `20*2` чиме добијамо вредност `48`, док вредност последњег сабирка постављамо на `40`. Након тога долазимо до одузимања вредности `7` тако да вредност израза постаје `41`, а последњи сабирак постављамо на `-7`. На крају, од збира одузимамо тих `-7` и увећавамо га за `-7*2` чиме добијамо `34`, а последњи сабирак постављамо на `-14`. Коначна вредност израза је `34`.

```
#include <iostream>
#include <string>

using namespace std;

int vrednost(const string& s) {
  int rezultat = 0;
  char op = '+';
  int tekuciBroj = 0;
  int poslednjiSabirak = 0;

  for (int i = 0; i <= s.length(); i++)
    if (i < s.length() && isdigit(s[i]))
      // procitali smo cifru
      // dodajemo je kao poslednju cifru tekuceg broja
      tekuciBroj = 10 * tekuciBroj + s[i] - '0';
    else {
      switch (op) {
      case '+':
    // rezultat uvecavamo za tekuci broj (nadajuci se da iza njega
    // ne ide *)
    rezultat += tekuciBroj;
    poslednjiSabirak = tekuciBroj;
    break;
      case '-':
    // rezultat umanjujemo za tekuci broj (nadajuci se da iza
    // njega ne ide *)
```

```
    rezultat -= tekuciBroj;
    poslednjiSabirak = -tekuciBroj;
    break;
      case '*':
    // rezultat je u prethodnom koraku greskom uvecan za poslednji sabirak
    rezultat -= poslednjiSabirak;
    // poslednji sabirak treba da ukljuci i tekuci broj kao faktor
    poslednjiSabirak = poslednjiSabirak * tekuciBroj;
    // uvecavamo rezultat za azuirarani poslednji sabirak,
    // nadajuci se da se iza njega nece vise javljati znak *
    rezultat += poslednjiSabirak;
    break;
      }
      // zavrsili smo sa obradom tekuceg broja i priremamo se za
      // citanje narednog
      tekuciBroj = 0;
      if (i < s.length())
    // pamtimo operator pre citanja narednog broja, jer nam on
    // govori kako naredni broj koji budemo procitali treba
    // ukljuciti u rezultat
    op = s[i];
    }
  return rezultat;
}

int main() {
  string s;
  getline(cin, s);
  cout << vrednost(s) << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Вредност израза

Поставка: Написати програм којим се израчунавају и приказују вредности датих аритметичких израза. Сваки израз је исправно задат, састоји се од природних бројева и операција +, -, * и / (целобројно дељење). Коришћењем проширене Бекусове нотације (EBNF), синтаксу израза можемо описати на следећи начин:

```
<izraz>  ::= <term> {<operacija1><term>}
<term>   ::= <faktor> {<operacija2><faktor>}
<faktor> ::= <broj> | '(' <izraz> ')'
<broj>   ::= <cifra> {<cifra>}
<cifra> ::= '0' | '1' | ... | '9'
<operacija1> ::= '+' | '-'
<operacija2> ::= '*' | '/'
```

Улаз: У свакој линији стандарног улаза налази се синтаксно исправан израз, израз не садржи беле знакове.

Излаз: Свака линија стандардног излаза садржи редом вредности израза датих на стандардном улазу, свака вредност у посебној линији. Ако израз није дефинисан, због дељења 0, приказати поруку `deljenje nulom`.

Пример

Улаз	*Излаз*
`1+2*3-4`	`3`
`2*3-5*(100-8*12)`	`-14`
`123-43*(12-3*5)/(17-35/2)`	`deljenje nulom`
`12/5+2`	`4`

Решење: Вредност израза рачунамо техником рекурзивног спуста. Сваки нетерминал граматике ћемо представити посебном функцијом која чита део израза који се извози из тог нетерминала и враћа вредност тог дела израза. Функцији се по референци преноси индекс `i` који означава почетак дела ниске `s` који се анализира. На крају рада функције овај индекс се премешта иза прочитаног дела ниске. Променљива `ok` која се такође преноси по референци је индикатор да ли је дошло до грешке дељења нулом током израчунавања вредности израза.

```
#include <iostream>
#include<string>

using namespace std;

int term(string, size_t&, bool&);
int faktor(string, size_t&, bool&);
int broj(string, size_t&);

int izraz(string s, size_t &i, bool &ok) {
  int a = term(s, i, ok);
  while (ok && i < s.length() && (s[i] == '+' || s[i] == '-')) {
    if (s[i] == '+') {
      i++;
      a += term(s, i, ok);
    } else if (s[i] == '-') {
      i++;
      a -= term(s,i,ok);
    }
  }
  return a;
}

int term(string s, size_t &i, bool &ok) {
  int a = faktor(s,i,ok);
  while (ok && i < s.length() && (s[i] == '*' || s[i] == '/')) {
    i++;
```

```
    if (s[i - 1] == '*')
      a *= faktor(s,i,ok);
    else {
      int b = faktor(s,i,ok);
      if (b == 0)
        ok = false;
      else
        a /= b;
    }
  }
  return a;
}

int faktor(string s, size_t&i, bool &ok) {
  if (s[i]>='0'&& s[i]<='9')
    return broj(s, i);
  else {
    i++;
    int a = izraz(s, i, ok);
    i++;
    return a;
  }
}

int broj(string s, size_t &i) {
  int x = 0;
  while (i<s.length() && s[i]>='0' && s[i]<='9') {
    x = x*10 + s[i]-'0';
    i++;
  }
  return x;
}

int main() {
  string s;
  size_t i;
  int rez;
  bool ok;
  while (cin >> s) {
    i = 0;
    ok = true;
    rez = izraz(s, i, ok);
    if (ok)
      cout << rez << endl;
    else
      cout << "deljenje nulom" << endl;
  }
```

```
  return 0;
}
```

Глава 5

Геометријски алгоритми

...

Скаларни и векторски производ

Дата су два вектора $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b}(b_1, \ldots, b_n)$ исте димензије. Њихов **скаларни производ** је скалар чија се вредност рачуна по формули:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

Уколико су све координате оба вектора целобројне, и вредност скаларног производа биће целобројна.

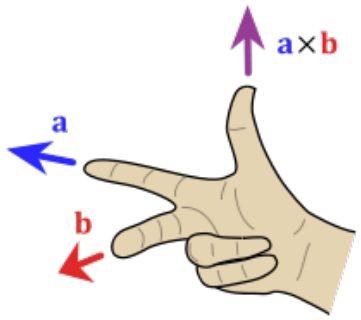
Важи наредна формула: $a \circ b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$ где је са $|a|$ означен интензитет вектора a, а са α угао који заклапају ова два вектора. На основу ове формуле могуће је израчунати:

- интензитет, односно дужину вектора $\vec{u}$, на основу формуле $|u|^2 = \vec{u} \circ \vec{u}$, јер важи $\cos 0 = 1$.
- угао између вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, на основу формуле $\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|u| \cdot |v|}$

Векторски производ вектора $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ димензије 3 је вектор ортогоналан на раван одређену векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чији је смер одређен правилом десне руке, а интензитет једнак површини паралелограма који одређују вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, односно може се израчунати по формули: $\vec{a} \times \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \sin \alpha$ где је са α означен мањи од углова који образују вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Нека је $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ i $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$, где су са $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ означени јединични вектори у смеру x, y и z координатне осе. Важи $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k}$, одакле добијамо да је векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнак:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$



Слика 5.1: Правило десне руке.

Ова формула се уобичајено записује у виду наредне детерминанте:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Задатак: Колинеарност и нормалност вектора

Поставка: Напиши програм који одређује да ли су два тродимензионална вектора међусобно колинеарна и да ли су међусобно нормална.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи три цела броја између -100 и 100 раздвојена са по једним размаком, које представљају координате првог вектора. Друга линија стандардног улаза садржи три цела броја између -100 и 100 раздвојена са по једним размаком, које представљају координате другог вектора.

Излаз: На стандардни излаз исписати текст `kolinearni` ако су вектори колинеарни, `normalni` ако су нормални или `-` ако нису ни једно ни друго.

Пример 1

Улаз
```
3 2 5
1 -4 1
```
Излаз
```
normalni
```

Пример 2

Улаз
```
3 2 5
6 4 10
```
Излаз
```
kolinearni
```

Решење: Два вектора су колинеарна ако и само ако им је векторски производ једнак нули, а нормална ако и само ако им је скаларни производ једнак нули. Векторски производ вектора (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) се може израчунати помоћу детерминанте

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

и једнак је вектору $(y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$. Њихов скаларни производ једнак је $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

```
#include <iostream>

using namespace std;

int skalarni_proizvod(int x1, int y1, int z1,
                      int x2, int y2, int z2) {
  return x1*x2 + y1*y2 + z1*z2;
}

void vektorski_proizvod(int x1, int y1, int z1,
                        int x2, int y2, int z2,
                        int& x, int& y, int& z) {
  // izracunavamo determinantu:
  //  i  j  k
  //  x1 y1 z1
  //  x2 y2 z2
  x = y1*z2 - y2*z1;
  y = z1*x2 - x1*z2;
  z = x1*y2 - x2*y1;
}

int main() {
  int x1, y1, z1;
  cin >> x1 >> y1 >> z1;
  int x2, y2, z2;
  cin >> x2 >> y2 >> z2;

  bool specijalni = false;

  if (skalarni_proizvod(x1, y1, z1, x2, y2, z2) == 0) {
    cout << "normalni" << endl;
    specijalni = true;
  }

  int x, y, z;
  vektorski_proizvod(x1, y1, z1, x2, y2, z2, x, y, z);
  if (x == 0 && y == 0 && z == 0) {
    cout << "kolinearni" << endl;
    specijalni = true;
  }

  if (!specijalni)
    cout << "-" << endl;

  return 0;
}
```

Задатак: Колинеарне тачке

Поставка: Напиши програм који одређује колико тачака из датог скупа тачака припада датој правој.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају координате две различите тачке којима је одређена права (у првој линији се налазе два цела броја раздвојена размаком које представљају координате прве тачке, а у другој два цела броја раздвојена размаком које представљају координате друге тачке). Након тога се учитава број тачака n ($1 \leq n \leq 100$), а затим из наредних n линија координате тих тачака (свака линија садржи два цела броја раздвојена размаком).

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени број тачака које припадају правој.

Пример

Улаз	*Излаз*
1 2 3 4 5 -8 -7 -8 -9 1 2 2 3 0 0	3

Решење: Тачке $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ и $C = (x_3, y_3)$ су колинеарне ако и само ако су вектори $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$ и $\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$ колинеарни, тј. ако им је векторски производ 0. До овог закључка се може доћи и ако се примети да су тачке коолинеарне ако и само ако је површина троугла који образују једнака нули (а површина троугла једнака је половини интензитета векторског производа).

```
#include <iostream>

using namespace std;

void vektorski_proizvod(int x1, int y1, int z1,
                        int x2, int y2, int z2,
                        int& x, int& y, int& z) {
  // izracunavamo determinantu:
  //  i  j  k
  //  x1 y1 z1
  //  x2 y2 z2
  x = y1*z2 - y2*z1;
  y = z1*x2 - x1*z2;
  z = x1*y2 - x2*y1;
}

bool kolinearni_vektori(int x1, int y1, int z1,
                        int x2, int y2, int z2) {
  int x, y, z;
```

```
  vektorski_proizvod(x1, y1, z1,
                     x2, y2, z2,
                     x, y, z);
  return x == 0 && y == 0 && z == 0;
}

bool kolinearne_tacke(int x1, int y1, int x2, int y2, int x3, int y3) {
  return kolinearni_vektori(x1 - x2, y1 - y2, 0,
                            x1 - x3, y1 - y3, 0);
}

int main() {
  int x1, y1;
  cin >> x1 >> y1;
  int x2, y2;
  cin >> x2 >> y2;
  int n;
  cin >> n;
  int broj = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x, y;
    cin >> x >> y;
    if (kolinearne_tacke(x1, y1, x2, y2, x, y))
      broj++;
  }
  cout << broj << endl;
  return 0;
}
```

Пошто претпостављамо да вектори $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ припадају равни xOy, њихов векторски производ је ортогоналан на ту раван. Заиста, његове координате су $((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1), 0, 0)$ и он је једнак нули ако и само ако је $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$.

```
#include <iostream>

using namespace std;

bool kolinearne_tacke(int x1, int y1, int x2, int y2, int x3, int y3) {
  return (x1-x2)*(y1-y3) == (y1-y2)*(x1-x3);
}

int main() {
  int x1, y1;
  cin >> x1 >> y1;
  int x2, y2;
  cin >> x2 >> y2;
  int n;
```

```
  cin >> n;
  int broj = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x, y;
    cin >> x >> y;
    if (kolinearne_tacke(x1, y1, x2, y2, x, y))
      broj++;
  }
  cout << broj << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Са исте стране

Поставка: Напиши програм који утврђује колико се датих тачака налази са исте стране праве као и једна задатака тачка.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе две различите тачке A и B које одређују праву, затим тачка T, након тога број тачака n ($10 \leq n \leq 100$), и након тога n тачака. Свака тачка је задата у посебном реду, помоћу своје две целобројне координате раздвојене једним размаком.

Излаз: На стандардни излаз испиши колико има тачака које се налазе са исте стране праве као и тачка T.

Пример

Улаз	*Излаз*
1 1 2 2 0 1 5 3 4 7 5 2 6 -1 -5 -5 -2	3

Објашњење

Тачке $(3, 4)$, $(2, 6)$ и $(-5, -2)$ се налазе са исте стране праве одређене тачкама $(1, 1)$ и $(2, 2)$ као и тачка $(0, 1)$.

Решење: Тачка T_1 и $_2$ су са исте стране праве B ако и само ако је оријентација тројки ABT_1 и ABT_2 једнака. Оријентација тројке ABT се може одредити на основу знака векторског производа вектора AT и BT.

```
#include <iostream>

using namespace std;
```

```
// moguce orijentacije trojke tacaka
enum Orijentacija {POZITIVNA, KOLINEARNE, NEGATIVNA};

Orijentacija orijentacija(int xa, int ya, int xb, int yb, int xc, int yc) {
  int d = (xb-xa)*(yc-ya) - (xc-xa)*(yb-ya);
  if (d > 0)
    return POZITIVNA;
  else if (d < 0)
    return NEGATIVNA;
  else
    return KOLINEARNE;
}

bool saIsteStrane(int xa, int ya, int xb, int yb,
                  int x1, int y1, int x2, int y2) {
  return orijentacija(xa, ya, xb, yb, x1, y1) ==
    orijentacija(xa, ya, xb, yb, x2, y2);
}

int main() {
  int xa, ya;
  cin >> xa >> ya;
  int xb, yb;
  cin >> xb >> yb;
  int x1, y1;
  cin >> x1 >> y1;
  int n;
  cin >> n;
  int broj = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x2, y2;
    cin >> x2 >> y2;
    if (saIsteStrane(xa, ya, xb, yb, x1, y1, x2, y2))
      broj++;
  }
  cout << broj << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Растојање тацке од праве

Поставка: Нека је дата тачка P и права l која је одређена тачкама $S1$ и $S2$. Одредити растојање тачке P од праве l.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе 2 реална броја која представљају координате тачке P. Након тога се уносе још 4 реалне вредности које представљају координате тачака $S1$ и $S2$ редом.

Излаз: На стандардни излаз исписати једну реалну вредност заокружену на 2 децимале која представља удаљеност тачке P од праве l.

Пример

Улаз	*Излаз*
8 96 0 0 0 7	96.00

Решење: Нека је дата тачка P и права l која је одређена тачкама $S1$ и $S2$. Растојање тачке P од праве l се може израчунати по формули $d = \frac{|PS1 \times PS2|}{|S1S2|}$ где $|PS1 \times PS2|$ представља векторски производ а $|S1S2|$ норму вектора, односно удаљеност између тачака $S1$ и $S2$.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <iomanip>

using namespace std;

double distance_between_points(double x1, double y1, double x2, double y2)
{
  double dx = x2 - x1;
  double dy = y2 - y1;
  return sqrt(dx*dx + dy*dy);
}

double scalar_multiplication(double x1, double y1, double x2, double y2, double x3, doubl
{
    return abs(x1 * y2 + x2 * y3 + x3 * y1 - x1 * y3 - x3 * y2 - x2 * y1);
}

double distance_between_point_and_line(double x1, double y1, double x2, double y2, double
{
    return scalar_multiplication(x1, y1, x2, y2, x3, y3) / distance_between_points(x2, y2
}

int main() {
    double Px, Py, S1x, S1y, S2x, S2y;

    std::cin >> Px >> Py >> S1x >> S1y >> S2x >> S2y;

    std::cout << std::fixed << std::setprecision(2) << distance_between_point_and_line(Px

    return 0;
}
```

Задатак: Тачка у троуглу

Поставка: Напиши програм који проверава да ли се тачка налази у унутрашњости троугла.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси 8 реалних бројева из интервала $[-10, 10]$, заокружених на две децимале. У првом реду се уносе x и y координата тачке која се анализира, а у наредна три реда x и y координате темена троугла. Међу 4 унете тачке нема колинеарних.

Излаз: На стандардни излаз исписати `da` ако тачка припада троуглу или `ne` ако не припада.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`0.00 2.00`	`da`	`-3.50 3.50`	`ne`
`-3.00 -3.00`		`-3.00 -3.00`	
`-1.00 4.00`		`-1.00 4.00`	
`3.00 2.00`		`3.00 2.00`	

Решење: Тачка T је унутар троугла ABC ако и само ако је површина троугла ABC једнака збиру површина троуглова ABT, ATC и TBC.

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

// tolerancija
const double EPS = 1e-6;

// tacka je zadata svojim dvema koordinatama
struct Tacka {
  double x, y;
  Tacka(double x_, double y_) {
    x = x_; y = y_;
  }
};

double povrsinaTrougla(const Tacka& A, const Tacka& B, const Tacka& C) {
  // pertle (cik-cak)
  return abs(+ A.x*B.y + B.x*C.y + C.x*A.y
             - A.x*C.y - C.x*B.y - B.x*A.y) / 2.0;
}

bool tackaUTrouglu(const Tacka& T,
                   const Tacka& A, const Tacka& B, const Tacka& C) {
  // racunamo povrsinu trougla ABC
  double P = povrsinaTrougla(A, B, C);
  // racunamo povrsine trouglova TBC, TAC i TAB
```

```
  double P1 = povrsinaTrougla(T, B, C);
  double P2 = povrsinaTrougla(A, T, C);
  double P3 = povrsinaTrougla(A, B, T);
  // proveravamo da li one u zbiru daju povrsinu trougla ABC
  // poredimo dve realne vrednosti na jednakost
  return abs(P - (P1 + P2 + P3)) < EPS;
}


int main() {
  double x, y;
  cin >> x >> y;
  Tacka P(x, y);
  cin >> x >> y;
  Tacka A(x, y);
  cin >> x >> y;
  Tacka B(x, y);
  cin >> x >> y;
  Tacka C(x, y);
  if (tackaUTrouglu(P, A, B, C))
    cout << "da" << endl;
  else
    cout << "ne" << endl;
  return 0;
}
```

Тачка T је унутар троугла ABC ако и само ако је тачка T са исте стране праве AB као и тачка C, са исте стране праве BC као и тачка A и са исте стране тачке AC као и тачка B тј. ако сви троуглови ABT, BCT и CAT имају исту оријентацију.

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

// tolerancija
const double EPS = 1e-6;

// tacka je zadata svojim dvema koordinatama
struct Tacka {
  double x, y;
  Tacka(double x_, double y_) {
    x = x_; y = y_;
  }
};

// moguce orijentacije trojke tacaka
enum Orijentacija {POZITIVNA, KOLINEARNE, NEGATIVNA};
```

```
Orijentacija orijentacija(const Tacka& A, const Tacka& B, const Tacka& C) {
  double d = (B.x-A.x)*(C.y-A.y) - (C.x-A.x)*(B.y-A.y);
  if (abs(d) < EPS)
    return KOLINEARNE;
  else if (d > EPS)
    return POZITIVNA;
  else
    return NEGATIVNA;
}

bool tackaUTrouglu(const Tacka& T,
                   const Tacka& A, const Tacka& B, const Tacka& C) {
  Orijentacija o1 = orijentacija(A, B, T);
  Orijentacija o2 = orijentacija(B, C, T);
  Orijentacija o3 = orijentacija(C, A, T);
  return o1 == o2 && o2 == o3;
}


int main() {
  double x, y;
  cin >> x >> y;
  Tacka P(x, y);
  cin >> x >> y;
  Tacka A(x, y);
  cin >> x >> y;
  Tacka B(x, y);
  cin >> x >> y;
  Tacka C(x, y);
  if (tackaUTrouglu(P, A, B, C))
    cout << "da" << endl;
  else
    cout << "ne" << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Пресек дужи

Поставка: Напиши програм који одређује да ли се две дужи секу и ако се секу у једној тачки, координате те тачке.

Улаз: Четири линије стандардног улаза садрже координате четири различите тачке (у свакој линији наведена су два цела броја између -10 и 10, раздвојена размаком).

Излаз: У првој линији стандардног излаза исписати `da` ако се дужи секу тј. `ne` у супротном. Ако се дужи секу тачно у једној тачки, у другој линији исписати њене

координате (два реална броја заокружена на пет децимала, раздвојене размаком).

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
0 0	da	0 0	da	0 2	ne
1 1	0.50000 0.50000	5 0	3.00000 0.00000	2 0	
0 1		3 0		-2 -2	
1 0		3 5		0 0	

Решење: Један начин да се задатак реши је да се провери да ли су тачке A_1 и A_2 са разне стране праве одређене тачкама B_1 и B_2 као и да ли су тачке B_1 и B_2 са разних страна праве одређене тачкама A_1 и $_2$. Ако јесу, тада постоји јединствен пресек. Потребно је додатно обратити пажњу на мноштво дегенерисаних случајева који могу наступити (они се идентификују испитивањем колинеарности тачака A_1, A_2, B_1 и B_2).

```
#include <iostream>
#include <iomanip>

using namespace std;

// moguce orijentacije trojke tacaka
enum Orijentacija {POZITIVNA, KOLINEARNE, NEGATIVNA};

Orijentacija orijentacija(int xa, int ya, int xb, int yb, int xc, int yc) {
  int d = (xb-xa)*(yc-ya) - (xc-xa)*(yb-ya);
  if (d > 0)
    return POZITIVNA;
  else if (d < 0)
    return NEGATIVNA;
  else
    return KOLINEARNE;
}

bool kolinearne(int x1, int y1, int x2, int y2, int x3, int y3) {
  return orijentacija(x1, y1, x2, y2, x3, y3) == KOLINEARNE;
}

// za tri kolinearne tacke proverava da li tacka (x, y) pripada duzi
// (x1, y1) -- (x2, y2)
bool pripadaDuzi(int x1, int y1, int x2, int y2, int x, int y) {
  return min(x1, x2) <= x && x <= max(x1, x2) &&
         min(y1, y2) <= y && y <= max(y1, y2);
}

bool saRaznihStrana(int xa, int ya, int xb, int yb,
                    int x1, int y1, int x2, int y2) {
  return orijentacija(xa, ya, xb, yb, x1, y1) !=
    orijentacija(xa, ya, xb, yb, x2, y2);
```

```
}

int main() {
  int xa1, ya1, xa2, ya2;
  cin >> xa1 >> ya1 >> xa2 >> ya2;
  int xb1, yb1, xb2, yb2;
  cin >> xb1 >> yb1 >> xb2 >> yb2;

  bool sekuSe;
  bool jedinstvenPresek;
  double x, y;

  if (kolinearne(xa1, ya1, xa2, ya2, xb1, yb1) &&
      kolinearne(xa1, ya1, xa2, ya2, xb2, yb2)) {
    if (pripadaDuzi(xa1, ya1, xa2, ya2, xb1, yb1)) {
      sekuSe = true;
      if (pripadaDuzi(xa1, ya1, xa2, ya2, xb2, yb2))
        jedinstvenPresek = false;
      else {
        if ((xb1 == xa1 && yb1 == ya1) || (xb1 == xa2 && yb1 == ya2)) {
          jedinstvenPresek = true;
          x = xb1; y = yb1;
        } else {
          jedinstvenPresek = false;
        }
      }
    }
    else if (pripadaDuzi(xa1, ya1, xa2, ya2, xb2, yb2)) {
      sekuSe = true;
      if ((xb2 == xa1 && yb2 == ya1) || (xb2 == xa2 && yb2 == ya2)) {
        jedinstvenPresek = true;
        x = xb2; y = yb2;
      } else {
        jedinstvenPresek = false;
      }
    } else
      sekuSe = false;
  } else if (kolinearne(xa1, ya1, xa2, ya2, xb1, yb1)) {
    if (pripadaDuzi(xa1, ya1, xa2, ya2, xb1, yb1)) {
      sekuSe = true;
      jedinstvenPresek = true;
      x = xb1; y = yb1;
    } else
      sekuSe = false;
  } else if (kolinearne(xa1, ya1, xa2, ya2, xb2, yb2)) {
    if (pripadaDuzi(xa1, ya1, xa2, ya2, xb2, yb2)) {
      sekuSe = true;
```

```
      jedinstvenPresek = true;
      x = xb2; y = yb2;
    } else
      sekuSe = false;
  } else {
    if (saRaznihStrana(xa1, ya1, xa2, ya2, xb1, yb1, xb2, yb2) &&
        saRaznihStrana(xb1, yb1, xb2, yb2, xa1, ya1, xa2, ya2)) {
      sekuSe = true;
      jedinstvenPresek = true;
      int imenilac = (xa1-xa2)*(yb1-yb2)-(ya1-ya2)*(xb1-xb2);
      int brojilacX = (xa1*ya2-ya1*xa2)*(xb1-xb2)-(xa1-xa2)*(xb1*yb2-yb1*xb2);
      int brojilacY = (xa1*ya2-ya1*xa2)*(yb1-yb2)-(ya1-ya2)*(xb1*yb2-yb1*xb2);
      x = (double)brojilacX / (double)imenilac;
      y = (double)brojilacY / (double)imenilac;
    } else
      sekuSe = false;
  }
  if (sekuSe) {
    cout << "da" << endl;
    if (jedinstvenPresek)
      cout << fixed << showpoint << setprecision(5)
           << x << " " << y << endl;
  } else {
    cout << "ne" << endl;
  }

  return 0;
}
```

Задатак можемо решити и применом параметарске једначине дужи. Дуж A_1A_2 има параметарску једначину $\overrightarrow{A_1} + t_a\vec{A_1A_2}$, за $0 \leq t_a \leq 1$, док дуж B_1B_2 има параметарску једначину $\vec{B_1} + t_b\vec{B_1B_2}$, за $0 \leq t_b \leq 1$. Одавде се добија систем једначина

$$\begin{aligned}(x_{A_2} - x_{A_1})t_a + (x_{B_1} - x_{B_2})t_2 &= x_{B_1} - x_{A_1} \\ (y_{A_2} - y_{A_1})t_a + (y_{B_1} - y_{B_2})t_2 &= y_{B_1} - y_{A_1}\end{aligned}$$

Ако је детерминанта система различита од нуле, тада систем има јединствено решење и оно одређује тачку пресека две праве. Да би се проверило да је то уједно пресек дужи, потребно је проверити да ли оба израчуната параметра припадају интервалу $[0, 1]$.

Ако је детерминанта система једнака нули, онда су праве паралелне, па проверавамо дегенерисане случајеве (могуће је да су праве било паралелне, било да се поклапају).

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
```

```
using namespace std;

enum BrojResenja {NEMA_RESENJA, JEDINSTVENO_RESENJE, BESKONACNO_RESENJA};

BrojResenja resiSistem(int a11, int a12, int a21, int a22, int b1, int b2,
                       double& x1, double& x2) {
  int D = a11*a22 - a12*a21;
  int D1 = b1*a22 - a12*b2;
  int D2 = a11*b2 - a21*b1;
  if (D == 0) {
    if (D1 == 0 && D2 == 0)
      return BESKONACNO_RESENJA;
    else
      return NEMA_RESENJA;
  }
  x1 = (double)D1/(double)D;
  x2 = (double)D2/(double)D;
  return JEDINSTVENO_RESENJE;
}

// za tri kolinearne tacke proverava da li tacka (x, y) pripada duzi
// (x1, y1) -- (x2, y2)
bool pripadaDuzi(int x1, int y1, int x2, int y2, int x, int y) {
  return min(x1, x2) <= x && x <= max(x1, x2) &&
         min(y1, y2) <= y && y <= max(y1, y2);
}

int main() {
  int xa1, ya1, xa2, ya2;
  cin >> xa1 >> ya1 >> xa2 >> ya2;
  int xb1, yb1, xb2, yb2;
  cin >> xb1 >> yb1 >> xb2 >> yb2;

  bool sekuSe;
  bool jedinstvenPresek;
  double x, y;

  int a11 = xa2-xa1, a12 = xb1-xb2, b1 = xb1-xa1;
  int a21 = ya2-ya1, a22 = yb1-yb2, b2 = yb1-ya1;
  double t1, t2;
  BrojResenja broj = resiSistem(a11, a12, a21, a22, b1, b2, t1, t2);
  if (broj == JEDINSTVENO_RESENJE) {
    if (0 <= t1 && t1 <= 1 && 0 <= t2 && t2 <= 1) {
      sekuSe = true;
      jedinstvenPresek = true;
      x = xa1 + t1*(xa2-xa1);
      y = ya1 + t1*(ya2-ya1);
```

```
    } else {
      sekuSe = false;
    }
  } else if (broj == NEMA_RESENJA) {
    sekuSe = false;
  } else {
    if (pripadaDuzi(xa1, ya1, xa2, ya2, xb1, yb1) &&
        pripadaDuzi(xa1, ya1, xa2, ya2, xb2, yb2)) {
      sekuSe = true;
      jedinstvenPresek = false;
    } else if (pripadaDuzi(xa1, ya1, xa2, ya2, xb1, yb1)) {
      sekuSe = true;
      if (xb1 == xa1 || xb1 == xa2) {
        jedinstvenPresek = true;
        x = xb1; y = yb1;
      } else {
        jedinstvenPresek = false;
      }
    } else if (pripadaDuzi(xa1, ya1, xa2, ya2, xb2, yb2)) {
      sekuSe = true;
      if (xb2 == xa1 || xb2 == xa2) {
        jedinstvenPresek = true;
        x = xb2; y = yb2;
      } else {
        jedinstvenPresek = false;
      }
    } else {
      sekuSe = false;
    }
  }

  if (sekuSe) {
    cout << "da" << endl;
    if (jedinstvenPresek)
      cout << fixed << showpoint << setprecision(5)
           << x << " " << y << endl;
  } else {
    cout << "ne" << endl;
  }

  return 0;
}
```

Задатак: Површина троугла датих темена

Поставка: Напиши програм који израчунава површину троугла ако су познате координате његових темена.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се 6 реалних бројева (сваки у засебном реду). Прва два представљају x и y координату темена A, друга два x и y координату темена B и последња два представљају x и y координату темена C.

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број који представља површину троугла (допуштена грешка израчунавања је 10^{-5}).

Пример

Улаз	*Излаз*
0 0 0 1 1 0	0.5

Решење: Задатак је математички могуће решити на неколико начина.

Херонов образац

Један начин је да применимо Херонов образац

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)},$$

где је су a, b и c дужине страница троугла, а $s = (a+b+c)/2$ његов полуобим. Дужине страница можемо израчунати као растојање између темена троугла, применом Питагорине теореме, како је то показано у задатку Растојање тачака.

Мана овог решења је то што се у њему користи квадратни корен, иако се до решења може доћи и без кореновања.

```
// rastojanje izmedju tacaka (x1, y1) i (x2, y2)
double rastojanje(double x1, double y1, double x2, double y2) {
  double dx = x2 - x1;
  double dy = y2 - y1;
  return sqrt(dx*dx + dy*dy);
}

// povrsina trougla za zadate duzine stranica
double povrsinaTrougla(double a, double b, double c) {
  // Heronov obrazac
  double s = (a + b + c) / 2;
  return sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c));
}

int main() {
  // koordinate tacaka trougla
```

```
  double Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy;
  cin >> Ax >> Ay >> Bx >> By >> Cx >> Cy;

  // duzine stranica trougla
  double a = rastojanje(Bx, By, Cx, Cy);
  double b = rastojanje(Ax, Ay, Cx, Cy);
  double c = rastojanje(Ax, Ay, Bx, By);

  // povrsina trougla
  double P = povrsinaTrougla(a, b, c);

  cout << setprecision(5) << showpoint << fixed << P << endl;

  return 0;
}
```

Векторски производ

Још један начин је да применимо чињеницу да је интензитет векторског производа вектора AB и AC једнак површини паралелограма који они образују. Пошто је наш троугао управо половина тог паралелограма његова површина једнака је половини интензитета векторског производа. Координате x и y вектора AB и AC могуће је израчунати одузимањем координата тачке A од тачака B и C. Пошто можемо претпоставити да наш троугао лежи у равни xOy, координата z ових вектора једнака је 0. Векторски производ два вектора чије су три координате познате једнак је детерминанти

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

Напоменимо да је решење засновано на векторском производу много боље него оно засновано на Хероновом обрасцу, јер користи само основне аритметичке операције (а не и кореновање).

Један начин да се направи имплементација је да се имплементира функција која израчунава векторски производ произвољна два вектора.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cmath>

using namespace std;

// duzina (intenzitet) vektora (x, y, z)
double duzinaVektora(double x, double y, double z) {
  return sqrt(x*x + y*y + z*z);
}

// izracunava vektor (x, y, z) koji je vektorski proizvod
// vektora (x1, y1, z1) i (x2, y2, z2)
```

```
void vektorskiProizvod(double x1, double y1, double z1,
                       double x2, double y2, double z2,
                       double& x, double& y, double& z) {
  x = y1*z2 - z1*y2;
  y = z1*x2 - x1*z2;
  z = x1*y2 - y1*x2;
}

// povrsina trougla zadatog temenima (Ax, Ay), (Bx, By), (Cx, Cy)
double povrsinaTrougla(double Ax, double Ay,
                       double Bx, double By,
                       double Cx, double Cy) {
  // vektor AB
  double ABx, ABy;
  ABx = Bx - Ax; ABy = By - Ay;
  // vektor AC
  double ACx, ACy;
  ACx = Cx - Ax; ACy = Cy - Ay;
  // vektorski proizvod AB x AC
  double x, y, z;
  vektorskiProizvod(ABx, ABy, 0,
                    ACx, ACy, 0,
                    x, y, z);
  // povrsina je polovina intenziteta vektorskog proizvoda
  return duzinaVektora(x, y, z) / 2.0;
}

int main() {
  // koordinate tacaka trougla
  double Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy;
  cin >> Ax >> Ay >> Bx >> By >> Cx >> Cy;
  // povrsina trougla
  double P = povrsinaTrougla(Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy);
  cout << setprecision(5) << fixed << showpoint << P << endl;

  return 0;
}
```

Пошто је нама потребно израчунати векторски производ два вектора који леже у xOy равни, тј. два вектора којима су координате z једнаке нули, израчунавање је могуће оптимизовати. Наиме, резултат ће бити вектор нормалан на раван xOy тј. координате x и y ће му бити једнаке нули. Зато ће му интензитет бити једнак апсолутној вредности координате z која је једнака $x_1y_2 - y_1x_2$, при чему су (x_1, y_1) координате вектора AB, а (x_2, y_2) координате вектора AC. Дакле, важи да је површина једнака

$$\frac{|(b_x - a_x)(c_y - a_y) - (b_y - a_y)(c_x - a_x)|}{2}$$

тј.

$$\frac{|b_x c_y - a_x c_y - b_x a_y - b_y c_x + a_y c_x + a_x b_y|}{2}$$

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cmath>

using namespace std;

// povrsina trougla zadatog temenima (Ax, Ay), (Bx, By), (Cx, Cy)
double povrsinaTrougla(double Ax, double Ay,
                       double Bx, double By,
                       double Cx, double Cy) {
  // vektor AB
  double ABx, ABy;
  ABx = Bx - Ax; ABy = By - Ay;
  // vektor AC
  double ACx, ACy;
  ACx = Cx - Ax; ACy = Cy - Ay;
  // x i y koordinate vektorskog proizvoda AB i AC su 0
  // z koordinata vektorskog proizvoda AB x AC
  double z = ABx*ACy - ABy*ACx;
  // povrsina je polovina intenziteta vektorskog proizvoda
  return abs(z) / 2.0;
}

int main() {
  // koordinate tacaka trougla
  double Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy;
  cin >> Ax >> Ay >> Bx >> By >> Cx >> Cy;
  // povrsina trougla
  double P = povrsinaTrougla(Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy);
  cout << setprecision(5) << fixed << showpoint << P << endl;

  return 0;
}
```

Разлагање на трапезе

Још један начин доласка до решења је да се површина троугла искаже као збир, односно разлика површина одређених трапеза. На пример, ако важи распоред $a_x < b_x < c_x$, и ако су A_x, B_x и C_x редом пројекције тачака A, B и C на x-осу, тада је површина троугла једнака разлици између збира површина правоуглих трапеза AA_xB_xB, BB_xC_xC и површине правоуглог трапеза AA_xC_xC. Површина трапеза AA_xB_xB једнака је производу између дужине његове средње линије и дужине његове висине. Дужина основице A_xA једнака је апсолутној вредности координате a_y, дужина основице B_xB једнака је апсолутној вредности координате b_y док је дужина висине једнака апсолутној вредности разлике координата b_x и a_x. Тако да је порвршина тог трапеза

једнака $\frac{|b_x-a_x|(|a_y|+|b_y|)}{2}$. На сличан начин могу се извести и формуле за друга два трапеза.

Анализом могућих распореда тачака, може се показати да ће се исправан резултат добити и ако се посматра такозвана означена површина трапеза, која допушта негативне дужине и површине. Означена површина троугла биће једнака збиру означених површина три поменута правоугла трапеза (AA_xB_xB, BB_xC_xC и CC_xA_xA), а права површина троугла биће једнака њеној апсолутној вредности. Означене површине ових трапеза добијају се тако што се у претходно изведним формулама за њихову површину занемаре апсолутне вредности и једнаке су $\frac{(b_x-a_x)(b_y+a_y)}{2}$, $\frac{(c_x-b_x)(c_y+b_y)}{2}$ и $\frac{(a_x-c_x)(a_y+c_y)}{2}$, тако да се површина троугла добија формулом

$$\frac{|(b_x-a_x)(b_y+a_y)+(c_x-b_x)(c_y+b_y)+(a_x-c_x)(a_y+c_y)|}{2},$$

тј.

$$\frac{|b_xa_y-a_xb_y+c_xb_y-b_xc_y+a_xc_y-c_xa_y|}{2}$$

Приметимо да се на овај начин добија потпуно иста формула као када се површина рачуна векторским производом и овај поступак заправо представља одређени доказ и објашњење формуле изведене на основу векторског производа.

Слично решење засновано на разлагању се може добити тако што се од правоугаоника описаног око троугла коме су странице паралелне осама одузму три површине правоуглих троуглова.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cmath>

using namespace std;

// racuna oznacenu povrsinu pravouglog trapeza koji odredjuju tacke
// (Mx, My), (Nx, Ny) i njihove projekcije na x-osu
double povrsinaTrapeza(double Mx, double My, double Nx, double Ny) {
  return (Nx - Mx) * (My + Ny);
}

// povrsina trougla zadatog temenima (Ax, Ay), (Bx, By), (Cx, Cy)
double povrsinaTrougla(double Ax, double Ay,
                       double Bx, double By,
                       double Cx, double Cy) {
  return abs(povrsinaTrapeza(Ax, Ay, Bx, By) +
             povrsinaTrapeza(Bx, By, Cx, Cy) +
             povrsinaTrapeza(Cx, Cy, Ax, Ay)) / 2.0;
}

int main() {
  // koordinate tacaka trougla
```

```
  double Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy;
  cin >> Ax >> Ay >> Bx >> By >> Cx >> Cy;
  // povrsina trougla
  double P = povrsinaTrougla(Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy);
  cout << setprecision(5) << showpoint << fixed << P << endl;

  return 0;
}
```

Формула пертле

Задатак је могуће решити и општијом **формулом пертле** која омогућава израчунавање површине произвољних полигона којима се странице не пресецају међусобно. Заиста, ако напишемо координате тачака у следећем облику

$$\begin{matrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ a_x & a_y \end{matrix}$$

Формула се гради тако што се са једним знаком узимају производи одозго-наниже, слева-удесно (то су $a_x b_y$, $b_x c_y$ и $c_x a_y$), док се са супротним знаком узимају производи одоздо-навише, слева удесно (то су $a_x c_y$, $c_x b_y$, и $b_x a_y$), што, када се нацрта, заиста подсећа на цик-цак везивање пертли.

$$\frac{|b_x c_y - a_x c_y - b_x a_y - b_y c_x + a_y c_x + a_x b_y|}{2}$$

Ова се формула може извести помоћу векторских производа и детерминанти, али и елементарнијим техникама (сабирањем означених прозвода троуглова или трапеза).

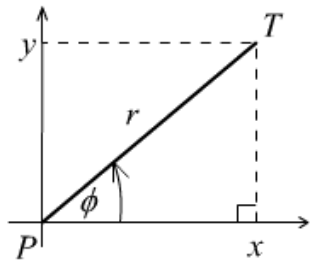
```
double povrsinaTrougla(double Ax, double Ay,
                       double Bx, double By,
                       double Cx, double Cy) {
  // pertle (cik-cak)
  return abs(Ax*By + Bx*Cy + Cx*Ay - Ax*Cy - Cx*By - Bx*Ay) / 2.0;
}
```

Поларне координате

Некада је за дате декартовске координате x и y тачке T потребно одредити њене поларне координате: растојање r од координатног почетка P и угао ϕ који вектор PT захвата са позитивним делом x осе и обратно, на основу поларних координата одредити декартовске.

Да бисмо трансформисали поларне координате у декартовске, можемо искористити следећу везу (слика 5.2):

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$$



Слика 5.2: Веза између декартовских и поларних координата.

А за трансформацију декартовских координата у поларне можемо искористити наредне једначине:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \phi = \arctan \frac{y}{x}$$

Задатак: Декартовске у поларне координате

Поставка: Нека је тачка задата координатама у Декартовом координатном систему. Одредити њене поларне координате.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе 2 реалне вредности које представљају координате тачке у Декартовом координатном систему.

Излаз: На стандарнди излаз исписати 2 вредности које представљају растојање тачке од координатног система и угао који права која пролази кроз кординатни почетак и дату тачку заклапа са позитивним делом x осе.

Пример

Улаз	*Излаз*
`2 3`	`3.60555 0.982794`

Решење: За пребацивање из Декартових координата у поларне можемо искористити формулу $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arctan \frac{y}{x}$.

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

void cartesian_to_polar_coordinates(double x, double y, double &angle, double &r)
{
    r = sqrt(x * x + y * y);
    angle = atan2(y, x);
}

int main() {
    double x, y, angle, r;
```

```
    std::cin >> x >> y;

    cartesian_to_polar_coordinates(x, y, angle, r);

    std::cout << r << " " << angle << "\n";

    return 0;
}
```

Задатак: Поларне у Декартовске координате

Поставка: Нека је тачка задата својим поларним координатама. Одредити њене координате у Декартовом координатном систему.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе 2 реалне вредности које представљају координате тачке у поларном координатном систему, удаљеност тачке од координатног почетка и угао који права која пролази кроз координатни почетак и дату тачку заклапа са позитивним делом x осе.

Излаз: На стандарни излаз исписати 2 вредности које представљају x и y координату тачке у Декартовом координатном систему.

Пример

Улаз	*Излаз*
`3.60555 0.982794`	`2 3`

Решење: За пребацивање из поларних у Декартовске координате можемо искористити формулу $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$.

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

void polar_to_cartesian_coordinates(double r, double angle, double &x, double &y)
{
    x = r * cos(angle);
    y = r * sin(angle);
}

int main() {
  double x, y, angle, r;

    std::cin >> r >> angle;

    polar_to_cartesian_coordinates(r, angle, x, y);

    std::cout << x << " " << y << "\n";
```

```
    return 0;
}
```

Многоуглови

Задатак: Површина полигона

Поставка: Напиши програм који израчунава површину датог конвексног многоугла.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број темена n ($3 \leq n100$), а затим редом координате n тачака многоугла (цели бројеви између -10000 и 10000, раздвојени размаком).

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број који представља површину многоугла.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
4 0 0 0 1 1 1 1 0	1

Пример 2

Улаз	*Излаз*
3 0 0 0 1 1 0	0.5

Пример 3

Улаз	*Излаз*
6 -2 0 -1 2 1 2 2 0 1 -2 -1 -2	12

Решење:

Анализа

Смернице за алгоритам

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
#include <cmath>

using namespace std;

struct Tacka {
  int x, y;
};

int det(int A, int B, int C, int D) {
  return A*D - B*C;
}

double povrsinaPoligona(const vector<Tacka>& p) {
  int n = p.size();
```

```
  int P = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++)
    P += det(p[i].x, p[(i+1) % n].x, p[i].y, p[(i+1) % n].y);
  return abs(P) / 2.0;
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<Tacka> tacke(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> tacke[i].x >> tacke[i].y;
  cout << fixed << showpoint << setprecision(1)
       << povrsinaPoligona(tacke) << endl;
  return 0;
}
```

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
#include <cmath>

using namespace std;

struct Tacka {
  int x, y;
};


double povrsinaTrougla(const Tacka& t1, const Tacka& t2, const Tacka& t3) {
  return abs((t2.x-t1.x)*(t3.y-t1.y) -  (t2.y-t1.y)*(t3.x-t1.x)) / 2.0;
}

double povrsinaPoligona(const vector<Tacka>& tacke) {
  double P = 0;
  for (size_t i = 2; i < tacke.size(); i++)
    P += povrsinaTrougla(tacke[0], tacke[1], tacke[i]);
  return P;
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<Tacka> tacke(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> tacke[i].x >> tacke[i].y;
  cout << fixed << showpoint << setprecision(1)
       << povrsinaPoligona(tacke) << endl;
```

```
  return 0;
}
```

Задатак: Да ли је прост

Поставка: Текст задатка.

Улаз: Опис улазних података.

Излаз: Опис излазних података.

Пример

Улаз	*Излаз*
0	0

Решење:

Анализа

Смернице за алгоритам

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <set>
#include <algorithm>

using namespace std;

struct Tacka {
  int x, y;
  bool operator<(const Tacka& t) const {
    return x < t.x || (x == t.x && y < t.y);
  }
};

enum Orijentacija {POZITIVNA, NEGATIVNA, KOLINEARNE};

Orijentacija orijentacija(Tacka a, Tacka b, Tacka c) {
  int xa = a.x, ya = a.y;
  int xb = b.x, yb = b.y;
  int xc = c.x, yc = c.y;
  long long d = (long long)(xb-xa)*(long long)(yc-ya) -
                (long long)(xc-xa)*(long long)(yb-ya);
  if (d > 0)
    return POZITIVNA;
  else if (d < 0)
    return NEGATIVNA;
  else
    return KOLINEARNE;
}
```

```
bool prostPoligon(const vector<Tacka>& tacke) {
  int n = tacke.size();
  int slX;
  // da li je duz sa indeksom i1 ispod duzi sa indeksom i2
  auto slCmp = [&slX, &tacke, n](int i1, int i2) {
    // u pitanju je jedna te ista duz
    if (i1 == i2)
      return false;

    // odredjujemo i uredjujemo krajnje tacke duzi

    // krajnje tacke duzi i1
    int ti11 = i1, ti12 = (i1+1)%n;
    if (tacke[ti11] < tacke[ti12])
      swap(ti11, ti12);
    const Tacka& t1A = tacke[ti11];
    const Tacka& t1B = tacke[ti12];
    // krajnje tacke duzi i2
    int ti21 = i2, ti22 = (i2+1)%n;
    if (tacke[ti21] < tacke[ti22])
      swap(ti21, ti22);
    const Tacka& t2A = tacke[ti21];
    const Tacka& t2B = tacke[ti22];

    // duz sa indeksom i1 je vertikalna
    if (t1A.x == t1B.x) {
      // ako je duz sa indeksom i2 vertikalna
      if (t2A.x == t2B.x)
        // redosled im odredjujemo na osnovu donjih temena
        return t1A.y < t2A.y;
      else
        // redosled im odredjujemo na osnovu odnosa polozaja donjeg
        // temena duzi i1 u odnosu na duz i2
        return orijentacija(t2A, t2B, t1A) == NEGATIVNA;
    }

    // odredjujemo polozaj leve tacke duzi i2 u odnosu na duz i1
    Orijentacija oA = orijentacija(t1A, t1B, t2A);
    // ako ona ne lezi na duzi i1
    if (oA != KOLINEARNE)
         // redosled duzi je odredjen njenim polozajem
        return oA == POZITIVNA;
    else {
      // u suprotnom odredjujemo polozaj desne tacke duzi i2 u odnosu
      // na duz i1
```

```
    Orijentacija oB = orijentacija(t1A, t1B, t2B);
    // ako ona ne lezi na duzi i2
    if (oB != KOLINEARNE)
      // redosled duzi je odredjen njenim polozajem
      return oB == POZITIVNA;
    // u suprotnom polozaj odredjujemo na osnovu vertikalnog odnosa
    // njihovih levih tacaka
    return t1A.y <= t2A.y;
  }
};
set<int, decltype(slCmp)> sl(slCmp);

struct Teme {
  int i_tacka;
  int i_duz;
  bool pocetno;
};
vector<Teme> EQ;
EQ.reserve(2*n);
for (int i = 0; i < n; i++) {
  const Tacka& t1 = tacke[i];
  const Tacka& t2 = tacke[(i+1) % n];
  Teme tm1{i, i, t1 < t2};
  Teme tm2{(i+1) % n, i, !(t1 < t2)};
  EQ.push_back(tm1);
  EQ.push_back(tm2);
}

sort(begin(EQ), end(EQ),
     [&tacke](const Teme& t1, const Teme& t2) {
       return tacke[t1.i_tacka] < tacke[t2.i_tacka];
     });

auto susedni = [n](int i1, int i2) {
  return abs(i1 - i2) == 1 || abs(i1 - i2) == n-1;
};

for (const Teme& tm : EQ) {
  cout << tm.i_tacka << ": " << tacke[tm.i_tacka].x << " " << tacke[tm.i_tacka].y
  if (tm.pocetno) {
    cout << "Add: " << tm.i_duz << endl;
    auto p = sl.insert(tm.i_duz);
    auto it = p.first;
    if (it != begin(sl)) {
      auto it_prev = prev(it);
      if (!susedni(*it, *it_prev))
        cout << "Compare: " << *it_prev << " " << *it << endl;
```

```
      }
      auto it_next = next(it);
      if (it_next != end(sl)) {
        if (!susedni(*it, *it_next))
          cout << "Compare: " << *it << " " << *it_next << endl;
      }
    } else {
      cout << "Remove: " << tm.i_duz << endl;
      auto it = sl.find(tm.i_duz);
      if (it == end(sl))
        cout << "END" << endl;

      if (it != begin(sl)) {
        auto it_prev = prev(it);
        auto it_next = next(it);
        if (it_next != end(sl)) {
          if (!susedni(*it_prev, *it_next))
            cout << "Compare: " << *it_prev << " " << *it_next << endl;
        }
      }
      sl.erase(tm.i_duz);
    }
    for (int x : sl)
      cout << x << " ";
    cout << endl;
  }

  return true;
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<Tacka> tacke(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> tacke[i].x >> tacke[i].y;
  if (prostPoligon(tacke))
    cout << "da" << endl;
  else
    cout << "ne" << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Конструкција простог многоугла

Поставка: Прост многоугао је многоугао у ком се никоје две странице не секу (осим што се суседне странице додирују у заједничком темену). Напиши програм који за дати скуп тачака (у ком нису све тачке колинеарне) одређује неки прост многоугао ком је скуп темена једнак том скупу тачака.

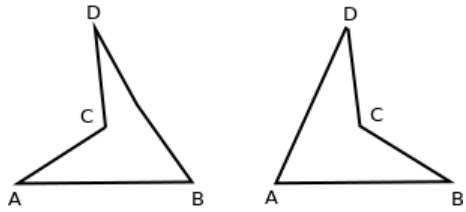
Улаз: Са стандрадног улаза се учитава број n ($3 \leq n \leq 50000$), а затим и n тачака (свака тачка је описана у посебном реду помоћу своје две целобројне координате раздвојене размаком). Све учитане тачке су различите и нису све колинеарне.

Излаз: На стандардни излаз исписати пермутацију учитаног низа тачака која представља редослед темена конструисаног простог многоугла (тачке треба да буду описане на исти начин као и на улазу).

Пример

Улаз	*Излаз*
`5`	`5 1`
`3 1`	`5 2`
`0 4`	`2 3`
`5 1`	`0 4`
`2 3`	`3 1`
`5 2`	

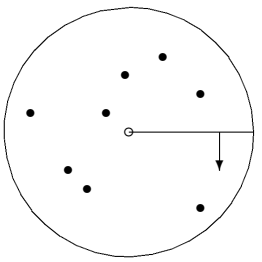
Решење: Некада је за дати скуп тачака у равни могуће конструисати више различитих простих многоуглова, односно решење није једнозначно одређено (слика 5.3).



Слика 5.3: Тачке A, B, C и D и два различита проста многоугла која оне одређују.

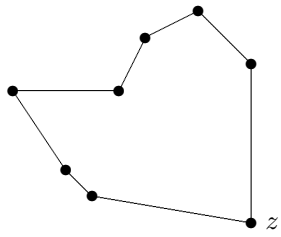
Нека је C неки круг, чија унутрашњост садржи све тачке. За налажење таквог круга довољно је израчунати највеће међу растојањима произвољне тачке равни (центра круга) до свих осталих тачака – сложеност овог корака је $O(n)$. Површина C може се "пребрисати" (прегледати) ротирајућом полуправом којој је почетак центар C (слика 5.4). Претпоставимо за тренутак да ротирајућа права у сваком тренутку садржи највише једну тачку. Очекујемо да ћемо спајањем тачака оним редом којим полуправа наилази на њих добити прост многоугао. Докажимо то. Означимо тачке, уређене у складу са редоследом наиласка полуправе на њих, са $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (прва тачка бира се произвољно). За свако i, $1 \leq i \leq n$, страница P_iP_{i-1} (односно P_1P_n за $i = 1$) садржана је у новом (дисјунктном) исечку круга, па се не сече ни са једном другом страницом. Ако би ово тврђење било тачно, добијени многоугао би морао да буде

прост. Међутим, угао између полуправих кроз неке две узастопне тачке P_i и P_{i+1} може да буде већи од π. Тада исечак који садржи дуж P_iP_{i+1} садржи више од пола круга и није конвексна фигура, а дуж P_iP_{i+1} пролази кроз друге исечке круга, па може да сече друге странице многоугла. Да бисмо се уверили да је то могуће, довољно је да уместо нацртаног замислимо круг са центром ван круга са слике 5.4. Ово је пример специјалних случајева на које се наилази при решавању геометријских проблема.



Слика 5.4: Пролазак тачака у кругу ротирајућом полуправом.

Да би се решио уочени проблем, могу се, на пример, фиксирати произвољне три неколинеарне тачке из скупа, а за центар круга изабрати нека тачка унутар њима одређеног троугла (на пример тежиште, које се лако налази). Овакав избор гарантује да ни један од добијених сектора круга неће имати угао већи од π. Затим сортирамо тачке према положају у кругу са центром z. Прецизније, сортирају се углови између x-осе и полуправих од z ка осталим тачкама. Ако две или више тачака заклапају исти угао са x-осом, оне се даље сортирају растуће према растојању од тачке z. На крају, тачке повезујемо у складу са добијеним уређењем, по две узатопне. Пошто све тачке леже лево од тачке z, до дегенерисаног случаја о коме је било речи не може доћи. Прост многоугао добијен овим поступком за тачке са слике 5.4 приказан је на слици 5.5. Основна компонента временске сложености овог алгоритма потиче од сортирања. Сложеност алгоритма је дакле $O(n \log n)$.



Слика 5.5: Конструкција простог многоугла.

Угао φ који права $y = mx+b$ заклапа са x осом добија се коришћењем везе $m = \tan\varphi$, односно из једначине $\varphi = \arctan m$. Међутим, углови се не морају експлицитно израчунавати. Углови се користе само за налажење редоследа којим треба повезати тачке и исти редослед добија се уређењем нагиба одговарајућих полуправих; то чини непотребним израчунавање аркустангенса. Из истог разлога непотребно је израчунавање растојања кад две тачке имају исти нагиб — довољно је израчунати квадрате растојања. Дакле, нема потребе за израчунавањем квадратних коренова.

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <numeric>
#include <cmath>

using namespace std;

// tacka je zadata svojim dvema koordinatama
struct Tacka {
  int x, y;
  Tacka(int x_ = 0, int y_ = 0) {
    x = x_; y = y_;
  }
};

bool kolinearne(const Tacka& t1, const Tacka& t2, const Tacka& t3) {
  return (t1.x-t2.x)*(t1.y-t3.y) == (t1.y-t2.y)*(t1.x-t3.x);
}

double kvadratRastojanja(double x1, double y1, double x2, double y2) {
  double dx = x1 - x2, dy = y1 - y2;
  return dx*dx + dy*dy;
}

void prostMnogougao(vector<Tacka>& tacke) {
  int i = 2;
  while (kolinearne(tacke[0], tacke[1], tacke[i]))
    i++;
  double x0 = (tacke[0].x + tacke[1].x + tacke[i].x) / 3.0;
  double y0 = (tacke[0].y + tacke[1].y + tacke[i].y) / 3.0;
  sort(begin(tacke), end(tacke),
       [x0, y0](const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
         double x1 = t1.x - x0, y1 = t1.y - y0;
         double x2 = t2.x - x0, y2 = t2.y - y0;
         double ugao1 = atan2(y1, x1);
         double ugao2 = atan2(y2, x2);
         const double EPS = 1e-12;
         if (ugao1 < ugao2 - EPS) {
           return true;
         }
         if (ugao2 < ugao1 - EPS) {
           return false;
         }
         return kvadratRastojanja(x0, y0, x1, y1) <
           kvadratRastojanja(x0, y0, x2, y2);
       });
}
```

```
int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<Tacka> tacke(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x, y;
    cin >> x >> y;
    tacke[i] = Tacka(x, y);
  }
  prostMnogougao(tacke);
  for (const Tacka& t : tacke)
    cout << t.x << " " << t.y << endl;
  return 0;
}
```

Уместо тежишта троугла одређеног са неке три неколинеарне тачке из скупа, за центар круга може се узети и једна од тачака из скупа — тачка z са највећом x-координатом (и са најмањом y-координатом, ако има више тачака са највећом x-координатом). Овакву тачку ћемо често користити приликом репавања геометријских проблема и зваћемо је *екстремна тачка*. Овако одабрану тачку повезујемо са свим осталим тачкама и тачке сортирамо растуће у односу на угао који полуправа од тачке z заклапа са x-осом. Ако две или више тачака заклапају исти угао са x-осом, оне се даље сортирају према растојању од тачке z и то на следећи начин: уколико првих неколико тачака заклапају исти угао, њих сортирамо у растућем редоследу растојања од тачке z, уколико је последњих неколико тачака колинеарно са тачком z њих сортирамо у опадајућем редоследу растојања од тачке z, док је за остале тачке које су колинеарне са тачком z све једно да ли ћемо их сортирати растуће или опадајуће.

```
#include <iostream>
#include <algorithm>

using namespace std;

// tacka je zadata svojim dvema koordinatama
struct Tacka {
  int x, y;
  Tacka(int x_ = 0, int y_ = 0) {
    x = x_; y = y_;
  }
};

enum Orijentacija { POZITIVNA, NEGATIVNA, KOLINEARNE };

Orijentacija orijentacija(const Tacka& t0, const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
  int d = (t1.x-t0.x)*(t2.y-t0.y) - (t2.x-t0.x)*(t1.y-t0.y);
  if (d > 0)
```

```
    return POZITIVNA;
  else if (d < 0)
    return NEGATIVNA;
  else
    return KOLINEARNE;
}

int kvadratRastojanja(const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
  int dx = t1.x - t2.x, dy = t1.y - t2.y;
  return dx*dx + dy*dy;
}

void prostMnogougao(vector<Tacka>& tacke) {
  // trazimo tacku sa maksimalnom x koordinatom,
  // u slucaju da ima vise tacaka sa maksimalnom x koordinatom
  // biramo onu sa najmanjom y koordinatom
  auto max = max_element(begin(tacke), end(tacke),
                         [](const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
                           return t1.x < t2.x ||
                                  (t1.x == t2.x && t1.y > t2.y);
                         });
  // dovodimo je na početak niza - ona predstavlja centar kruga
  swap(*begin(tacke), *max);
  const Tacka& t0 = tacke[0];

  // sortiramo ostatak niza (tačke sortiramo na osnovu ugla koji
  // zaklapaju u odnosu vertikalnu polupravu koja polazi naviše iz
  // centra kruga), a kolinearne na osnovu rastojanja od centra kruga
  sort(next(begin(tacke)), end(tacke),
       [t0](const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
         Orijentacija o = orijentacija(t0, t1, t2);
         if (o == KOLINEARNE)
           return kvadratRastojanja(t0, t1) <= kvadratRastojanja(t0, t2);
         return o == POZITIVNA;
       });

  // obrcemo redosled tacaka na poslednjoj pravoj
  auto it = prev(end(tacke));
  while (orijentacija(*prev(it), *it, t0) == KOLINEARNE)
    it = prev(it);
  reverse(it, end(tacke));
}


int main() {
  int n;
  cin >> n;
```

```
  vector<Tacka> tacke(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x, y;
    cin >> x >> y;
    tacke[i] = Tacka(x, y);
  }
  prostMnogougao(tacke);
  for (const Tacka& t : tacke)
    cout << t.x << " " << t.y << endl;
  return 0;
}
```

Задатак: Припадност тачке конвексном многоуглу

Поставка: Напиши програм који утврђује да ли тачка припада конвексном многоуглу (ивице многоугла сматрају се његовим делом).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број темена конвексног многоугла n ($3 \leq n \leq 50000$), а затим редом темена у редоследу супротном од казаљке на сату. Свако теме се задаје у посебном реду, помоћу два цела броја раздвојена једним размаком. Након тога се задаје број m ($1 \leq m \leq 50000$) тачака чију припадност многоуглу треба испитати, а затим у наредних m редова координате тих тачака (координате су целобројне, раздвојене једним размаком).

Излаз: За сваку од m тачака на стандардни излаз у посебном реду исписати `da` ако тачка припада многоуглу тј. `ne` у супротном.

Пример

Улаз	*Излаз*
6	da
4 0	da
2 2	ne
-2 2	ne
-4 0	da
-2 -2	
2 -2	
5	
-2 2	
-3 1	
-5 1	
3 -2	
0 0	

Решење: Сваки конвексни многоугао се може поделити на троуглове тако што се повуку све дијагонале из његовог произвољног темена. Тачка припада многоуглу ако и само ако припада неком од тих троуглова. Припадност тачке троуглу већ смо анализирали у задатку Тачка у троуглу. Нагласимо да је проверу потребно мало прилагодити да би се у обзир узело то да се ивице многоугла сматрају његовим делом. Ако једна тачка лежи на датој дужи она ће се сматрати да је са исте стране те дужи као и било

која друга тачка. Такође, пошто су вредности координата у овом задатку релативно велики бројеви, потребно је приликом израчунавања векторског производа обратити пажњу на могућност настанка прекорачења.

Пошто се припадност троуглу може испитати у времену $O(1)$, а посматрамо $n-2$ троугла, сложеност испитивања припадности једне тачке је $O(n)$, док је сложеност провере за свих m тачака $O(mn)$.

Задатак можемо ефикасније решити бинарном претрагом. Свака дијагонала многоугао дели на два мања многоугао. Ако се установи да је тачка са једне стране дијагонале, знамо да она не може да припада оном од та два многоугла који лежи са супротне стране те дијагонале и потребно је испитати само да ли тачка припада оном другом многоуглу. Ако се дијагонала увек бира тако да та два многоугла имају приближно исти број темена, проблем ће се сводити на проблем истог облика, али двоструко мање димензије, што даје ефикасан алгоритам. Половљење прекидамо када остане троугао и тада проверу припадности троуглу вршимо слично као у задатку Тачка у троуглу (прилагодивши поступак томе да се ивице троугла сматрају његовим делом, као и могућности настанка прекорачења приликом израчунавања векторског производа, због релативно великих координата).

Пошто се у сваком кораку димензија проблема полови, сложеност припадности једне тачке је $O(\log n)$, док је сложеност провере за свих m тачака $O(m \log n)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <utility>

using namespace std;

typedef pair<int, int> Tacka;

enum Orijentacija {POZITIVNA, NEGATIVNA, KOLINEARNE};

Orijentacija orijentacija(Tacka a, Tacka b, Tacka c) {
  int xa = a.first, ya = a.second;
  int xb = b.first, yb = b.second;
  int xc = c.first, yc = c.second;
  long long d = (long long)(xb-xa)*(long long)(yc-ya) -
                (long long)(xc-xa)*(long long)(yb-ya);
  if (d > 0)
    return POZITIVNA;
  else if (d < 0)
    return NEGATIVNA;
  else
    return KOLINEARNE;
}

bool saIsteStrane(const Tacka& T1, const Tacka& T2,
                  const Tacka& A1, const Tacka& A2) {
```

```
  Orijentacija o1 = orijentacija(T1, T2, A1);
  Orijentacija o2 = orijentacija(T1, T2, A2);
  if (o1 == KOLINEARNE || o2 == KOLINEARNE)
    return true;
  return o1 == o2;
}

bool tackaUTrouglu(const Tacka& T1, const Tacka& T2, const Tacka& T3,
                   const Tacka& A) {
  return saIsteStrane(T1, T2, T3, A) &&
         saIsteStrane(T1, T3, T2, A) &&
         saIsteStrane(T2, T3, T1, A);
}

bool sadrzi(const vector<Tacka>& poligon, const Tacka& A, int l, int d) {
  if (d - l == 1)
    return tackaUTrouglu(poligon[0], poligon[l], poligon[d], A);
  int s = l + (d - l) / 2;
  if (orijentacija(poligon[0], poligon[s], A) == POZITIVNA)
    return sadrzi(poligon, A, s, d);
  else
    return sadrzi(poligon, A, l, s);
}

bool sadrzi(const vector<Tacka>& poligon, const Tacka& A) {
  int n = poligon.size();
  return sadrzi(poligon, A, 1, n-1);
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);

  int n;
  cin >> n;
  vector<Tacka> poligon(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    cin >> poligon[i].first >> poligon[i].second;
  }

  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    Tacka A;
    cin >> A.first >> A.second;
    if (sadrzi(poligon, A))
      cout << "da" << '\n';
    else
```

```
      cout << "ne" << '\n';
  }

  return 0;
}
```

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <utility>

using namespace std;

typedef pair<int, int> Tacka;

enum Orijentacija {POZITIVNA, NEGATIVNA, KOLINEARNE};

Orijentacija orijentacija(Tacka a, Tacka b, Tacka c) {
  int xa = a.first, ya = a.second;
  int xb = b.first, yb = b.second;
  int xc = c.first, yc = c.second;
  long long d = (long long)(xb-xa)*(long long)(yc-ya) -
                (long long)(xc-xa)*(long long)(yb-ya);
  if (d > 0)
    return POZITIVNA;
  else if (d < 0)
    return NEGATIVNA;
  else
    return KOLINEARNE;
}

bool saIsteStrane(const Tacka& T1, const Tacka& T2,
                  const Tacka& A1, const Tacka& A2) {
  Orijentacija o1 = orijentacija(T1, T2, A1);
  Orijentacija o2 = orijentacija(T1, T2, A2);
  if (o1 == KOLINEARNE || o2 == KOLINEARNE)
    return true;
  return o1 == o2;
}

bool tackaUTrouglu(const Tacka& T1, const Tacka& T2, const Tacka& T3,
                   const Tacka& A) {
  return saIsteStrane(T1, T2, T3, A) &&
         saIsteStrane(T1, T3, T2, A) &&
         saIsteStrane(T2, T3, T1, A);
}

bool sadrzi(const vector<Tacka>& poligon, const Tacka& A, int l, int d) {
  if (d - l == 1)
```

```
    return tackaUTrouglu(poligon[0], poligon[l], poligon[d], A);
  int s = l + (d - l) / 2;
  if (orijentacija(poligon[0], poligon[s], A) == POZITIVNA)
    return sadrzi(poligon, A, s, d);
  else
    return sadrzi(poligon, A, l, s);
}

bool sadrzi(const vector<Tacka>& poligon, const Tacka& A) {
  int n = poligon.size();
  return sadrzi(poligon, A, 1, n-1);
}

int main() {
  ios_base::sync_with_stdio(false); cin.tie(0);

  int n;
  cin >> n;
  vector<Tacka> poligon(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    cin >> poligon[i].first >> poligon[i].second;
  }

  int m;
  cin >> m;
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    Tacka A;
    cin >> A.first >> A.second;
    if (sadrzi(poligon, A))
      cout << "da" << '\n';
    else
      cout << "ne" << '\n';
  }

  return 0;
}
```

Задатак: Припадност тачке простом многоуглу

Поставка: Нека је дат прост многоугао (задат цикличним низом својих темена) и једна тачка P (задата својом x и y координатом). Проверити да ли се тачка налази унутар многоугла.

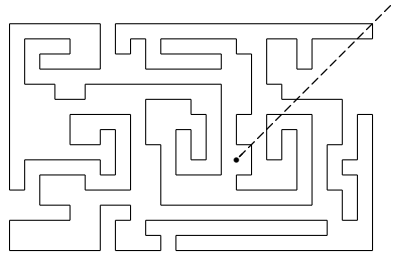
Улаз: Са стандардног улаза се уноси број темена многоугла (n). У наредних n линија се уносе по 2 вредности које представљају темена полигона. Након тога се уносе још 2 вредности које представљају темена тачке P.

Излаз: На стандардни излаз исписати “DA” уколико тачка припада многоуглу, а “NE” у супротном.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 3 -2 5 3 0 8 -5 3 -3 -2 2 2	DA

Решење: Иако на први поглед проблем не звучи тешко, ако се разматрају сложени неконвексни многоуглови (као онај на слици 5.6) проблем не делује једноставно. Проблем можемо решити тако што посматрамо произвољну полуправу са теменом у датој тачки и да видимо колико страница многоугла она сече док не достигне спољашњост многоугла. У примеру на слици 5.6, ако пратимо испрекидану линију наилазимо на шест пресека са многоуглом до достизања спољашње области. Са слике се види да већ после четири псресека стижемо ван многоугла, али рачунар то не види – зато се броји укупан број пресека полуправе са страницама многоугла. Пошто нас последњи пресек пре изласка изводи из многоугла, а претпоследњи враћа у многоугао можемо да закључимо да је у овом примеру тачка ван многоугла. Уопштено важи да је тачка у многоуглу ако и само ако је број пресека непаран.



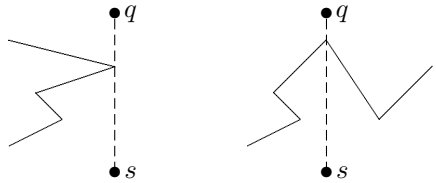
Слика 5.6: Утврђивање припадности тачке унутрашњости простог многоугла.

Када ми видимо многоугао, лако је пронаћи добар пут (онај са малим бројем пресека) до неке тачке ван многоугла. У случају многоугла датог низом координата, то није лако. Највећи део времена троши се на израчунавање пресека. Тај део посла може се битно упростити ако је полуправа коју разматрамо паралелна једној од оса – нпр. y-оси. Број пресека са овом специјалном полуправом може бити много већи него са оптималном полуправом (која сече најмањи број страница, али је није лако одредити), али је зато налажење пресека много једноставније.

Neka je S tačka van mnogougla, i neka je l duž koja spaja tačke Q i S. Cilj je utvrditi da li tačka Q pripada unutrašnjosti mnogougla P na osnovu broja preseka duži l sa ivicama mnogougla P. Međutim, duž l može se delom preklapati sa nekim ivicama mnogougla P. Ovo preklapanje očigledno ne treba brojati u preseke. Drugi specijalni slučaj je kada duž l sadrži neko teme P_i mnogougla. Na slici 5.7(a) prikazan je slučaj kad presek prave l sa

temenom ne treba brojati, a na slici 5.7(b) slučaj kad taj presek treba brojati. Postoji više načina za utvrđivanje da li neki ovakav presek treba brojati ili ne. Na primer:

- ako su dva temena mnogougla susedna temenu P_i i sa iste strane prave l, presek se ne računa. U protivnom, ako su dva susedna temena sa različitih strana prave l, presek se broji.
- s obzirom na to da razmatramo pravu koja je paralelna sa y osom, za svaku ivicu mnogougla trebalo bi uračunati recimo levo teme, a desno ne (temena klasifikujemo kao levo i desno u odnosu na vrednosti x koordinate). Time nećemo računati presek nalik onom na slici 5.7(a) jer je za obe ivice presek kroz desno teme, a presek prikazan na slici 5.7(b) hoćemo jednom, jer je za jednu od ivica koje se sustiču u tom temenu to levo teme, a za drugu desno.



Слика 5.7: Специјални случајеви када полуправа пролази кроз теме многоугла.

С обзиром да се за сваку ивицу многоугла рачуна пресек, у случају када је број ивица једнак n, сложеност алгоритма је $O(n)$.

```
#include <iostream>
#include <vector>

#define POSITIVE_ORIENTATION -1
#define COLINEAR 0
#define NEGATIVE_ORIENTATION 1

struct Point
{
  int x, y;
};

void initialize_point(Point &p, int x, int y)
{
  p.x = x;
  p.y = y;
}

int orientation(const Point &p, const Point &q, const Point &r)
{
  int d = (r.y - p.y) * (q.x - p.x) - (q.y - p.y) * (r.x - p.x);

  if (d == 0) {
```

```
    return COLINEAR;
  }
  else if (d > 0) {
    return NEGATIVE_ORIENTATION;
  }

  return POSITIVE_ORIENTATION;
}

bool inside_polygon(const std::vector<Point> &polygon, const Point &p)
{
  int n = polygon.size();

  if (n < 3)
    return false;

  int j;

  int number_of_intersects = 0;

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    j = (i + 1) % n;

    if (orientation(p, polygon[i], polygon[j]) == COLINEAR) {
      // Ukoliko su tacke kolinearne to znaci da sama tacka pripada stranici mnogou
      // Ako je tacka na stranici onda vracamo odmah true, inace idemo na sledecu s
      // nalazi van stranice i nema poklapanja poluprave i stranice pa nema potrebe
      if (p.x >= std::min(polygon[i].x, polygon[j].x) && p.x <= std::max(polygon[i]
        return true;

      continue;
    }

    // Ako poluprava prolazi kroz teme i ako se stranica nalazi sa leve strane
    if (polygon[i].x == p.x && polygon[i].y < p.y) {
      if (polygon[j].x < p.x)
        number_of_intersects++;
    }
    // Ako poluprava prolazi kroz teme i ako se stranica nalazi sa desne strane
    else if (polygon[j].x == p.x && polygon[j].y < p.y) {
      if (polygon[i].x < p.x)
        number_of_intersects++;
    }
    else if (p.x > std::min(polygon[i].x, polygon[j].x) && p.x < std::max(polygon[i
        number_of_intersects++;
  }
```

```
  return number_of_intersects % 2 == 1;
}

int main()
{
  int n;

  std::cin >> n;

  std::vector<Point> polygon(n);

  int x, y;

  Point p;

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    std::cin >> x >> y;
    initialize_point(p, x, y);
    polygon[i] = p;
  }

  std::cin >> x >> y;
  initialize_point(p, x, y);

  if (inside_polygon(polygon, p))
    std::cout << "DA\n";
  else
    std::cout << "NE\n";

  return 0;
}
```

Задатак: Конвексни омотач

Поставка: Потребно је оградити воћњак тако што ће се везати трака за нека стабла, тако да се након што трака обиђе пун круг сва стабла наћи унутар траке. Напиши програм који одређује за која стабла ће трака бити завезана.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број стабала n ($1 \leq n \leq 50000$), а затим у наредних n редова координате n стабала (два цела броја између -10^6 и 10^6, раздвојена размаком).

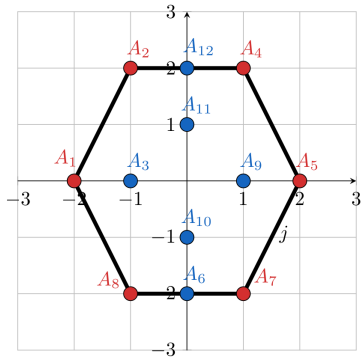
Излаз: На стандардни излаз исписати број стабала за које ће бити везана трака, а затим, редом координате стабала за које се трака везује (ако су нека стабла колинеарна, траку је потребно везати само за она крајња од њих).

Пример

Улаз	*Излаз*
12	6
-2 0	2 0
-1 2	1 2
-1 0	-1 2
1 2	-2 0
2 0	-1 -2
0 -2	1 -2
1 -2	
-1 -2	
1 0	
0 -1	
0 1	
0 2	

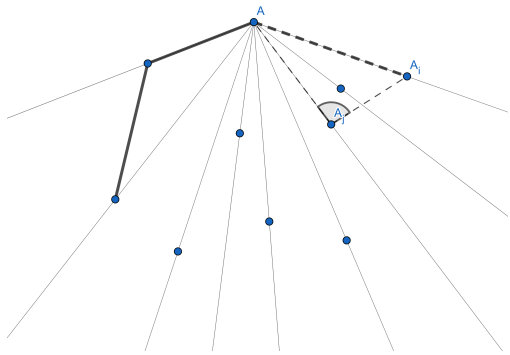
Објашњење

Положај стабала је приказан на слици. Трака се везује за стабла која су посебно означена.



Слика 5.8: Конвексни омотач

Решење: Задатак можемо решити и "алгоритмом увијања поклона" (он се некада назива и Џарвисов марш). Идеја је да изградњу конвексног омотача започнемо од неког екстремног темена (на пример, левог, доњег) и да у сваком кораку у омотач додамо наредну дуж која је део коначног конвексног омотача. Одређивање наредне дужи вршимо грубом силом. Њено једно теме је последња тачка до сада одређеног дела конвексног омотача. Да бисмо одредили друго теме, анализирамо све тачке и тражимо ону која даје дуж која са претходном дужи гради што већи угао (у полазном случају нема претходне дужи, па тражимо тачку која даје највећи угао са негативним делом осе y). Рецимо и да нема потребе за експлицитним рачунањем углова. Наиме, ако је претходно теме A, тада тачка A_i заклапа већи угао од тачке A_j ако и само ако је оријентација тројке $A_i A_j A$ позитивна. Потребно је још обратити пажњу на случај колинеарних тачака. Наиме, ако постоји више тачака које одређују максимални угао, тада се на тој полуправој узима она која је најдаља од претходног темена A. Поступак се завршава када се установи да је тачка која одређује највећи угао једнака почетној.



Слика 5.9: Увијање поклона

Овај алгоритам спада у групу алгоритама чија сложеност зависи од димензије излаза (а не само улаза). За додавање сваке нове излазне тачке обилазимо све улазне тачке па је сложеност $O(nm)$, где је n број улазних, а m број излазних тачака.

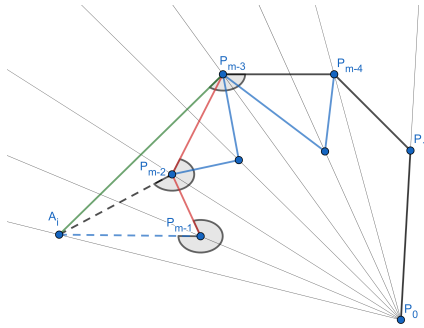
```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

// tacka je zadata svojim dvema koordinatama
struct Tacka {
  int x, y;
};

enum Orijentacija { POZITIVNA, NEGATIVNA, KOLINEARNE };

Orijentacija orijentacija(const Tacka& t0, const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
  long long d = (long long)(t1.x-t0.x)*(long long)(t2.y-t0.y) -
                (long long)(t2.x-t0.x)*(long long)(t1.y-t0.y);
  if (d > 0)
    return POZITIVNA;
  else if (d < 0)
    return NEGATIVNA;
  else
    return KOLINEARNE;
}

bool izmedju(const Tacka& t1, const Tacka& t2, const Tacka& t3) {
  return (t1.x < t2.x && t2.x < t3.x) ||
         (t1.x > t2.x && t2.x > t3.x) ||
         (t1.x == t2.x && t2.x == t3.x && t1.y < t2.y && t2.y < t3.y) ||
```

```
        (t1.x == t2.x && t2.x == t3.x && t1.y > t2.y && t2.y > t3.y);
}

vector<Tacka> konveksniOmotac(vector<Tacka>& tacke) {
  vector<Tacka> omotac;
  auto cmp = [] (const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
    return t1.x < t2.x || (t1.x == t2.x && t1.y < t2.y);
  };
  int prva = distance(begin(tacke), min_element(begin(tacke), end(tacke), cmp));
  int tekuca = prva;
  do {
    omotac.push_back(tacke[tekuca]);
    int naredna = 0;
    for (size_t i = 1; i < tacke.size(); i++) {
      Orijentacija o = orijentacija(tacke[tekuca], tacke[naredna], tacke[i]);
      if (naredna == tekuca ||
          o == POZITIVNA ||
          (o == KOLINEARNE && izmedju(tacke[tekuca], tacke[naredna], tacke[i])))
        naredna = i;
    }
    tekuca = naredna;
  } while (tekuca != prva);
  return omotac;
}


int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<Tacka> tacke(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> tacke[i].x >> tacke[i].y;
  vector<Tacka> omotac = konveksniOmotac(tacke);
  cout << omotac.size() << endl;
  for (const Tacka& t : omotac)
    cout << t.x << " " << t.y << endl;
  return 0;
}
```

Задатак ефикасно можемо решити Грахамовим алгоритмом. Прва фаза претпоставља конструкцију неког простог многоугла чија су темена дати скуп тачака. Нека су тачке тог многоугла редом $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$. Ако се прост полигон конструише уобичајеним алгоритмом, његово прво теме A_0 ће бити крајње лево, доње теме и оно је сигурно екстремно. Обилазак вршимо у редоследу темена простог многоугла и претпостављамо да у сваком тренутку обиласка знамо и многоугао $P_0P_1 \ldots P_m$, који је део конвексни омотач до тог тренутка обрађених темена простог многоугла. Конвексни омотач полазне тачке A_0 је она сама, док је конвексни омотач прва два темена $\{A_0, A_1\}$ ивица A_0A_1 која их спаја. Зато обраду прве две тачке вршимо просто тако што те две тачке

додамо на почетак конвексног омотача тј. $P_0 = A_0$ и $P_1 = A_1$. Након тога, обрађујемо редом тачке A_i. Претпоставимо да је конвексни омотач тачака $A_0A_1 \dots A_{i-1}$ полигон $P_0P_1 \dots P_{m-1}$. Конвексни омотач скупа $\{A_0, A_1, \dots, A_i\}$ се састоји од неког почетног дела полигона $P_0P_1 \dots P_m$ проширеног тачком A_i. Неке од завршних тачака полигона $P_0P_1 \dots P_{m-1}$ неће више бити део конвексног омотача и оне се избацују. Тачка P_{m-1} није део конвексног омотача ако тројка $P_{m-2}P_{m-1}A_i$ није позитивно оријентисана. Ако се то установи, тада се тачка P_{m-1} уклања из конвексног омотача и исто се проверава за тачке, P_{m-2}, P_{m-3} и тако даље, све док се или не пронађе нека тачка код које је одговарајућа тројка позитивно оријентисана (тројка $P_0P_1A_i$ ће увек бити позитивно оријентисана).

На слици је приказана ситуација када се пре додавања тачке A_i из конвексног омотача уклањају две раније додате тачке.



Слика 5.10: Грахамов алгоритам

Сложеношћу алгоритма доминира изградња простог полигона (у њој се врши сортирање и та фаза је сложености $O(n \log n)$. Након тога, одређивање тачака које су део омотача је сложености $O(n)$ (иако постоји петља у петљи, свака тачка се обрађује једном и може највише једном бити додата и највише једном уклоњена из текућег конвексног омотача).

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

// tacka je zadata svojim dvema koordinatama
struct Tacka {
  int x, y;
};

enum Orijentacija { POZITIVNA, NEGATIVNA, KOLINEARNE };

Orijentacija orijentacija(const Tacka& t0, const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
```

```
  long long d = (long long)(t1.x-t0.x)*(long long)(t2.y-t0.y) -
                (long long)(t2.x-t0.x)*(long long)(t1.y-t0.y);
  if (d > 0)
    return POZITIVNA;
  else if (d < 0)
    return NEGATIVNA;
  else
    return KOLINEARNE;
}

long long kvadratRastojanja(const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
  int dx = t1.x - t2.x, dy = t1.y - t2.y;
  return dx*dx + dy*dy;
}

void prostMnogougao(vector<Tacka>& tacke) {
  // trazimo tacku sa maksimalnom x koordinatom,
  // u slucaju da ima vise tacaka sa maksimalnom x koordinatom
  // biramo onu sa najmanjom y koordinatom
  auto max = max_element(begin(tacke), end(tacke),
                         [](const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
                           return t1.x < t2.x ||
                                  (t1.x == t2.x && t1.y > t2.y);
                         });
  // dovodimo je na početak niza - ona predstavlja centar kruga
  swap(*begin(tacke), *max);
  const Tacka& t0 = tacke[0];

  // sortiramo ostatak niza (tačke sortiramo na osnovu ugla koji
  // zaklapaju u odnosu vertikalnu polupravu koja polazi naviše iz
  // centra kruga), a kolinearne na osnovu rastojanja od centra kruga
  sort(next(begin(tacke)), end(tacke),
       [t0](const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
         Orijentacija o = orijentacija(t0, t1, t2);
         if (o == KOLINEARNE)
           return kvadratRastojanja(t0, t1) <= kvadratRastojanja(t0, t2);
         return o == POZITIVNA;
       });

  // obrcemo redosled tacaka na poslednjoj pravoj
  auto it = prev(end(tacke));
  while (orijentacija(*prev(it), *it, t0) == KOLINEARNE)
    it = prev(it);
  reverse(it, end(tacke));
}

vector<Tacka> konveksniOmotac(vector<Tacka>& tacke) {
```

```
  vector<Tacka> omotac;
  prostMnogougao(tacke);
  omotac.push_back(tacke[0]);
  omotac.push_back(tacke[1]);
  for (size_t i = 2; i < tacke.size(); i++) {
    while (omotac.size() >= 2 &&
           orijentacija(omotac[omotac.size()-2],
                        omotac[omotac.size()-1],
                        tacke[i]) != POZITIVNA)
      omotac.pop_back();
    omotac.push_back(tacke[i]);
  }
  return omotac;
}


int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<Tacka> tacke(n);
  for (int i = 0; i < n; i++)
    cin >> tacke[i].x >> tacke[i].y;
  vector<Tacka> omotac = konveksniOmotac(tacke);
  cout << omotac.size() << endl;
  for (const Tacka& t : omotac)
    cout << t.x << " " << t.y << endl;
  return 0;
}
```