Geometrijski algoritmi

Geometrijski algoritmi igraju važnu ulogu u mnogim oblastima, poput računarske grafike, projektovanja pomoću računara (CAD/CAM), projektovanju integrisanih kola visoke rezolucije (VLSI), geografskih informacionih sistema, robotike i baza podataka. Naime, geometrijski algoritmi predstavljaju kamen temeljac računarske grafike i računarskog vida. U robotici geometrijski algoritmi se koriste za planiranje kretanja robota, za detekciju sudara i optimizaciju putanja, dok se u oblasti baza podataka koriste za optimizaciju upita. Primetimo da u računarski generisanoj slici može biti na hiljade ili čak na milione tačaka, linija, kvadrata ili krugova; slično, projektovanje kompjuterskog čipa može da zahteva rad sa milionima geometrijskih objekata. Pošto veličina ulaza kod ovih problema može biti vrlo velika, veoma je značajno razviti što efikasnije algoritme za njihovo rešavanje. Pored tendencije da dođemo do najboljeg algoritma u terminima asimptotske složenosti, vodićemo računa i o svakoj pojedinačnoj operaciji.

U nastavku ćemo razmotriti nekoliko osnovnih geometrijskih algoritama — onih koji se mogu koristiti kao elementi za izgradnju složenijih algoritama. Razmatraćemo kolekcije geometrijskih objekata u ravni; objekti sa kojima se radi su tačke, prave, duži i mnogouglovi. Pretpostavićemo da su svi objekti zadati korišćenjem koordinata u ravni. *Tačka* P u ravni predstavlja se parom koordinata (x, y). *Prava* je predstavljena parom različitih tačaka P i Q koje joj pripadaju. *Duž* se takođe zadaje parom tačaka P i Q koje predstavljaju krajeve te duži, i označavaćemo je sa PQ. *Put* P je niz tačaka P_1, $P_2, \ldots, P_k$ i duži P_1P_2, $P_2P_3, \ldots, P_{k-1}P_k$ koje ih povezuju. Duži koje čine put su njegove *stranice* (*ivice*). *Zatvoreni put* je put čija se poslednja tačka poklapa sa prvom i nazivamo ga *mnogougao* ili *poligon*. Tačke koje definišu mnogougao su njegova *temena*. Na primer, trougao je mnogougao sa tri temena. Mnogougao se predstavlja nizom, a ne skupom tačaka, jer je bitan redosled kojim se tačke zadaju; promenom redosleda tačaka iz istog skupa u opštem slučaju dobija se drugi mnogougao. *Prost mnogougao* je onaj kod koga odgovarajući put nema preseka sa samim sobom; drugim rečima, jedine stranice koje imaju zajedničke tačke su susedne stranice sa svojim zajedničkim temenom. Prost mnogougao ograničava jednu oblast u ravni, *unutrašnjost* mnogougla. *Konveksni mnogougao* je mnogougao čija unutrašnjost sa svake dve tačke koje sadrži, sadrži i sve tačke duži koje te tačke određuju (ekvivalentno, mnogougao je konveksan ako su mu svi unutrašnji uglovi manji ili jednaki 180°). *Konveksni put* je put sastavljen od tačaka P_1, $P_2, \ldots, P_k$ takav da je mnogougao $P_1P_2 \ldots P_k$ konveksan.

Česta neugodna karakteristika geometrijskih problema je postojanje mnogih specijalnih slučajeva. Na primer, dve prave u ravni obično se seku u jednoj tački, sem ako su paralelne ili se poklapaju. Pri rešavanju problema sa dve prave, moraju se predvideti sva tri moguća slučaja. Složeniji objekti prouzrokuju pojavu mnogo većeg broja specijalnih slučajeva, o kojima treba voditi računa. Obično se

većina tih specijalnih slučajeva neposredno rešava, ali potreba da se oni uzmu u obzir čini ponekad konstrukciju geometrijskih algoritama vrlo iscrpljujućom. Mi ćemo ponekad ignorisati detalje koji nisu od suštinskog značaja za razumevanje osnovnih ideja algoritama, ali čitaocu savetujemo da razmotri rešavanje svakog od specijalnih slučajeva na koji se pri konstrukciji algoritma naiđe.

Osnovni algoritmi

Pretpostavlja se da je čitalac upoznat sa osnovama analitičke geometrije. U nastavku ćemo razmotriti neka osnovna pitanja na koja se nailazi prilikom konstrukcije gotovo svakog geometrijskog algoritma, kao što je izračunavanje rastojanja između dve tačke, ispitivanje kolinearnosti tri tačke ili izračunavanje presečne tačke dveju duži. Sve ove operacije mogu se izvesti u konstantnoj vremenskoj složenosti, korišćenjem osnovnih aritmetičkih operacija. Pri tome, na primer, pretpostavljamo da se kvadratni koren broja može izračunati za konstantno vreme.

Skalarni i vektorski proizvod

Data su dva vektora $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ i $\vec{b}(b_1, \ldots, b_n)$ iste dimenzije. Njihov *skalarni proizvod* je skalar čiju vrednost računamo po formuli:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

Ukoliko su koordinate vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ celobrojne, i vrednost skalarnog proizvoda biće celobrojna.

```
// funkcija koja racuna skalarni proizvod dva vektora
int skalarniProizvod(vector<int> a, vector<int> b){
  // racunamo dimenziju vektora
  int n = a.size();
  // racunamo skalarni proizvod
  int proizvod = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++)
    proizvod += a[i] * b[i];
  return proizvod;
}

int main(){
  vector<int> a = {2,2};
  vector<int> b = {3,4};
  cout << "Skalarni proizvod vektora a i b je: "
       << skalarniProizvod(a,b) << endl;
  return 0;
}
```

U daljem tekstu ćemo razmatrati vektore određene tačkama u ravni, te će dimenzija vektora biti jednaka 2. Skalarni proizvod vektora $\vec{a}(a_x, a_y)$ i vektora $\vec{b}(b_x, b_y)$ dimenzije 2 jednak je $\vec{a} \circ \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Važi naredna formula:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

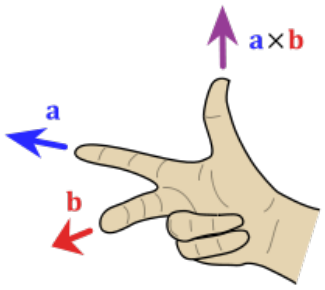
gde je sa $|\vec{a}|$ označen intenzitet vektora $\vec{a}$, a sa α ugao koji zaklapaju ova dva vektora. Na osnovu ove formule moguće je izračunati:

- intenzitet, tj. dužinu vektora $\vec{a}$, na osnovu formule $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \circ \vec{a}$, jer je $\cos 0° = 1$.
- ugao α između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, na osnovu formule $\alpha = \arccos \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Vektorski proizvod vektora $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ i $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ dimenzije 3 je vektor ortogonalan na ravan određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, čiji je smer određen pravilom desne ruke (slika 1), a intenzitet jednak površini paralelograma koji određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno može se izračunati po formuli:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

gde je sa α označen manji od uglova koji obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Slika 1: Pravilo desne ruke: ako kažiprst i srednji prst pokazuju redom u smeru vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, palac će određivati smer njihovog vektorskog proizvoda $\vec{a} \times \vec{b}$.

Neka je:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

gde su sa $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ označeni jedinični vektori u smeru x, y i z koordinatne ose. Važi:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k} \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

Ova formula se može zapisati u obliku naredne determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

u čijoj se prvoj vrsti nalaze jedinični vektori u smeru x, y i z ose, u drugoj vrsti koordinate vektora $\vec{a}$, a u trećoj koordinate vektora $\vec{b}$. Ukoliko su koordinate vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ celobrojne, i koordinate vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ biće celobrojne.

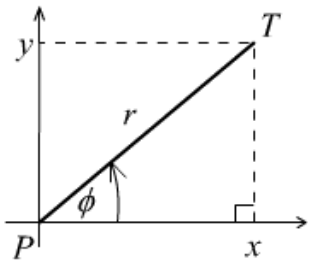
```
// funkcija koja racuna vektorski proizvod p vektora a i b
// u trodimenzionom prostoru
void vektorskiProizvod(vector<int> a, vector<int> b, vector<int>& p){
  p[0] = a[1]*b[2] - a[2]*b[1];
  p[1] = a[2]*b[0] - a[0]*b[2];
  p[2] = a[0]*b[1] - a[1]*b[0];
}

int main(){
  vector<int> a = {3,3,-4};
  vector<int> b = {1,-2,5};
  vector<int> proizvod(3);
  vektorskiProizvod(a,b,proizvod);
  cout << "Vektorski proizvod vektora a i b je: (" ;
  for(int i = 0; i < 3; i++)
    cout << proizvod[i] << " ";
  cout << ")" << endl;
  return 0;
}
```

Polarne koordinate

Nekada je za date Dekartove koordinate x i y tačke T potrebno odrediti njene polarne koordinate: rastojanje r od koordinatnog početka P i ugao ϕ koji vektor $\overrightarrow{PT}$ zahvata sa pozitivnim delom x ose i, obratno, na osnovu polarnih koordinata odrediti Dekartove (slika 2).

Da bismo transformisali polarne koordinate u Dekartove, možemo iskoristiti narednu vezu:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned}$$



Slika 2: Veza između Dekartovih i polarnih koordinata tačke.

dok za transformaciju Dekartovih koordinata u polarne, možemo iskoristiti naredne jednačine:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

```
// transformacija Dekartovih koordinata u polarne
void dekartoveUPolarne(double x, double y, double &r, double &ugao){
  r = sqrt((pow(x,2)) + (pow(y,2)));
  ugao = atan2(y,x);
}

// transformacija polarnih u dekartove koordinate
void polarneUDekartove(double r, double ugao, double &x, double &y){
  x = r * cos(ugao);
  y = r * sin(ugao);
}

int main(){
  double x, y, r, ugao;
  cout << "Unesi Dekartove koordinate tacke" << endl;
  cin >> x >> y;
  // transformisemo Dekartove koordinate polazne tacke
  // u polarne koordinate
  dekartoveUPolarne(x,y,r,ugao);
  cout << "Polarne koordinate te tacke su r: "
       << r << " ugao: " << ugao << endl;

  double x1, y1;
  // transformisemo dobijene polarne koordinate u Dekartove
  // proveravamo da li smo dobili polazne koordinate
  polarneUDekartove(r,ugao,x1,y1);
  cout << "Dekartove koordinate te tacke su x:"
       << x1 << " y: " << y1 << endl;
```

```
  return 0;
}
```

Površina trougla

Problem: Dat je trougao ABC koordinatama svojih temena. Izračunati njegovu površinu.

Razmotrićemo nekoliko različitih načina na koje možemo rešiti ovaj problem.

Heronov obrazac Jedan način da izračunamo površinu trougla je primenom Heronovog obrasca koji glasi:

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

gde su sa a, b i c označene dužine stranica trougla, a sa $s = (a+b+c)/2$ njegov poluobim. Dužinu stranice trougla možemo izračunati kao rastojanje između njena dva temena.

Tačku ćemo nadalje predstavljati strukturom koja sadrži dve komponente: x i y koordinatu koje su realni brojevi. Alternativno, tačku bismo mogli da predstavimo uređenim parom dva realna broja `pair<double,double>`.

```
// tacku u ravni predstavljamo njenom x i y koordinatom
struct Tacka{
  double x;
  double y;
};

// rastojanje izmedju tacaka
double rastojanje(Tacka A, Tacka B) {
  double dx = B.x - A.x;
  double dy = B.y - A.y;
  return sqrt(dx * dx + dy * dy);
}

// povrsina trougla za zadate duzine stranica,
// izracunata koriscenjem Heronovog obrasca
double povrsinaTrougla(double a, double b, double c) {
  double s = (a + b + c) / 2;
  return sqrt(s * (s - a) * (s - b) * (s - c));
}

int main() {
  Tacka A, B, C;
  cout << "Unesi koordinate tacaka A, B i C" << endl;
  cin >> A.x >> A.y >> B.x >> B.y >> C.x >> C.y;
```

```
  // racunamo duzine stranica trougla
  double a = rastojanje(B, C);
  double b = rastojanje(A, C);
  double c = rastojanje(A, B);

  // racunamo povrsinu trougla
  double P = povrsinaTrougla(a, b, c);
  cout << "Povrsina trougla je: " << P << endl;
  return 0;
}
```

Primetimo da ovo rešenje podrazumeva veći broj operacija računanja kvadratnog korena, kako za izračunavanje dužina stranica trougla, tako i za primenu samog Heronovog obrasca.

Svođenje na površinu paralelograma Drugi način da dođemo do površine trougla ABC jeste korišćenjem činjenice da je intenzitet vektorskog proizvoda vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ jednak površini paralelograma koji oni obrazuju. Pošto je naš trougao upravo polovina tog paralelograma, njegova površina jednaka je polovini intenziteta vektorskog proizvoda. Koordinate x i y vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ moguće je izračunati oduzimanjem koordinata tačke A od koordinata tačaka B i C. Možemo pretpostaviti da naš trougao leži u ravni xOy, te je z koordinata ovih vektora jednaka 0. Vektorski proizvod vektora $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ i $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ jednak je vrednosti naredne determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \tag{1}$$

Jedan način da se implementira površina trougla preko vektorskog proizvoda jeste da se iskoristi funkcija koja izračunava vektorski proizvod proizvoljna dva vektora dimenzije 3 i da se zatim izračuna njegov intenzitet.

```
// duzina (intenzitet) vektora u
double duzinaVektora(vector<double> u) {
  return sqrt(u[0] * u[0] + u[1] * u[1] + u[2] * u[2]);
}

// funkcija koja racuna vektorski proizvod p vektora a i b
// u trodimenzionom prostoru
void vektorskiProizvod(vector<double> a, vector<double> b,
                       vector<double>& p){
  p[0] = a[1] * b[2] - a[2] * b[1];
  p[1] = a[0] * b[2] - a[2] * b[0];
  p[2] = a[0] * b[1] - a[1] * b[0];
}
```

```
// povrsina trougla zadatog temenima A, B i C
double povrsinaTrougla(Tacka A, Tacka B, Tacka C) {
  // vektor AB
  vector<double> AB;
  AB.push_back(B.x - A.x);
  AB.push_back(B.y - A.y);
  AB.push_back(0);
  // vektor AC
  vector<double> AC;
  AC.push_back(C.x - A.x);
  AC.push_back(C.y - A.y);
  AC.push_back(0);
  // vektorski proizvod v = AB x AC
  vector<double> v(3);
  vektorskiProizvod(AB, AC, v);
  // povrsina je polovina intenziteta vektorskog proizvoda
  return duzinaVektora(v) / 2.0;
}

int main() {
  Tacka A, B, C;
  cout << "Unesi koordinate tacaka A, B i C" << endl;
  cin >> A.x >> A.y >> B.x >> B.y >> C.x >> C.y;

  // povrsina trougla
  double P = povrsinaTrougla(A, B, C);
  cout << "Povrsina trougla je: " << P << endl;
  return 0;
}
```

Pošto je u ovoj situaciji potrebno izračunati vektorski proizvod vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ koji leže u ravni xOy, tj. dva vektora kojima su z koordinate jednake nuli, izračunavanje je moguće optimizovati. Naime, rezultat će biti vektor normalan na ravan xOy, tj. koordinate x i y vektora biće jednake nuli. Intenzitet ovog vektora biće jednak apsolutnoj vrednosti koordinate z koja je po formuli (1) jednaka $x_1y_2 - y_1x_2$, pri čemu su (x_1, y_1) koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$, a (x_2, y_2) koordinate vektora $\overrightarrow{AC}$. Zamenom koordinata vektora u jednačinu dobijamo:

$$\frac{|(b_x - a_x)(c_y - a_y) - (b_y - a_y)(c_x - a_x)|}{2}$$

tj.

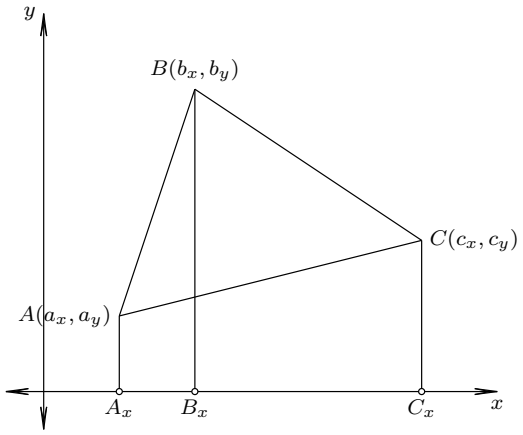
$$\frac{|b_xc_y - a_xc_y - b_xa_y - b_yc_x + a_yc_x + a_xb_y|}{2}$$

```
double povrsinaTrougla(Tacka A, Tacka B, Tacka C) {
  return abs(B.x*C.y - A.x*C.y - B.x*A.y
```

```
            - B.y*C.x + A.y*C.x + A.x*B.y)/2.0;
}
```

Napomenimo da je rešenje zasnovano na vektorskom proizvodu mnogo bolje nego ono zasnovano na Heronovom obrascu, jer koristi samo osnovne aritmetičke operacije (a ne i korenovanje).

Svođenje na površine trapeza Treći način dolaska do rešenja je da se površina trougla iskaže kao razlika površina određenih trapeza. Na primer, ako važi raspored $a_x < b_x < c_x$, i ako su A_x, B_x i C_x redom projekcije tačaka A, B i C na x-osu, tada je površina trougla ABC jednaka razlici između zbira površina pravouglih trapeza AA_xB_xB, BB_xC_xC i površine pravouglog trapeza AA_xC_xC (slika 3).



Slika 3: Površina trougla izražena preko površina trapeza.

Površina trapeza AA_xB_xB jednaka je proizvodu dužine njegove srednje linije i dužine njegove visine. Dužina osnovice A_xA jednaka je apsolutnoj vrednosti koordinate a_y, dužina osnovice B_xB jednaka je apsolutnoj vrednosti koordinate b_y dok je dužina visine jednaka apsolutnoj vrednosti razlike koordinata b_x i a_x. Tako da je površina tog trapeza jednaka

$$\frac{|b_x - a_x|(|a_y| + |b_y|)}{2} \tag{2}$$

Na sličan način mogu se izvesti i formule za druga dva trapeza.

Analizom mogućih rasporeda tačaka, može se pokazati da će se ispravan rezultat dobiti i ako se posmatra takozvana označena površina trapeza, koja isključuje računanje apsolutne vrednosti u formuli (2) i dopušta negativne dužine i površine. Naime, označena površina trougla ABC biće jednaka zbiru označenih površina tri

pomenuta pravougla trapeza (AA_xB_xB, BB_xC_xC i CC_xA_xA), a prava površina trougla biće jednaka njenoj apsolutnoj vrednosti. Označene površine ovih trapeza dobijaju se tako što se u prethodno izvedenim formulama za njihovu površinu zanemare apsolutne vrednosti i jednake su redom $\frac{(b_x-a_x)(b_y+a_y)}{2}$, $\frac{(c_x-b_x)(c_y+b_y)}{2}$ i $\frac{(a_x-c_x)(a_y+c_y)}{2}$, tako da se površina trougla dobija formulom:

$$\frac{|(b_x - a_x)(b_y + a_y) + (c_x - b_x)(c_y + b_y) + (a_x - c_x)(a_y + c_y)|}{2} \tag{3}$$

```
// funkcija racuna oznacenu povrsinu pravouglog trapeza
// koji odredjuju tacke M, N i njihove projekcije na x-osu
double povrsinaTrapeza(Tacka M, Tacka N) {
  return (N.x - M.x) * (M.y + N.y);
}

// povrsina trougla zadatog temenima A, B, C
double povrsinaTrougla(Tacka A, Tacka B, Tacka C) {
  return abs(povrsinaTrapeza(A, B) +
             povrsinaTrapeza(B, C) +
             povrsinaTrapeza(C, A)) / 2.0;
}
```

Izraz iz formule (3) možemo srediti i dobijamo da je površina trougla jednaka:

$$\frac{|b_xa_y - a_xb_y + c_xb_y - b_xc_y + a_xc_y - c_xa_y|}{2}$$

Primetimo da smo na ovaj način dobili potpuno istu formulu kao kada smo površinu trougla računali pomoću vektorskog proizvoda. Ova formula se nekada naziva *pravilo pertle* (eng. shoelace formula). Zaista, ako napišemo koordinate tačaka u narednom obliku

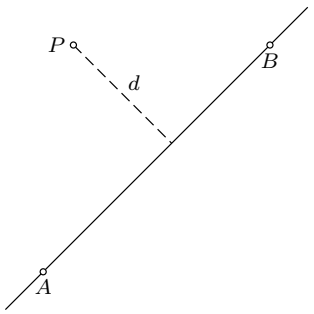
$$\begin{matrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ a_x & a_y \end{matrix}$$

formula se gradi tako što se sa jednim znakom uzimaju proizvodi odozgo-naniže, sleva-udesno (to su a_xb_y, b_xc_y i c_xa_y), dok se sa suprotnim znakom uzimaju proizvodi odozdo-naviše, sleva udesno (to su a_xc_y, c_xb_y i b_xa_y), što, kada se nacrta, zaista podseća na cik-cak vezivanje pertli.

```
double povrsinaTrougla(Tacka A, Tacka B, Tacka C) {
  // pertle (cik-cak)
  return abs(A.x*B.y + B.x*C.y + C.x*A.y
             - A.x*C.y - C.x*B.y - B.x*A.y) / 2.0;
}
```

Rastojanje tačke od prave

Problem: Odrediti rastojanje d tačke P od prave određene tačkama A i B (slika 4).



Slika 4: Rastojanje tačke od prave.

Površina trougla sa temenima P, A i B može se izračunati na dva načina: ona je s jedne strane jednaka $\frac{|\overrightarrow{AB}|\cdot d}{2}$ i istovremeno je jednaka $\frac{|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}|}{2}$. Stoga rastojanje d možemo izračunati na osnovu jednačine:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

Alternativno, mogli smo odrediti i implicitnu jednačinu prave p kroz tačke A i B ($ax + by + c = 0$) a zatim izračunati rastojanje tačke $P(x_0, y_0)$ od prave p po formuli:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Kolinearnost tačaka

Problem: Date su tri tačke u ravni svojim koordinatama $A(a_x, a_y)$, $B(b_x, b_y)$ i $C(c_x, c_y)$. Utvrditi da li su one kolinearne.

Računanje nagiba pravih Tri tačke su kolinearne ukoliko je nagib prave određene tačkama A i B jednak nagibu prave određene tačkama A i C. Nagib prave određene tačkama A i B jednak je količniku razlike njihovih y i x koordinata: $k_{AB} = \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x}$. Slično, $k_{AC} = \frac{c_y - a_y}{c_x - a_x}$. Dakle, tačke će biti kolinearne ukoliko važi:

$$\frac{b_y - a_y}{b_x - a_x} = \frac{c_y - a_y}{c_x - a_x}$$

odnosno:

$$(b_y - a_y) \cdot (c_x - a_x) = (c_y - a_y) \cdot (b_x - a_x)$$

```
// tacku u ravni predstavljamo njenom x i y koordinatom
struct Tacka{
  int x;
  int y;
};

// ispituje se kolinearnost tacaka
// razmatranjem nagiba po dve tacke
void kolinearne(Tacka A, Tacka B, Tacka C){
  if ((B.y - A.y) * (C.x - A.x) == (C.y - A.y) * (B.x - A.x))
    cout << "Kolinearne su" << endl;
  else
    cout << "Nisu kolinearne" << endl;
}

int main(){
  Tacka A, B, C;
  cout << "Unesi koordinate tacaka A, B i C" << endl;
  cin >> A.x >> A.y >> B.x >> B.y >> C.x >> C.y;
  kolinearne(A, B, C);
  return 0;
}
```

Primetimo da smo prilikom ispitivanja kolinearnosti tačaka vrednosti odgovarajućih izraza poredili na jednakost operatorom `==`. Ovo je korektno u slučaju kada su koordinate tačaka (a samim tim i vrednosti koje poredimo) celobrojne. Ukoliko bi koordinate tačaka bile realni brojevi, onda bi poređenje na jednakost trebalo zameniti proverom da li je apsolutna vrednost razlike vrednosti datih izraza manja od vrednosti ϵ, gde je ϵ neka mala pozitivna vrednost.

Računanje površine trougla Drugi način da ispitamo kolinearnost datih tačaka bi se zasnivao na narednom tvrđenju: tri tačke pripadaju istoj pravoj ako je površina trougla određenog ovim trima tačkama jednaka 0. Na osnovu prethodnih razmatranja, znamo da se površina P trougla ABC može izračunati po formuli:

$$P = \frac{|b_x a_y - a_x b_y + c_x b_y - b_x c_y + a_x c_y - c_x a_y|}{2}$$

Ukoliko su koordinate tačaka celobrojne, vrednost $2P$ je takođe celobrojna i jednaka je 0 ako i samo ako su tačke kolinearne, te ćemo u narednoj implementaciji pretpostaviti da temena trougla imaju celobrojne koordinate i računaćemo dvostruku označenu površinu trougla (bez deljenja sa 2 i računanja apsolutne vrednosti).

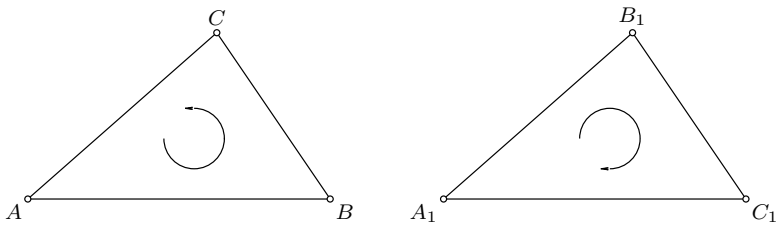
```
// funkcija za izracunavanje dvostruke oznacene povrsine trougla
// ako su zadata njegova temena
int dvostrukaOznacenaPovrsina(Tacka A, Tacka B, Tacka C){
```

```
  return B.x*A.y - A.x*B.y + C.x*B.y
         - B.x*C.y + A.x*C.y - C.x*A.y;
}

// funkcija koja utvrdjuje da li su tacke kolinearne ili ne
void kolinearne(Tacka A, Tacka B, Tacka C){
   int P = dvostrukaOznacenaPovrsina(A, B, C);
   if (P == 0)
        cout << "Kolinearne su" << endl;
   else
        cout << "Nisu kolinearne" << endl;
}
```

Orijentacija

Uređena trojka tačaka u ravni može biti kolinearna ili imati:

- orijentaciju u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na časovniku – matematički pozitivna orijentacija (slika 5a)
- orijentaciju u smeru kretanja kazaljke na časovniku – matematički negativna orijentacija (slika 5b)



Slika 5: a) Trougao ABC ima matematički pozitivnu orijentaciju. b) Trougao $A_1B_1C_1$ ima matematički negativnu orijentaciju.

Važe naredna svojstva:

- ako uređena trojka A, B, C ima pozitivnu (negativnu) orijentaciju, onda i uređena trojka B, C, A ima pozitivnu (negativnu) orijentaciju;
- ako uređena trojka A, B, C ima pozitivnu (negativnu) orijentaciju, onda uređena trojka B, A, C ima negativnu (pozitivnu) orijentaciju.

Problem: Za dati trougao ABC odrediti njegovu orijentaciju.

Važi naredno tvrđenje: trougao ABC ima pozitivnu orijentaciju ako vektorski proizvod vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ ima pozitivnu vrednost.

S obzirom na to da temena A, B i C pripadaju ravni Oxy, i vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$

pripadaju ovoj ravni, odnosno imaju koordinate $\overrightarrow{AB}(x_1, y_1, 0)$ i $\overrightarrow{AC}(x_2, y_2, 0)$. Njihov vektorski proizvod biće vektor upravan na ravan Oxy, odnosno vektor sa koordinatama $(0, 0, z)$. Stoga će njegov intenzitet biti jednak apsolutnoj vrednosti koordinate z koja je jednaka $x_1y_2 - y_1x_2$. Dakle, ako su koordinate temena $A(a_x, a_y, 0)$, $B(b_x, b_y, 0)$ i $C(c_x, c_y, 0)$ orijentaciju trougla ABC određujemo na osnovu znaka z koordinate vektorskog proizvoda $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, odnosno na osnovu vrednosti izraza:

$$d = (b_x - a_x)(c_y - a_y) - (c_x - a_x)(b_y - a_y)$$

Ukoliko je:

- $d > 0$ – trougao ABC ima pozitivnu orijentaciju;
- $d < 0$ – trougao ABC ima negativnu orijentaciju;
- $d = 0$ – tačke A, B i C su kolinearne.

```
struct Tacka{
   int x;
   int y;
};

enum orij {KOLINEARNE, NEGATIVNA_ORJ, POZITIVNA_ORJ};

// funkcija koja utvrdjuje orijentaciju tacaka P1, P2 i P3
orij orijentacija(Tacka P1, Tacka P2, Tacka P3){
  int d = (P2.x - P1.x) * (P3.y - P1.y) - (P3.x - P1.x) * (P2.y - P1.y);
  if (d == 0) return KOLINEARNE;
  else if (d > 0)
    return POZITIVNA_ORJ;
  else return NEGATIVNA_ORJ;
}

int main(){
    Tacka A, B, C;
    cout << "Unesi koordinate tacaka A, B i C" << endl;
    cin >> A.x >> A.y >> B.x >> B.y >> C.x >> C.y;

    orij o = orijentacija(A, B, C);
    if (o == KOLINEARNE)
      cout << "Tacke A, B i C su kolinearne" << endl;
    else if (o == NEGATIVNA_ORJ)
      cout << "Trougao ABC ima negativnu orijentaciju" << endl;
    else
      cout << "Trougao ABC ima pozitivnu orijentaciju" << endl;
    return 0;
}
```

I ovde se prilikom ispitivanja orijentacije tačaka podrazumeva da su koordinate

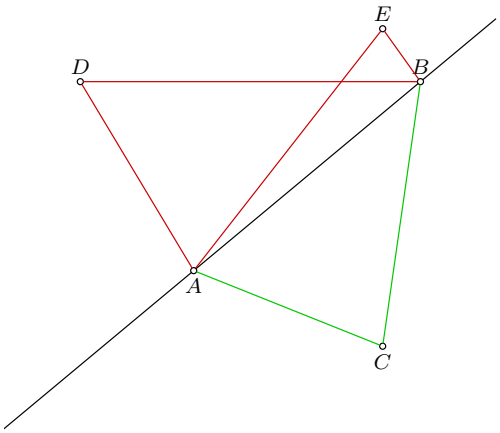
tačaka celobrojne, te se provera da li su vrednosti dva izraza jednake svodi na poređenje na jednakost primenom operatora ==. Ukoliko tačke imaju koordinate koje su brojevi u pokretnom zarezu, i odgovarajući izrazi bi bile realne vrednosti, te bi proveru jednakosti trebalo drugačije realizovati.

Orijentacija trojke tačaka ima primene u raznim geometrijskim algoritmima. S obzirom na to da je u pitanju operacija koja se veoma efikasno izvršava, mi ćemo je koristiti u narednim algoritmima u različite svrhe, npr. da nam zameni manipulaciju uglovima koja bi zahtevala pozivanje trigonometrijskih funkcija.

Primene orijentacije trojke tačaka

Problem: Za date tačke C i D utvrditi da li su sa iste strane prave p određene tačkama A i B.

Tačke C i D biće sa iste strane prave p ako i samo ako su trouglovi ABC i ABD, $A, B \in p$ iste orijentacije (slika 6). Dakle, dovoljno je da ispitamo da li su odgovarajući vektorski proizvodi istog znaka.



Slika 6: Tačke D i E se nalaze sa iste strane prave određene tačkama A i B, dok su tačke C i D sa različitih strana.

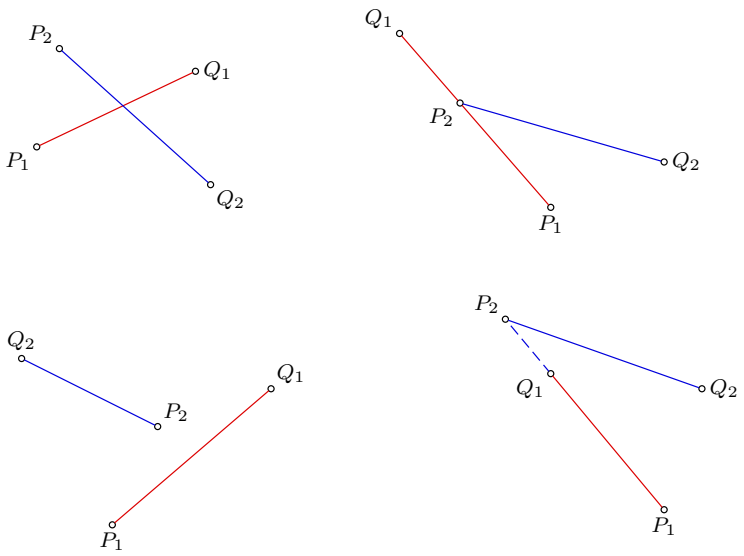
```
// funkcija za izracunavanje dvostruke oznacene povrsine trougla
// ako su zadata njegova temena
int dvostrukaOznacenaPovrsina(Tacka A, Tacka B, Tacka C){
  return A.x*B.y + B.x*C.y + C.x*A.y
         - A.x*C.y - C.x*B.y - B.x*A.y;
}

int main() {
  Tacka A, B, C, D;
```

```
  cout << "Unesi koordinate tacaka A i B" << endl;
  cin >> A.x >> A.y >> B.x >> B.y;
  cout << "Unesi koordinate tacaka C i D" << endl;
  cin >> C.x >> C.y >> D.x >> D.y;

  int P1 = dvostrukaOznacenaPovrsina(A,B,C);
  int P2 = dvostrukaOznacenaPovrsina(A,B,D);
  if ((P1 > 0 && P2 > 0) || (P1 < 0 && P2 < 0))
    cout << "Tacke se nalaze sa iste strane" << endl;
  else
    cout << "Tacke se nalaze sa razlicitih strana" << endl;
  return 0;
}
```

Problem: Date su dve duži P_1Q_1 i P_2Q_2 u ravni. Utvrditi da li se ove dve duži seku.

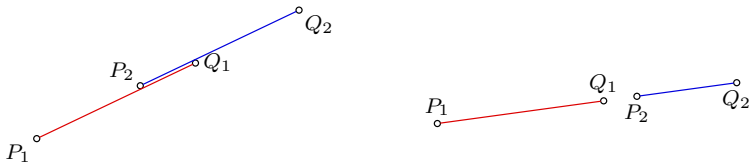
Za rešavanje ovog problema iskoristićemo naredno tvrđenje: duži P_1Q_1 i P_2Q_2 se seku ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:

1. nikoje tri tačke nisu kolinearne i važi da su tačke P_2 i Q_2 sa različitih strana prave P_1Q_1 i tačke P_1 i Q_1 su sa različitih strana prave P_2Q_2 (slika 7),



Slika 7: Različiti položaji duži P_1Q_1 i P_2Q_2 u ravni u slučaju kada nisu sve četiri krajnje tačke duži kolinearne. Na gornje dve slike ilustrovan je slučaj kada se duži seku, a na donje dve kada se duži ne seku.

2. tačno tri tačke su kolinearne, npr. P_1, Q_1 i P_2 i važi da je tačka P_2 između tačaka P_1 i Q_1,
3. trojke tačaka $\{P_1, Q_1, P_2\}, \{P_1, Q_1, Q_2\}, \{P_1, P_2, Q_2\}$ i $\{Q_1, P_2, Q_2\}$ su međusobno kolinearne, a seku se i projekcije duži P_1Q_1 i P_2Q_2 na x osu i projekcije duži na y osu (slika 8).



Slika 8: Različiti položaji duži P_1Q_1 i P_2Q_2 u ravni u slučaju kada su sve četiri krajnje tačke duži kolinearne.

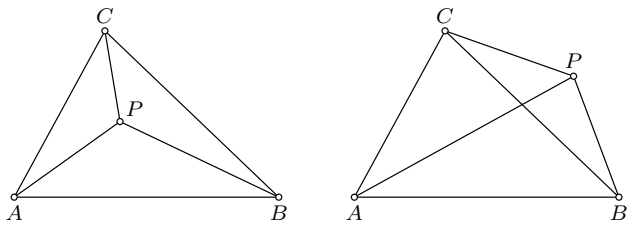
Prvi uslov ćemo proveriti tako što ćemo ispitati da li trojke tačaka P_1, Q_1, P_2 i P_1, Q_1, Q_2 imaju različitu orijentaciju i da li istovremeno trojke tačaka P_2, Q_2, P_1 i P_2, Q_2, Q_1 imaju različitu orijentaciju. Razmatraćemo, pritom, sve tri moguće različite vrednosti orijentacije – kolinearnost, pozitivna i negativna orijentacija i pod taj slučaj podvesti i situaciju kada su neke tri tačke kolinearne. Drugi uslov ćemo ispitati tako što ćemo proveriti da li ako je trojka tačaka P_1, Q_1, P_2 kolinearna važi da tačka $Q_1 \in P_2Q_2$ i slično za druge trojke tačaka.

```
// funkcija koja utvrdjuje orijentaciju tacaka P1, P2 i P3
orij orijentacija(Tacka P1, Tacka P2, Tacka P3){
  int d = (P2.x - P1.x) * (P3.y - P1.y) - (P3.x - P1.x) * (P2.y - P1.y);
  if (d == 0) return KOLINEARNE;
  else if (d > 0)
    return POZITIVNA_ORJ;
  else return NEGATIVNA_ORJ;
}

// za date tri kolinearne tacke P, Q i R proveravamo da li
// tacka Q pripada duzi PR
bool pripadaDuzi(Tacka P, Tacka Q, Tacka R){
  if (Q.x <= max(P.x, R.x) && Q.x >= min(P.x, R.x) &&
      Q.y <= max(P.y, R.y) && Q.y >= min(P.y, R.y))
    return true;
  return false;
}

// proveravamo da li se duzi P1Q1 i P2Q2 seku
bool sekuSe(Tacka P1, Tacka Q1, Tacka P2, Tacka Q2){
```

```
  // racunamo vrednosti cetiri orijentacije
  // koje su nam potrebne
  orij o1 = orijentacija(P1, Q1, P2);
  orij o2 = orijentacija(P1, Q1, Q2);
  orij o3 = orijentacija(P2, Q2, P1);
  orij o4 = orijentacija(P2, Q2, Q1);

  // prvi i drugi slucaj
  if (o1 != o2 && o3 != o4)
    return true;

  // drugi slucaj, ako je bar jedna od trojki tacaka kolinearna,
  // onda je potreban i dovoljan uslov da je
  // bar jedno od temena jedne duzi izmedju temena druge duzi
  // P1, Q1 i P2 su kolinearne i P2 pripada duzi P1Q1
  if (o1 == KOLINEARNE && pripadaDuzi(P1, P2, Q1))
    return true;

  // P1, Q1 i Q2 su kolinearne i Q2 pripada duzi P1Q1
  if (o2 == KOLINEARNE && pripadaDuzi(P1, Q2, Q1))
     return true;

  // P2, Q2 i P1 su kolinearne i P1 pripada duzi P2Q2
  if (o3 == KOLINEARNE && pripadaDuzi(P2, P1, Q2))
     return true;

  // P2, Q2 i P1 su kolinearne i Q1 pripada duzi P2Q2
  if (o4 == KOLINEARNE && pripadaDuzi(P2, Q1, Q2))
     return true;

  // inace se duzi ne seku
  return false;
}

int main(){
    Tacka P1, Q1, P2, Q2;
    cout << "Unesi koordinate tacaka P1 i Q1" << endl;
    cin >> P1.x >> P1.y >> Q1.x >> Q1.y;
    cout << "Unesi koordinate tacaka P2 i Q2" << endl;
    cin >> P2.x >> P2.y >> Q2.x >> Q2.y;
    if (sekuSe(P1, Q1, P2, Q2))
       cout << "Duzi P1Q1 i P2Q2 se seku" << endl;
    else
       cout << "Duzi P1Q1 i P2Q2 se ne seku" << endl;
    return 0;
}
```

Ispitivanje da li tačka pripada trouglu

Problem: Dat je trougao ABC i tačka P. Ispitati da li tačka P pripada trouglu ABC ili ne (slika 9).



Slika 9: Situacija kada tačka P pripada i kada ne pripada trouglu ABC.

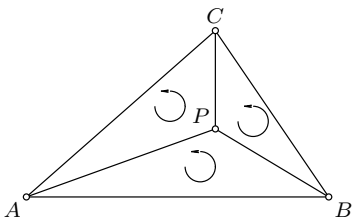
Svođenje na površine trouglova Za utvđivanje da li je tačka P u trouglu ABC možemo iskoristiti naredno tvrđenje: ako je tačka P u unutrašnjosti trougla ABC, onda je zbir površina trouglova PAB, PBC i PCA jednak površini trougla ABC.

```
#define EPS 1.0E-6

// funkcija kojom proveravamo da li se tacka P nalazi u trouglu ABC
bool tackaUTrouglu(Tacka A, Tacka B, Tacka C, Tacka P) {
  // racunamo povrsinu trougla ABC
  double P = povrsinaTrougla(A, B, C);
  // racunamo povrsine trouglova PBC, PAC i PAB
  double P1 = povrsinaTrougla(P, B, C);
  double P2 = povrsinaTrougla(A, P, C);
  double P3 = povrsinaTrougla(A, B, P);

  // proveravamo da li one u zbiru daju povrsinu trougla ABC
  // poredimo dve realne vrednosti na jednakost
  return fabs(P - (P1 + P2 + P3)) < EPS;
}

int main(){
  Tacka A, B, C, P;
  cout << "Unesi koordinate temena A, B i C" << endl;
  cin >> A.x >> A.y >> B.x >> B.y >> C.x >> C.y;
  cout << "Unesi koordinate tacke P" << endl;
  cin >> P.x >> P.y;
```

```
  if (tackaUTrouglu(A,B,C,P))
    cout << "Tacka se nalazi u trouglu" << endl;
  else
    cout << "Tacka se ne nalazi u trouglu" << endl;
  return 0;
}
```

Računanje orijentacije trojki tačaka Možemo utvrditi da li se tačka P nalazi u trouglu ABC i korišćenjem sledećeg opažanja: tačka P se nalazi u trouglu ABC ako i samo ako su trouglovi ABP, BCP i CAP iste orijentacije (slika 10).

```
// funkcija kojom proveravamo da li se tacka P nalazi u trouglu ABC
bool tackaUTrouglu(Tacka A, Tacka B, Tacka C, Tacka P){
  // racunamo orijentacije sva tri trougla
  orij o1 = orijentacija(A,B,P);
  orij o2 = orijentacija(B,C,P);
  orij o3 = orijentacija(C,A,P);

  if (o1 == o2 && o2 == o3)
    return true;
  else
    return false;
}
```



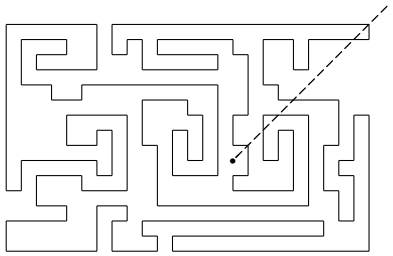
Slika 10: Orijentacije trouglova ABP, BCP i CAP su iste kada tačka P pripada trouglu ABC.

Naravno, oba ova algoritma su konstantne vremenske složenosti.

Ispitivanje da li tačka pripada prostom mnogouglu

U prethodnom poglavlju razmotrili smo na koji način možemo utvrditi da li se tačka nalazi unutar datog trougla. Razmotrimo kako se ovo može uopštiti na proizvoljni prost mnogougao.

Problem Zadat je prost mnogougao P i tačka Q. Ustanoviti da li je tačka Q u ili van mnogougla P.



Slika 11: Utvrđivanje pripadnosti tačke unutrašnjosti prostog mnogougla.

Problem izgleda jednostavno na prvi pogled, ali ako se razmatraju složeni nekonveksni mnogouglovi, kao onaj prikazan na slici 11, problem sigurno nije jednostavan. Prvi intuitivni pristup je pokušati nekako "izaći napolje", polazeći od zadate tačke Q. Posmatrajmo proizvoljnu polupravu sa temenom Q. Vidi se da je dovoljno prebrojati preseke sa stranicama mnogougla, sve do dostizanja spoljašnje oblasti. U primeru na slici 11, idući na severoistok od date tačke (prateći isprekidanu liniju), nailazimo na šest preseka sa mnogouglom do dostizanja spoljašnje oblasti. Istina, već posle četiri preseka stiže se van mnogougla, ali to računar "ne vidi"; zato se broji ukupan broj preseka poluprave sa stranicama mnogougla. Pošto nas poslednji presek pre izlaska izvodi iz mnogougla, a pretposlednji nas vraća u mnogougao, i tako dalje, tačka Q je van mnogougla. Dakle, možemo zaključiti da je tačka Q u mnogouglu ako i samo ako je broj preseka poluprave iz Q sa stranicama mnogougla neparan.

Razvijajući ovaj algoritam, implicitno smo pretpostavljali da radimo sa slikom. Problem je nešto drugačiji kad je mnogougao zadat nizom koordinata temena, što je uobičajeni scenario. Na primer, kad posao radimo ručno i vidimo mnogougao, lako je naći dobar put (onaj sa malo preseka) do neke tačke van mnogougla. U slučaju mnogougla datog nizom koordinata, to nije lako. Najveći deo vremena troši se na ispitivanje preseka poluprave i stranica mnogougla. Taj deo posla može se bitno uprostiti ako je poluprava paralelna jednoj od osa — na primer y-osi i recimo usmerena nadole. Naime, presek ove poluprave kroz tačku Q sa stranicom P_iP_{i+1} mnogougla postoji ako se x koordinata tačke Q nalazi između vrednosti x koordinata temena P_i i P_{i+1} i y koordinata presečne tačke poluprave kroz Q i prave P_iP_{i+1} je manja od y koordinate tačke Q. Vrednost y koordinate presečne tačke dobićemo kao presek prave $x = x_Q$ i prave P_iP_{i+1} čija je jednačina $y - y_{P_i} = \frac{y_{P_{i+1}} - y_{P_i}}{x_{P_{i+1}} - x_{P_i}}(x - x_{P_i})$ i to je tačka čija je x-koordinata x_Q, a y-koordinata je jednaka:

$$y = y_{P_i} + \frac{y_{P_{i+1}} - y_{P_i}}{x_{P_{i+1}} - x_{P_i}}(x_Q - x_{P_i})$$

Dakle, potrebno je da važi $y \leq y_Q$, što se, kada se izraz transformiše da bi se

izbeglo deljenje, svodi na:

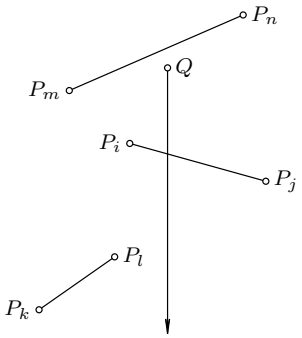
$$y_{P_i}(x_{P_{i+1}} - x_{P_i}) + (y_{P_{i+1}} - y_{P_i})(x_Q - x_{P_i}) \leq y_Q(x_{P_{i+1}} - x_{P_i})$$

tj.

$$(y_{P_i} - y_Q)(x_{P_{i+1}} - x_{P_i}) - (y_{P_{i+1}} - y_{P_i})(x_{P_i} - x_Q) \leq 0.$$

Do ovog izraza se može doći i ako se proveri orijentacija trojke tačaka P_i, P_{i+1}, Q.

Primetimo da broj preseka stranica mnogougla sa ovom specijalnom polupravom može biti mnogo veći nego sa optimalnom polupravom (koju nije lako odrediti — čitaocu se ostavlja da razmotri ovaj problem), ali je nalaženje preseka mnogo jednostavnije (za konstantni faktor).

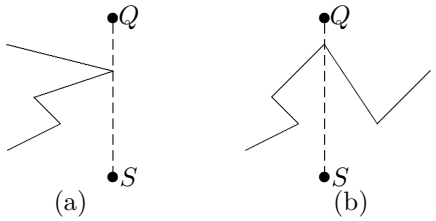


Slika 12: Različiti položaji stranica poligona i poluprave sa temenom u tački Q usmerene nadole: poluprava sa početkom u tački Q seče stranicu P_iP_j, a ne seče stranice P_kP_l i stranice P_mP_n.

Kao što je već pomenuto, obično postoje neki specijalni slučajevi koje treba posebno razmotriti. Neka je S tačka van mnogougla i pretpostavimo da umesto poluprave iz Q razmatramo duž QS. Cilj je utvrditi da li tačka Q pripada unutrašnjosti mnogougla P na osnovu broja preseka duži QS sa stranicama mnogougla P. Prvi specijalni slučaj je kada duž QS sadrži neko teme P_i mnogougla. Na slici 13(a) prikazan je slučaj kad presek duži QS u temenu ne treba brojati, a na slici 13(b) slučaj kad taj presek treba brojati. Postoji više načina za utvrđivanje da li neki ovakav presek treba brojati ili ne. Na primer:

- ako su dva temena mnogougla susedna temenu P_i sa iste strane prave kojoj pripada duž QS, presek se ne računa. U protivnom, ako su temena susedna temenu P_i sa različitih strana ove prave, presek se broji.
- s obzirom na to da razmatramo pravu koja je paralelna sa y osom, za svaku stranicu mnogougla trebalo bi računati preseke sa levim temenom, a ne sa

desnim (temena neke stranice mnogougla klasifikujemo kao levo i desno u odnosu na vrednosti x koordinate temena). Na taj način nećemo računati presek nalik onom na slici 13(a) jer je za obe stranice mnogougla susedne temenu P_i presek kroz desno teme (i slično dva puta bismo računali presek sa temenom koje je levi ekstremum i opet se ne bi promenila parnost brojača). Za presek prikazan na slici 13(b) ubrajamo jedan presek, jer je za jednu od stranica koje se sustiču u tom temenu to levo teme, a za drugu desno.



Slika 13: Specijalni slučajevi kad vertikalna poluprava sa početkom u tački Q sadrži neko teme mnogougla.

Drugi specijalan slučaj se javlja kada se duž QS delom preklapa sa nekim stranicama mnogougla P. Ovo preklapanje očigledno ne treba brojati u preseke.

U nastavku ćemo razmotriti implementaciju algoritma za ispitivanje da li je tačka u mnogouglu koja ne uključuje obradu specijalnih slučajeva.

```
// utvrdjuje da li se tacka Q nalazi u datom mnogouglu P
// racunanjem parnosti preseka sa vertikalnom polupravom
// usmerenom nadole sa temenom u tacki Q
bool tackaUMnogouglu(vector<Tacka> P, Tacka Q){
  int n = P.size();
  // mnogougao mora da ima bar 3 temena
  if (n < 3)
    return false;

  // tacka je inicijalno van mnogougla
  bool uMnogouglu = false;

  // prolazimo skupom svih stranica mnogougla
  for(int i = 0; i < n; i++){
    // naredno teme u poretku temena mnogougla
    int j = (i + 1) % n;
    // ukoliko se x koordinata tacke Q nalazi izmedju vrednosti
    // x koordinata krajnjih tacaka stranice P[i]P[j] i
    // y koordinata presecne tacka prave x = x_Q i prave P[i]P[j]
    // je manja od y koordinate tacke Q
    if (Q.x > min(P[i].x,P[j].x) && Q.x < max(P[i].x,P[j].x) &&
       (P[i].y - Q.y)*(P[j].x - P[i].x) < (P[j].y - P[i].y)*(P[i].x - Q.x))
```

```
      // registrujemo jos jedan presek
      uMnogouglu = !uMnogouglu;
  }
  return uMnogouglu;
}

int main(){
  vector<Tacka> P = {{0, 0}, {10, 1}, {12, 12}, {2, 10}};
  int n = P.size();
  Tacka Q = {5, 8};
  if (tackaUMnogouglu(P, Q))
    cout << "Tacka se nalazi u mnogouglu" << endl;
  else
    cout << "Tacka se ne nalazi u mnogouglu" << endl;
  return 0;
}
```

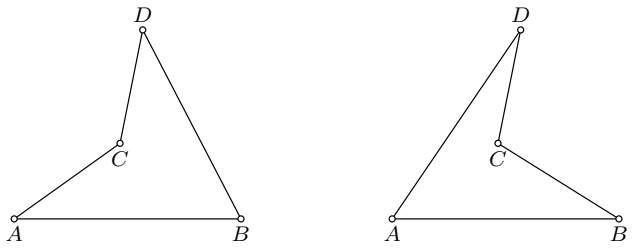
Neka je n broj stranica mnogougla. Kroz osnovnu petlju algoritma prolazi se n puta. U svakom prolasku kroz petlju računa se presek dve prave i izvršavaju se još neke operacije za konstantno vreme. Dakle, ukupno vreme izvršavanja algoritma iznosi $O(n)$.

Konstrukcija prostog mnogougla

Skup tačaka u ravni definiše veći broj različitih mnogouglova, zavisno od izabranog redosleda tačaka. Razmotrićemo sada pronalaženje prostog mnogougla sa zadatim skupom temena.

Problem: Dato je n tačaka u ravni, takvih da nisu sve kolinearne. Povezati ih prostim mnogouglom.

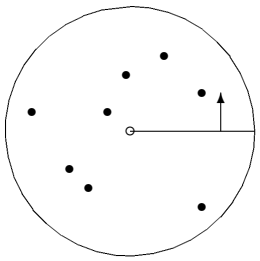
Postoji više metoda za konstrukciju traženog prostog mnogougla; uostalom, jasno je da u opštem slučaju problem nema jednoznačno rešenje (slika 14).



Slika 14: Tačke A, B, C i D i dva različita prosta mnogougla nad njima.

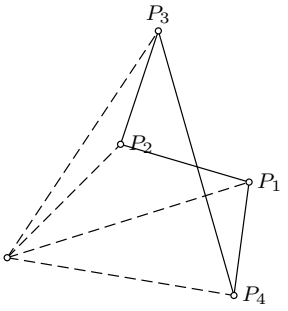
Prikazaćemo najpre geometrijski pristup ovom problemu. Neka je C neki krug,

čija unutrašnjost sadrži sve tačke. Za nalaženje takvog kruga dovoljno je $O(n)$ operacija — izračunavanja najvećeg među rastojanjima proizvoljne tačke ravni (centra kruga) do svih n tačaka. Površina C može se "prebrisati" (pregledati) rotirajućom polupravom kojoj je početak centar kruga C (slika 15).



Slika 15: Prolazak tačaka u krugu rotirajućom polupravom.

Pretpostavimo za trenutak da rotirajuća poluprava u svakom trenutku sadrži najviše jednu tačku. Očekujemo da ćemo spajanjem tačaka onim redom kojim poluprava nailazi na njih dobiti prost mnogougao. Pokušajmo da to dokažemo. Označimo tačke, uređene u skladu sa redosledom nailaska poluprave na njih, sa $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (prva tačka bira se proizvoljno). Za svako i, $1 \leq i \leq n$, stranica P_iP_{i-1} (odnosno P_1P_n za $i = 1$) sadržana je u novom (disjunktnom) isečku kruga, pa se ne seče ni sa jednom drugom stranom. Ako bi ovo tvrđenje bilo tačno, dobijeni mnogougao bi morao da bude prost. Međutim, ugao između polupravih kroz neke dve uzastopne tačke P_i i P_{i+1} može da bude veći od π. Tada isečak koji sadrži duž P_iP_{i+1} sadrži više od pola kruga i nije konveksna figura, a duž P_iP_{i+1} prolazi kroz druge isečke kruga, pa može da seče druge stranice mnogougla. Razmotrimo primer prikazan na slici 16: duž P_3P_4 prolazi kroz druge isečke kruga i seče stranicu P_1P_2.



Slika 16: Loš izbor centra kruga koji dovodi do toga da konstruisani mnogougao nije prost.

Da bi se uočeni problem rešio, mogu se, na primer, fiksirati proizvoljne tri tačke iz skupa, a za centar kruga izabrati neka tačka z unutar njima određenog trougla (na primer težište, koje se lako nalazi). Ovakav izbor garantuje da ni jedan od dobijenih sektora kruga neće imati ugao veći od π. Zatim tačke sortiramo prema položaju u krugu sa centrom z. Preciznije, sortiraju se *uglovi* između x-ose i polupravih od tačke z ka ostalim tačkama. Ako dve ili više tačaka imaju isti ugao, one se dalje sortiraju rastuće prema rastojanju od tačke z. Na kraju, tačke povezujemo u skladu sa dobijenim uređenjem, po dve uzastopne. Osnovna komponenta vremenske složenosti ovog algoritma potiče od sortiranja tačaka, te je složenost algoritma $O(n \log n)$.

Ugao φ koji prava $y = mx + b$ zaklapa sa x osom dobija se korišćenjem veze $m = \tan \varphi$, odnosno iz jednačine $\varphi = \arctan m$. Primetimo da nije potrebno izračunavanje rastojanja kad dve tačke imaju isti nagib — dovoljno je izračunati kvadrate rastojanja. Dakle, nema potrebe za izračunavanjem kvadratnih korenova.

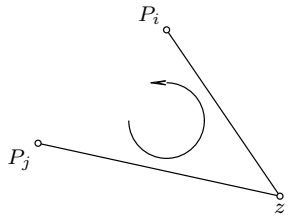
```
bool kolinearne(const Tacka& t1, const Tacka& t2, const Tacka& t3) {
  return (t1.x - t2.x) * (t1.y - t3.y) == (t1.y - t2.y) * (t1.x - t3.x);
}

double kvadratRastojanja(double x1, double y1, double x2, double y2) {
  double dx = x1 - x2, dy = y1 - y2;
  return dx * dx + dy * dy;
}

void prostMnogougao(vector<Tacka>& tacke) {
  int i = 2;
  // trazimo prvu tacku koja nije kolinearna sa prve dve tacke
  while (kolinearne(tacke[0], tacke[1], tacke[i]))
    i++;
  // racunamo koordinate centra kruga
  double x0 = (tacke[0].x + tacke[1].x + tacke[i].x) / 3.0;
  double y0 = (tacke[0].y + tacke[1].y + tacke[i].y) / 3.0;
  // sortiramo tacke
  sort(begin(tacke), end(tacke),
    [x0, y0](const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
      double x1 = t1.x - x0, y1 = t1.y - y0;
      double x2 = t2.x - x0, y2 = t2.y - y0;
      double ugao1 = atan2(y1, x1);
      double ugao2 = atan2(y2, x2);
      const double EPS = 1e-12;
      if (ugao1 < ugao2 - EPS) {
        return true;
      }
      if (ugao2 < ugao1 - EPS) {
        return false;
```

```
      }
      return kvadratRastojanja(x0, y0, x1, y1) <
             kvadratRastojanja(x0, y0, x2, y2);
   });
}

int main() {
  int n;
  cin >> n;
  vector<Tacka> tacke(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    cin >> tacke[i].x >> tacke[i].y;
  }
  prostMnogougao(tacke);
  for (const Tacka& t : tacke)
    cout << t.x << " " << t.y << endl;
  return 0;
}
```

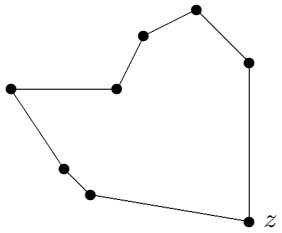
Umesto težišta trougla određenog sa neke tri nekolinearne tačke iz skupa, za centar kruga z može se uzeti i jedna tačka iz skupa – tačka sa najvećom x-koordinatom (i sa najmanjom y-koordinatom, ako ima više tačaka sa najvećom x-koordinatom). Ovakvu tačku ćemo često koristiti prilikom rešavanja geometrijskih problema i zvaćemo je *ekstremna tačka*. Ovako odabranu tačku povezujemo sa svim ostalim tačkama datog skupa i tačke sortiramo rastuće u odnosu na ugao koji poluprava od tačke z kroz tu tačku zaklapa sa x-osom. Pošto sve tačke leže levo od tačke z, ugao između polupravih kroz dve uzastopne tačke ne može biti veći od π, te do degenerisanog slučaja o kome je bilo reči ne može doći. Ako dve ili više tačaka zaklapaju isti ugao sa x-osom, one se dalje sortiraju prema rastojanju od tačke z i to na sledeći način: ukoliko prvih nekoliko tačaka zaklapaju isti ugao, njih sortiramo u rastućem redosledu rastojanja od tačke z, ukoliko je poslednjih nekoliko tačaka kolinearno sa tačkom z njih sortiramo u opadajućem redosledu rastojanja od tačke z, dok je za ostale tačke koje su kolinearne sa tačkom z sve jedno da li ćemo ih sortirati rastuće ili opadajuće. Primetimo i to da je umesto računanja uglova moguće razmatrati orijentaciju tačaka. Naime za potrebe sortiranja skupa tačaka prema uglu koji zaklapaju sa horizontalnom pravom kroz tačku z iskoristićemo činjenicu da tačka P_i zaklapa manji ugao od tačke P_j ako je orijentacija trojke tačaka z, P_i, P_j pozitivna (slika 17).

Prost mnogougao dobijen prethodno opisanim postupkom za tačke sa slike 15 prikazan je na slici 18.

```
void prostMnogougao(vector<Tacka>& tacke) {
  // trazimo tacku sa maksimalnom x koordinatom,
  // u slucaju da ima vise tacaka sa maksimalnom x koordinatom
  // biramo onu sa najmanjom y koordinatom
```



Slika 17: Poređenje tačaka P_i i P_j svedeno na računanje orijentacije trojke tačaka z, P_i, P_j.



Slika 18: Konstrukcija prostog mnogougla.

```
auto max = max_element(begin(tacke), end(tacke),
                       [](const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
                         return t1.x < t2.x ||
                                (t1.x == t2.x && t1.y > t2.y);
                       });
// ekstremnu tacku dovodimo na početak niza - ona predstavlja centar kruga
swap(*begin(tacke), *max);
const Tacka& t0 = tacke[0];

// sortiramo ostatak niza (tačke sortiramo na osnovu ugla koji
// zaklapaju u odnosu vertikalnu polupravu koja polazi naviše iz
// centra kruga), a kolinearne na osnovu rastojanja od centra kruga
sort(next(begin(tacke)), end(tacke),
     [t0](const Tacka& t1, const Tacka& t2) {
       orij o = orijentacija(t0, t1, t2);
       if (o == KOLINEARNE)
         return kvadratRastojanja(t0, t1) <= kvadratRastojanja(t0, t2);
       return o == POZITIVNA_ORJ;
     });
```

```
  // obrcemo redosled tacaka na poslednjoj pravoj
  auto it = prev(end(tacke));
  while (orijentacija(*prev(it), *it, t0) == KOLINEARNE)
    it = prev(it);
  reverse(it, end(tacke));
}
```