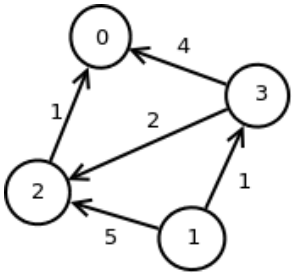
Težinski grafovi

U problemima koji slede bavićemo se *težinskim grafovima* (eng. weighted graph): grafovima u kojima je svakoj grani pridružena njena *težina* (eng. weight). Težine ćemo često zvati i dužinama i pod terminom *dužina puta* razmatraćemo zbir dužina grana na tom putu (a ne broj grana na tom putu). Na slici 1 dat je jedan usmereni težinski graf. U ovom grafu dužina puta $1, 2, 0$ iznosi $5 + 1 = 6$, dok dužina puta $1, 3, 2, 0$ iznosi $1 + 2 + 1 = 4$.



Slika 1: Usmereni težinski graf.

U programskom jeziku C++ težinski graf možemo predstaviti ili matricom povezanosti u kojoj se umesto logičkih vrednosti čuvaju težine grana (uz neku specijalnu numeričku vrednost koja označava da čvorovi nisu povezani) ili listama povezanosti gde se u svakom elementu liste povezanosti čuva indeks krajnjeg čvora grane i težina grane. Ako koristimo listu povezanosti i ako su dužine grana celobrojne, možemo upotrebiti strukturu podataka oblika:

```
vector<vector<pair<int,int>>> listaSuseda(n);
```

Novu granu u graf dodajemo na sledeći način:

```
listaSuseda[cvorOd].emplace_back(cvorDo, tezina);
```

Podsetimo se da se primenom funkcije `emplace_back` najpre konstruiše uređeni par čvora i njegove težine, a zatim i dodaje na kraj vektora.

Na primer, usmereni težinski graf sa slike 1 zadajemo listama povezanosti na sledeći način:

```
vector<vector<pair<int,int>>> listaSuseda
    {{}, {{2,5}, {3,1}}, {{0,1}}, {{0,4}, {2,2}}};
```

Ako je graf neusmeren, možemo ga smatrati usmerenim, pri čemu svakoj njegovoj neusmerenoj grani odgovaraju dve usmerene grane iste dužine, u oba smera. Algoritmi koje ćemo razmatrati odnose se i na usmerene i na neusmerene grafove.

Najkraći putevi iz zadatog čvora

Problem: Za dati usmereni graf $G = (V, E)$ i jedan njegov čvor v pronaći najkraće puteve od čvora v do svih ostalih čvorova u G. Na primer, u grafu sa slike 1 odrediti najkraće puteve od čvora 1 do svih ostalih čvorova u grafu. Najkraći put do čvora 3 predstavlja direktna grana $(1, 3)$ i dužine je 1, dok najkraći put do čvora 2 je put $1, 3, 2$ ukupne dužine $1 + 2 = 3$, a ne direktna grana $(1, 2)$ dužine 5.

Postoji mnogo situacija u kojima se pojavljuje ovaj problem. Na primer, graf može odgovarati auto–karti: čvorovi su gradovi, a dužine grana su dužine direktnih puteva između gradova (ili vreme potrebno da se taj put pređe, ili izgradi, itd, zavisno od problema). Zadatak je pronaći najkraći put (u smislu dužine ili proteklog vremena) od jednog grada do drugog.

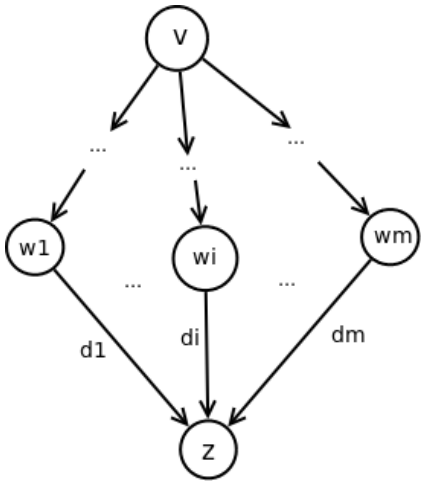
Aciklički slučaj

Pretpostavimo najpre da je graf G aciklički. U tom slučaju problem je lakši i njegovo rešenje pomoći će nam da problem rešimo i u opštem slučaju.

Pokušajmo da problem rešimo indukcijom po broju čvorova. Bazni slučaj je trivijalan. Neka je $|V| = n$. Pošto je graf aciklički, možemo da iskoristimo topološko sortiranje grafa. Najpre, ako je redni broj čvora v od koga treba odrediti najkraće puteve u topološkom sortiranju jednak k, onda se čvorovi sa rednim brojevima manjim od k ne moraju razmatrati jer ne postoji način da se do njih dođe iz čvora v. Dodatno, redosled dobijen topološkim sortiranjem je pogodan za primenu indukcije. Posmatrajmo poslednji čvor u topološkom redosledu čvorova, odnosno čvor z sa rednim brojem n. Pretpostavimo (induktivna hipoteza) da znamo najkraće puteve od čvora v do svih ostalih čvorova, sem do z. Označimo dužinu najkraćeg puta od čvora v do čvora w sa $w.SP$ (eng. shortest path). Da bismo odredili vrednost $z.SP$, dovoljno je da proverimo samo one čvorove w iz kojih postoji grana do čvora z (slika 2). Pošto se najkraći putevi do ostalih čvorova već znaju, vrednost $z.SP$ jednaka je minimumu zbira $w.SP + duzina(w, z)$, po svim čvorovima w iz kojih vodi grana do čvora z. Da li je time problem rešen? Važno pitanje je da li dodavanje čvora z može da skrati put do nekog drugog čvora. Međutim, pošto je z poslednji čvor u topološkom redosledu, ni jedan drugi čvor nije dostižan iz z, pa se dužine ostalih najkraćih puteva ne menjaju. Dakle, uklanjanje čvora z iz grafa, nalaženje najkraćih puteva bez njega, i vraćanje z nazad su osnovni delovi algoritma. Drugim rečima, sledeća induktivna hipoteza rešava problem.

Induktivna hipoteza: Ako se zna topološki redosled čvorova, umemo da izračunamo dužine najkraćih puteva od čvora v do prvih $n - 1$ čvorova.

Kad je dat aciklički graf sa n čvorova (topološki uređenih), uklanjamo n-ti čvor z, indukcijom rešavamo smanjeni problem, nalazimo najmanju među vrednostima



Slika 2: Računanje najkraćeg puta od čvora v do poslednjeg čvora z u topološkom poretku.

$w.SP + duzina(w, z)$ za sve čvorove w takve da $(w, z) \in E$ i nju proglašavamo za $z.SP$. Iz ovog razmatranja direktno sledi odgovarajući rekurzivni algoritam.

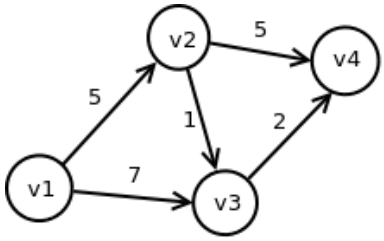
Sada ćemo pokušati da usavršimo algoritam tako da se Kanov algoritam za topološko sortiranje obavlja istovremeno sa pronalaženjem najkraćih puteva. Drugim rečima, cilj je objediniti dva prolaza (za topološko sortiranje i nalaženje najkraćih puteva) u jedan.

Razmotrimo način na koji se algoritam rekurzivno izvršava (posle nalaženja topološkog redosleda). Pretpostavimo, zbog jednostavnosti, da je redni broj čvora v od koga treba izračunati najkraće puteve u topološkom redosledu 1 (čvorovi sa rednim brojevima manjim od rednog broja čvora v ionako nisu dostižni iz v). Prvi korak je poziv rekurzivne procedure. Procedura zatim poziva rekurzivno samu sebe, sve dok se ne dođe do čvora v. U tom trenutku se dužina najkraćeg puta od čvora v do čvora v postavlja na 0, i rekurzija počinje da se "razmotava". Zatim se razmatra čvor u sa rednim brojem 2 u topološkom poretku; dužina najkraćeg puta do njega izjednačuje se sa dužinom grane (v, u), ako ona postoji; u protivnom, ne postoji put od v do u. Sledeći korak je provera čvora x sa rednim brojem 3. U ovom slučaju u x ulaze najviše dve grane (od čvorova v i/ili u), pa se upoređuju dužine odgovarajućih puteva. Umesto ovakvog izvršavanja rekurzije unazad, pokušaćemo da iste korake izvršimo preko niza čvorova sa rastućim rednim brojevima u topološkom redosledu.

Indukcija se primenjuje prema rastućim rednim brojevima u topološkom redosledu počevši od v. Ovaj redosled oslobađa nas potrebe da redne brojeve unapred znamo, pa ćemo biti u stanju da izvršavamo istovremeno oba algoritma. Dakle, možemo razmotriti narednu induktivnu hipotezu.

Induktivna hipoteza: Ako znamo prvih m čvorova u topološkom redosledu čvorova, umemo da izračunamo dužine najkraćih puteva do čvorova sa rednim brojevima od 1 do m.

Razmotrimo čvor sa rednim brojem $m+1$, koji ćemo označiti sa z. Da bismo pronašli najkraći put do z, moramo da proverimo sve grane koje vode u z. Topološki redosled garantuje da sve takve grane polaze iz čvorova sa manjim rednim brojevima. Prema induktivnoj hipotezi ti čvorovi su već razmatrani, pa se dužine najkraćih puteva do njih znaju. Za svaku granu (w, z) znamo dužinu $w.SP$ najkraćeg puta od v do w, pa je dužina najkraćeg puta od v do z preko w jednaka $w.SP + duzina(w, z)$. Pored toga, kao i ranije, ne moramo da vodimo računa o eventualnim promenama najkraćih puteva ka čvorovima sa manjim rednim brojevima od rednog broja čvora z, jer se do njih ne može doći iz čvora z. Da ne bismo za svaki čvor određivali iz kojih čvorova postoji grana ka njemu (što nije efikasna operacija u reprezentaciji grafa listama povezanosti) možemo pamtiti dužine poznatih najkraćih puteva do svih čvorova sa većim rednim brojem od tekućeg čvora. Prilikom razmatranja čvora z, kao čvora sa rednim brojem $m+1$, potrebno je jedino razmotriti grane (z, x) koje polaze iz njega i za svaki čvor x proveravati da li je vrednost $z.SP + duzina(z, x)$ manja od $x.SP$ i ako jeste ažurirati vrednost $x.SP$.



Slika 3: Računanje najkraćeg puta u acikličkom grafu: čvorovi su označeni redom koji odgovara njihovoj poziciji u topološkom sortiranju.

Razmotrimo izvršavanje algoritma na primeru acikličkog grafa sa slike 3. Redosled čvorova u topološkom sortiranju grafa je v_1, v_2, v_3, v_4. Neka je zadatak odrediti najkraće puteve iz čvora v_1. Na početku postavljamo vrednost najkraćeg puta do čvora v_1 na 0 (i to proglašavamo konačnom vrednošću najkraćeg puta do čvora v_1), a vrednosti najkraćih puteva do svih ostalih čvorova na ∞. Razmatramo grane koje polaze iz čvora v_1: to su (v_1, v_2) i (v_1, v_3) i ažuriramo najkraće puteve do čvora v_2 i do čvora v_3 na $v_2.SP = \min\{\infty, 0+5\} = 5$, a $v_3.SP = \min\{\infty, 0+7 = 7\}$. Drugi čvor u topološkom redosledu je čvor v_2: tekuću vrednost najkraćeg puta do njega proglašavamo za konačnu vrednost najkraćeg puta, odnosno proglašavamo $v_2.SP = 5$. Zatim razmatramo grane koje izlaze iz čvora v_2: to su grane (v_2, v_3) i (v_2, v_4) i ažuriramo vrednosti: $v_3.SP = \min\{7, 5+1\} = 6$ i $v_4.SP = \min\{\infty, 5+5\} = 10$. Čvor do kog otkrivamo najkraći put je v_3: on je treći po redu u topološkom poretku. Razmatramo jedinu granu (v_3, v_4) koja polazi iz čvora v_3 i vršimo ažuriranje vrednosti najkraćeg

puta do čvora: $v_4.SP = \min\{10, 6+2\} = 8$. U ovom trenutku proglašavamo kao konačnu vrednost najkraćeg puta i do čvora v_4 i završavamo algoritam.

Za svaki čvor pamtimo njegovog prethodnika (roditelja) na najkraćem putu od čvora v. Na taj način možemo jednostavno da rekonstruišemo same najkraće puteve.

```
vector<vector<pair<int,int>>> listaSuseda {{{1,3}, {2,2}}, {{3,1},
    {4,2}}, {{5,3}}, {}, {{6,1}, {7,3}}, {{8,4}}, {}, {}, {}};

// funkcija koja stampa put od polaznog cvora v do datog cvora
// kroz grane drveta najkracih puteva
void odstampajPutDoCvora(int cvor, vector<int> roditelj){

  // ako smo stigli unazad do polaznog cvora, zavrsavamo
  if (roditelj[cvor] == -1)
    return;
  // inace, stampamo deo puta od roditeljskog cvora do kraja
  odstampajPutDoCvora(roditelj[cvor],roditelj);
  // na kraju stampamo tekuci cvor
  cout << ", " << cvor;
}

// funkcija koja stampa najkraci put do datog cvora i njegovu duzinu
void odstampajNajkraciPut(int cvor, vector<int> roditelj,
              vector<int> najkraciPut){

    cout << "Najkraci put do cvora " << cvor << " je: 0";
    odstampajPutDoCvora(cvor,roditelj);
    cout << " i duzine je " << najkraciPut[cvor] << endl;
}

// funkcija koja racuna najkrace puteve od cvora 0 u aciklickom grafu
void aciklicki_najkraci_putevi(){

  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  // niz koji za svaki cvor cuva njegov ulazni stepen
  vector<int> ulazniStepen(brojCvorova,0);
  // niz koji za svaki cvor cuva duzinu najkraceg puta do njega
  vector<int> najkraciPut(brojCvorova,numeric_limits<int>::max());
  // niz koji za svaki cvor cuva prethodnika u najkracem putu
  vector<int> roditelj(brojCvorova,-1);

  // najkraci put od cvora 0 do njega samog postavljamo na 0
  najkraciPut[0] = 0;

  // inicijalizujemo niz ulaznih stepena cvorova
```

```
  for (int i = 0; i < listaSuseda.size(); i++)
    for (int j = 0; j < listaSuseda[i].size(); j++)
      ulazniStepen[listaSuseda[i][j].first]++;

  // red koji cuva cvorove ulaznog stepena nula
  queue<int> cvoroviStepenaNula;

  // cvorove koji su ulaznog stepena 0 dodajemo u red
  for (int i = 0; i < brojCvorova; i++)
    if (ulazniStepen[i] == 0)
      cvoroviStepenaNula.push(i);

  while(!cvoroviStepenaNula.empty()){

    // cvor sa pocetka reda je naredni u topoloskom redosledu
    int cvor = cvoroviStepenaNula.front();
    cvoroviStepenaNula.pop();
    // do njega je odredjen najkraci put i stampamo ga
    odstampajNajkraciPut(cvor,roditelj,najkraciPut);

    for (int i = 0; i < listaSuseda[cvor].size(); i++){
      // ukoliko je do nekog cvora kraci put preko upravo razmatranog cvora
      // vrsimo azuriranje najkraceg rastojanja do tog cvora
      int sused = listaSuseda[cvor][i].first;
      int grana = listaSuseda[cvor][i].second;
      if (najkraciPut[cvor] + grana < najkraciPut[sused]){
         najkraciPut[sused] = najkraciPut[cvor] + grana;
         // azuriramo koji je roditeljski cvor na najkracem putu
         roditelj[sused] = cvor;
      }
      ulazniStepen[sused]--;
      // ukoliko je stepen nekog od suseda pao na 0, dodajemo ga u red
      if (ulazniStepen[sused] == 0)
         cvoroviStepenaNula.push(sused);
    }
  }
}

int main(){
  aciklicki_najkraci_putevi();
  return 0;
}
```

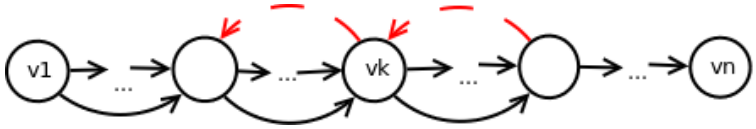
U algoritmu se svaka grana razmatra po jednom u toku inicijalizacije ulaznih stepena čvorova, i po jednom u trenutku kad se njen polazni čvor uklanja iz reda.

Pristup redu zahteva konstantno vreme. Svaki čvor se razmatra tačno jednom. Prema tome, vremenska složenost algoritma za određivanje najkraćih puteva u acikličkom grafu je u najgorem slučaju $O(|V| + |E|)$.

Dajkstrin algoritam

Kad graf nije aciklički, ne postoji topološki redosled, pa se razmatrani algoritam ne može direktno primeniti. Međutim, osnovne ideje se mogu iskoristiti i u opštem slučaju, kada su dužine grana pozitivne. Naime, jednostavnost algoritma za određivanje najkraćih puteva iz zadatog čvora u acikličkom grafu posledica je sledeće osobine topološkog redosleda: ako je z čvor sa rednim brojem k, onda:

1. ne postoje putevi od čvora z do čvorova sa rednim brojevima manjim od k, i
2. ne postoje putevi od čvorova sa rednim brojevima većim od k do čvora z (slika 4).

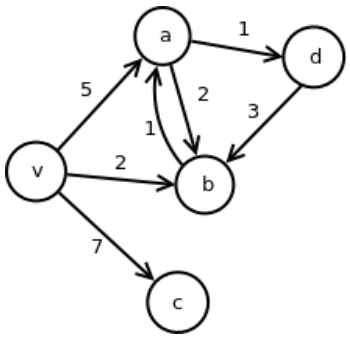


Slika 4: Kada čvorove poređamo u redosledu topološkog poretka, u grafu mogu postojati samo grane sleva nadesno, koje vode od čvorova numerisanih manjih brojem ka čvorovima označenim većim brojem (označene crnom bojom), dok grane koje vode zdesna ulevo, od čvorova numerisanih većom vrednošću ka čvorovima označenim manjom vrednošću, ne mogu postojati (označene crvenom bojom).

Ova osobina omogućuje nam da nađemo najkraći put od čvora v do čvora z, ne vodeći računa o čvorovima koji su posle z u topološkom redosledu. Može li se nekako definisati redosled čvorova proizvoljnog grafa (koji nije nužno aciklički) koji bi omogućio nešto slično?

Ideja je razmatrati čvorove grafa redom prema dužinama najkraćih puteva do njih od čvora v. Te dužine se na početku, naravno, ne znaju; one se izračunavaju u toku izvršavanja algoritma. Najpre proveravamo sve grane koje izlaze iz čvora v. Neka je (v, x) najkraća među njima. Pošto su, po pretpostavci, sve dužine grana pozitivne, najkraći put od v do x je grana (v, x). Dužine svih drugih puteva do x su veće ili jednake od dužine ove grane. Čvor x je, dodatno, najbliži od svih čvorova čvoru v. Prema tome, znamo najkraći put do čvora najbližeg čvoru v, i to može da posluži kao baza indukcije. Pokušajmo da napravimo sledeći korak. Kako možemo da pronađemo najkraći put do nekog drugog čvora? Biramo čvor koji je drugi najbliži do v (x je prvi najbliži). Jedini putevi koje treba uzeti u obzir su druge grane iz čvora v ili putevi koji se sastoje od dve grane: prva je (v, x), a druga je neka grana koja polazi iz čvora x. Neka je sa $duzina(u, w)$

označena dužina grane (u, w). Biramo najmanji od izraza $duzina(v, y)$ $(y \neq x)$ ili $duzina(v, x) + duzina(x, z)$ $(z \neq v)$. Još jednom zaključujemo da se drugi putevi ne moraju razmatrati, jer je ovo najkraći put za odlazak iz v (izuzev do x). Može se formulisati sledeća induktivna hipoteza.



Slika 5: Usmereni težinski graf koji sadrži cikluse.

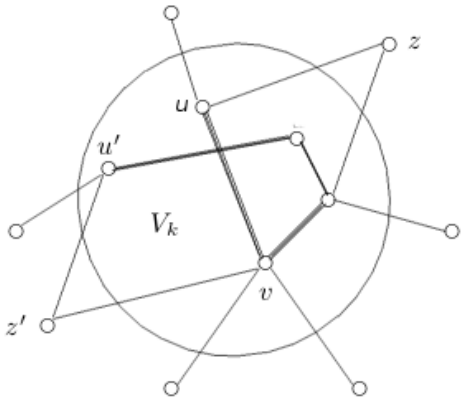
Razmotrimo primer grafa sa slike 5 i problem traženja najkraćih puteva od čvora v. Prvi najbliži čvor čvoru v je jedan od direktnih suseda čvora v i to onaj do kog vodi najkraća grana, a to je čvor b. Drugi najbliži čvor je ili neki drugi sused čvora v ili neki čvor do kog vodi grana iz čvora b (kao prvog najbližeg čvora čvoru v) – to će biti čvor a do kog vodi put v, b, a dužine $2+1 = 4$. Treći najbliži čvor čvoru v biće čvor d na rastojanju $2 + 1 + 1 = 4$, a četvrti najbliži čvor biće čvor c do kog vodi direktna grana iz čvora v.

Induktivna hipoteza: Za zadati graf i njegov čvor v, umemo da pronađemo k čvorova najbližih čvoru v, kao i dužine najkraćih puteva do njih.

Zapazimo da je indukcija po broju čvorova do kojih su dužine najkraćih puteva već izračunate, a ne po veličini grafa. Pored toga, pretpostavlja se da su to čvorovi najbliži čvoru v, i da umemo da ih pronađemo. Mi umemo da pronađemo prvi najbliži čvor, pa je baza (slučaj $k = 1$) rešena. Kad k dobije vrednost $|V| - 1$, rešen je kompletan problem.

Označimo sa V_k skup koji se sastoji od k najbližih čvorova čvoru v, uključujući i v. Problem je pronaći čvor w koji je najbliži čvoru v među čvorovima van V_k, i pronaći najkraći put od v do w. Najkraći put od v do w može da sadrži samo čvorove iz V_k. On ne može da sadrži neki čvor y van V_k, jer bi u tom slučaju čvor y bio bliži čvoru v od čvora w. Prema tome, da bismo pronašli čvor w, dovoljno je da proverimo grane koje spajaju čvorove iz V_k sa čvorovima koji nisu u V_k; sve druge grane se za sada mogu ignorisati. Neka je (u, z) proizvoljna grana grafa G takva da je $u \in V_k$ i $z \notin V_k$. Takva grana određuje put od v do z koji se sastoji od najkraćeg puta od v do u (prema induktivnoj hipotezi već poznat) i grane (u, z). Dovoljno je uporediti sve takve puteve i izabrati najkraći među njima (slika 6).

Algoritam određen ovom induktivnom hipotezom izvršava se na sledeći način.



Slika 6: Nalaženje sledećeg najbližeg čvora zadatom čvoru v.

U svakoj iteraciji dodaje se novi čvor u skup V_k. To je čvor $w \notin V_k$ za koji je najmanja vrednost izraza:

$$\min \{u.SP + duzina(u, w) | \, u \in V_k\} \tag{1}$$

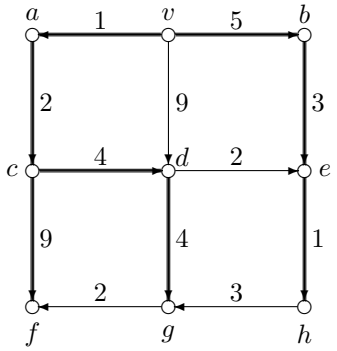
među svim čvorovima $w \notin V_k$. Iz već iznetih razloga, w je zaista $(k+1)$-vi (sledeći) najbliži čvor čvoru v. Prema tome, njegovo dodavanje skupu V_k produžuje induktivnu hipotezu.

Algoritam je sada u potpunosti preciziran, ali mu se efikasnost može poboljšati. Osnovni korak algoritma je pronalaženje sledećeg najbližeg čvora. To se ostvaruje izračunavanjem dužine najkraćeg puta prema formuli (1). Međutim, nije neophodno u svakom koraku proveravati sve vrednosti $u.SP + duzina(u, w)$. Većina tih vrednosti ne menja se pri dodavanju novog čvora u skup V_k: mogu se promeniti samo one vrednosti koje odgovaraju putevima kroz novododati čvor. Mi možemo da pamtimo dužine poznatih najkraćih puteva do svih čvorova van V_k, i da im popravljamo vrednosti samo pri proširivanju skupa V_k. Jedini način da se dobije novi najkraći put nakon dodavanja čvora w u V_k je da taj put prolazi kroz novododati čvor w. Prema tome, treba proveriti sve grane od čvora w ka čvorovima van V_k. Za svaku takvu granu (w, z) upoređujemo dužinu $w.SP + duzina(w, z)$ sa trenutnom vrednošću $z.SP$, i po potrebi popravljamo vrednost $z.SP$. Svaka iteracija obuhvata nalaženje čvora sa najmanjom vrednošću SP, i popravku vrednosti SP za neke od preostalih čvorova. Ovaj algoritam dobio je naziv *Dajkstrin algoritam* po Edzgaru Dajkstri koji ga je osmislio 1956. godine. On pripada grupi pohlepnih algoritama jer se u svakom koraku bira lokalno optimalno rešenje – najbliži čvor i nakon odabira trenutno najbližeg čvora rastojanje do njega se više nikada ne razmatra.

Najkraće puteve od čvora v do svih ostalih čvorova našli smo tako što smo

puteve pronalazili jedan po jedan. Svaki novi put je određen jednom granom, koja produžuje prethodno poznati najkraći put do novog čvora. Sve te grane formiraju drvo sa korenom u čvoru v. Ovo drvo zove se *drvo najkraćih puteva*, i važno je za rešavanje mnogih problema sa putevima. Ako bi dužine svih grana bile međusobno jednake, onda bi drvo najkraćih puteva u stvari bilo BFS drvo sa korenom u čvoru v. U primeru na slici 7 podebljane su grane koje pripadaju drvetu najkraćih puteva sa korenom u čvoru v. Primetimo da npr. najkraći put do čvora h dobijamo tako što granom (e, h) produžimo prethodno pronađeni najkraći put do čvora e: v, b, e.

Primer: Ilustracija izvršavanja Dajkstrinog algoritma za nalaženje najkraćih puteva od čvora v prikazana je na slici 7. Prva vrsta tabele odnosi se samo na puteve koji se sastoje od jedne grane koja polazi iz čvora v. Bira se najkraći od tih puteva (grana) i u ovom slučaju on vodi ka čvoru a. Druga vrsta tabele pokazuje popravke dužina najkraćih puteva uključujući sada sve puteve koji se sastoje od jedne grane koja polazi iz čvora v ili od dve grane preko čvora a, i najkraći put u ovom slučaju vodi do čvora c. U svakoj vrsti tabele bira se novi, naredni najbliži čvor, i prikazuju se dužine trenutnih najkraćih puteva od v do svih čvorova. Podebljana su rastojanja za koja se pouzdano zna da su najkraća. Na osnovu tabele moguće je rekonstruisati i same najkraće puteve. Npr. ako želimo da saznamo koji je to najkraći put od čvora v do čvora h dužine 9, razmatramo kolonu koja odgovara čvoru h i tražimo poslednju promenu vrednosti u toj koloni – ona odgovara vrsti označenoj čvorom e i to znači da je čvor e roditeljski čvor čvora h. Zatim, na osnovu tabele određujemo roditeljski čvor čvora e, gledajući kolonu tabele koja odgovara čvoru e i utvrđivanjem na kom čvoru se desila poslednja promena vrednosti u ovoj tabeli – to je čvor b te je on roditeljski čvor čvora e, dok je roditeljski čvor čvora b polazni čvor v. Konačno, najkraći put rekonstruišemo čitajući dobijeni niz čvorova unazad i kao najkraći put od čvora v do čvora h dobijamo put v, b, e, h.



	v	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	1	5	∞	9	∞	∞	∞	∞
c	0	**1**	5	3	9	∞	∞	∞	∞
b	0	**1**	5	**3**	7	∞	12	∞	∞
d	0	**1**	**5**	**3**	7	8	12	∞	∞
e	0	**1**	**5**	**3**	**7**	8	12	11	∞
h	0	**1**	**5**	**3**	**7**	**8**	12	11	9
g	0	**1**	**5**	**3**	**7**	**8**	12	11	**9**
f	0	**1**	**5**	**3**	**7**	**8**	12	**11**	**9**

Slika 7: Primer izvršavanja Dajkstrinog algoritma.

U Dajkstrinom algoritmu potrebno je da pronalazimo najmanju vrednost u skupu dužina puteva i da često popravljamo dužine puteva. Dobra struktura podataka

za nalaženje minimalnih elemenata i za popravke dužina elemenata je red sa prioritetom, odnosno min-hip. Pošto je potrebno da pronađemo čvor do koga je dužina puta najmanja, sve čvorove van skupa V_k čuvamo u hipu, sa ključevima jednakim dužinama trenutno najkraćih puteva od v do njih. Na početku su sve dužine puteva osim one do čvora v jednake ∞, pa redosled elemenata u hipu nije bitan, sem što čvor v mora biti na vrhu. Nalaženje čvora w koji je među čvorovima van V_k najbliži čvoru v je jednostavno: on se uzima sa vrha hipa. Posle toga za svaku granu (w, u) proverava se da li korišćenje te grane skraćuje put do čvora u. Međutim, kad se promeni dužina puta do nekog čvora u, može se promeniti položaj čvora u u hipu. Prema tome, potrebno je na odgovarajući način popravljati hip. S obzirom da se putevi do čvora mogu samo skratiti, to znači da se vrednost ključa u hipu može smanjiti i eventualno postati manja od vrednosti ključa svog roditelja (pošto je prethodna vrednost elementa bila manja od vrednosti njegove dece u hipu, to će važiti i za smanjenu vrednost ključa). Operacija smanjivanja vrednosti ključa u min-hipu nije direktno podržana u standardnoj biblioteci, ali se odgovarajuća popravka hipa može izvesti razmenom vrednosti elementa i njegovog roditelja, sve dok uslov hipa ne bude zadovoljen. Ova operacija se dakle može izvesti u složenosti $O(\log n)$, gde je n broj elemenata u hipu. Međutim, problem sa ovim popravkama je u tome što hip kao struktura podataka ne podržava efikasno pronalaženje zadatog elementa. Naime, pretraga elementa u hipu izvršava se u linearnoj vremenskoj složenosti u odnosu na broj elemenata u hipu. Iz tog razloga umesto da se vrednost rastojanja do nekog čvora u hipu zameni novom (manjom) vrednošću, vršiće se umetanje novog čvora sa istom oznakom čvora i novom (manjom) vrednošću rastojanja (ova tehnika se naziva *tehnikom lenjog brisanja*). S obzirom na to da je nova vrednost rastojanja manja od stare, novi čvor će sigurno biti skinut iz hipa pre starog, te je jedino potrebno prilikom uzimanja elementa sa vrha hipa proveriti da li taj čvor nije već ranije bio obrađen.

Ostaje bojazan da ovakva implementacija može da ugrozi vreme izvršavanja operacija. Ukoliko bismo našli način da efikasno pronalazimo elemente u zadatom hipu, u hipu bismo čuvali u svakom trenutku $O(|V|)$ elemenata. Međutim, u implementaciji koja čuva kopije čvorova prilikom obrade svake (usmerene) grane može se dodati maksimalno jedan novi element u hip. Dakle ukupan broj čvorova biće sigurno manji ili jednak od $O(|E|)$, te će svaka od operacija umetanja elementa u hip i brisanja minimalnog elementa iz hipa biti složenosti $O(\log |E|)$. S obzirom na to da važi da je $|E| \leq |V|^2$, i stoga $\log |E| \leq 2 \cdot \log |V|$, složenosti $O(\log |E|)$ i $O(\log |V|)$ se asimptotski ne razlikuju, te će operacije nad hipom koji čuva kopije čvorova biti iste asimptotske složenosti kao i u slučaju kada nema kopija.

Dajkstrin algoritam za nalaženje najkraćih puteva od čvora sa oznakom 0 prikazan je u nastavku.

```
// uredjen par vrednosti rastojanja do cvora i indeksa cvora;
// vazan je redosled komponenti u uredjenom paru
// zbog operacije poredjenja po rastojanju
```

```cpp
typedef pair<int,int> rastojanjeDoCvora;

// tezinski graf predstavljen listom povezanosti
vector<vector<pair<int,int>>> listaSuseda {{{1,3}, {2,1}, {3,2}},
                  {{3,4}, {4,3}}, {{5,3}}, {}, {{6,1}, {7,3}},
                  {{0,2}}, {}, {{1,1}}};

// Dajkstrin algoritam za odredjivanje najkracih puteva
// iz cvora sa indeksom 0 do svih cvorova u grafu
void najkraciPuteviDajkstra(){

  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  // niz koji cuva informaciju o tome da li je cvor posecen
  vector<bool> posecen(brojCvorova,false);
  // niz koji za svaki cvor cuva duzinu najkraceg puta do njega
  vector<int> najkraciPut(brojCvorova,numeric_limits<int>::max());
  // niz koji za svaki cvor cuva roditelja u drvetu najkracih puteva
  vector<int> roditelj(brojCvorova,-1);

  // min-hip u koji smestamo rastojanja do svih cvorova
  priority_queue<rastojanjeDoCvora,vector<rastojanjeDoCvora>,
    greater<rastojanjeDoCvora>> rastojanja;

  // ubacujemo polazni cvor u hip
  // i postavljamo rastojanje do njega na 0
  rastojanja.push(make_pair(0,0));
  najkraciPut[0] = 0;

  // rastojanja do ostalih cvorova postavljamo na
  // maksimalnu mogucu vrednost i ubacujemo ih u hip
  for(int cvor = 1; cvor < brojCvorova; cvor++)
    rastojanja.push(make_pair(numeric_limits<int>::max(),cvor));

  // odredjujemo narednih (brojCvorova-1) cvorova i
  // rastojanja do njih
  for(int i = 0; i < brojCvorova; i++){

    // izdvajamo naredni najblizi cvor
    rastojanjeDoCvora najblizi = rastojanja.top();
    rastojanja.pop();
    int cvor = najblizi.second;

    // ako je taj cvor vec posecen, ne treba ga ponovo brojati
    // i preskacemo njegovu obradu
    if (posecen[cvor]){
      i--;
```

```
      continue;
    }
    // ako cvor nije bio do sada posecen, postavljamo
    // informaciju da smo ga sada posetili
    posecen[cvor] = true;

    // postavljamo vrednost najkraceg puta do njega
    // kroz do sada posecene cvorove
    najkraciPut[cvor] = najblizi.first;
    // stampamo informaciju o najkracem putu do tog cvora
    // na ovaj nacin najkraci putevi se ispisuju u redosledu
    // njihovog "otkrivanja"
    odstampajNajkraciPut(cvor,roditelj,najkraciPut);

    // za sve susede tekuceg cvora
    for (int j = 0; j < listaSuseda[cvor].size(); j++){
       // ako do sada nisu bili poseceni
       if (!posecen[listaSuseda[cvor][j].first]){
          int sused = listaSuseda[cvor][j].first;
          int duzinaGrane = listaSuseda[cvor][j].second;
          // ukoliko je put kroz tekuci cvor do suseda kraci od prethodnog
          // najkraceg puta, azuriramo vrednost najkraceg puta do suseda
          // i vrednost njegovog roditeljskog cvora
          if (najkraciPut[cvor] + duzinaGrane < najkraciPut[sused]){
             najkraciPut[sused] = najkraciPut[cvor] + duzinaGrane;
             roditelj[sused] = cvor;
             // ubacujemo element u hip, ukoliko je
             // postojala prethodna vrednost, ne brisemo je;
             // nova vrednost ce se naci u hipu iznad stare
             rastojanja.push(make_pair(najkraciPut[sused], sused));
           }
        }
     }
  }
}

int main(){
  najkraciPuteviDajkstra();
  return 0;
}
```

Složenost: Kao što smo već pomenuli, operacije umetanja i brisanja iz hipa biće složenosti $O(\log |V|)$. Možemo imati najviše $O(|V| + |E|)$ umetanja u hip (u varijanti sa čuvanjem kopija čvorova) i najviše $O(|V| + |E|)$ brisanja iz hipa. Prema tome, vremenska složenost algoritma je $O((|V| + |E|) \log |V|)$. Zapaža se da je algoritam sporiji nego algoritam koji isti problem rešava za acikličke

grafove.[1]

Ovaj tip pretrage se ponekad zove *pretraga sa prioritetom* — svakom čvoru dodeljuje se prioritet (u ovom slučaju trenutno najmanje poznato rastojanje od polaznog čvora), pa se čvorovi obilaze redosledom koji je određen prioritetom. Kad se završi razmatranje čvora, proveravaju se sve njemu susedne grane. Ta provera može da dovede do promene nekih prioriteta. Način izvođenja tih promena je detalj po kome se jedna pretraga sa prioritetom razlikuje od druge. Pretraga sa prioritetom je karakteristična za težinske grafove i složenija je od obične pretrage.

Belman-Fordov algoritam

Razmotrimo sada problem traženja najkraćih puteva iz zadatog čvora u opštem slučaju, kada težine grana mogu biti i negative. Prirodno je zapitati se da li negativne težine grana imaju ikakvog smisla. Naime, u kontekstu rastojanja na mapama nemaju, međutim pokazuje se da težinski grafovi čije težine mogu biti i pozitivne i negativne nisu neuobičajeni u modelovanju nekih realnih problema. Npr. razmotrimo problem merenja razlike u nadmorskoj visini između mesta u kom se nalazimo i mesta u koje putujemo. Kretanje uzbrdo modelovaćemo granom pozitivne težine, a kretanje nizbrdo granom negativne težine.

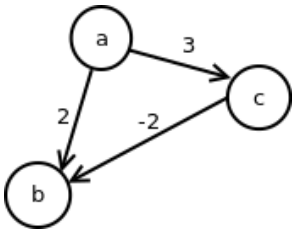
Drugi problem koji možemo modelovati na ovaj način je problem održavanja salda na računu: izvršavanje različitih transakcija može dovesti do zarade – koju ćemo modelovati granom pozitivne težine ili do gubitka – koji ćemo modelovati granom negativne težine. Na primer, možemo modelovati problem konverzije iz jedne novčane valute u drugu: pri svakoj konverziji možemo nešto zaraditi ili izgubiti. Na primer, ako dolare konvertujemo u funte, pa ih onda konvertujemo u eure i onda u japanske jene, može se desiti da završimo sa više novca u odnosu na ono sa čime smo krenuli.

Razmotrimo, takođe, problem putovanja iz jednog grada u drugi, pri čemu je moguće na nekom od delova puta pokupiti nekog putnika i zaraditi određenu količinu novca na tom delu puta. Cilj nam je da dođemo od jednog grada do drugog na najjefitniji način. Ovaj problem možemo modelovati u vidu problema traženja najkraćeg puta u grafu čije težine mogu biti pozitivne (ako na tom delu puta putujemo sami) ili negativne (ako na nekom delu puta pokupimo jednog ili više putnika i od njih zaradimo više novca nego što su troškovi tog dela puta).

Ukoliko graf sadrži neku granu negativne dužine, Dajkstrin algoritam ne mora da vrati tačan rezultat.

Na primer, ako bismo želeli da odredimo najkraće puteve iz čvora a do svih ostalih čvorova u grafu sa slike 8 i primenimo Dajkstrin algoritam on bi najpre odredio najkraći put do čvora b (kao čvora koji je od svih čvorova do kojih

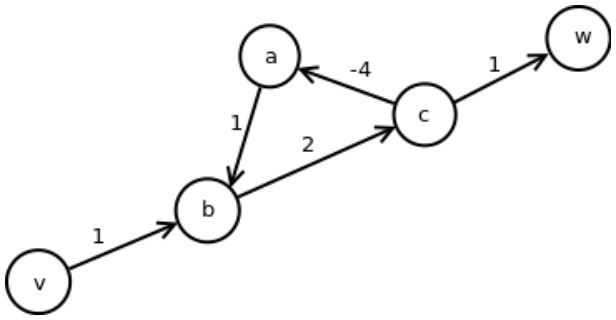
[1] Ukoliko bi se umesto binarnog hipa koristio Fibonačijev hip, vremenska složenost Dajkstrinog algoritma bila bi jednaka $O(|E| + |V| \log |V|)$.



Slika 8: Primer grafa koji sadrži granu negativne dužine i za koji Dajkstrin algoritam ne računa dobro najkraća rastojanja.

postoji grana iz a najbliži čvoru a) i proglasio bi da je on dužine 2, a nakon toga bi odredio najkraći put do drugog najbližeg čvora c i proglasio bi da je dužina najkraćeg puta do njega 3 i putevi do ova dva čvora se ne bi dalje razmatrali. Međutim, jasno je da najkraći put od čvora a do čvora b vodi preko čvora c i dužine je 1, ali Dajkstrin algoritam ne bi razmatrao ovaj put.

Ukoliko graf ima negativne dužine grana, ali ne sadrži ciklus negativne dužine, najkraći putevi iz datog čvora v mogu se odrediti tzv. *Belman-Fordovim algoritmom*. Ričard Belman i Lester Ford su prvi objavili ovaj algoritam 1958. i 1959. godine, međutim, smatra se da je ipak prvi do njega došao Alfonso Simbel 1955. godine. Uslov da graf ne sadrži ciklus negativne dužine je prirodan jer inače najkraći putevi ne bi mogli biti određeni. Razmotrimo primer grafa sa slike 9: najkraći put od čvora v do čvora w ne bi se mogao odrediti jer bi svaki prolazak kroz ciklus b, c, a, b smanjivao dužinu puta za 1.



Slika 9: Primer grafa koji sadrži ciklus negativne dužine.

Osnovni korak u Belman-Fordovom algoritmu je kao i u tzv. Dajkstrinom algoritmu tzv. relaksacija grane (u, w), odnosno provera da li je vrednost $w.SP$ trenutno najkraćeg utvrđenog rastojanja do čvora w veća od vrednosti $u.SP + duzina(u, w)$; ako je to tačno, popravlja se vrednost $w.SP$ i pamti da najkraći put do čvora w vodi kroz čvor u. Ideja Belman-Fordovog algoritma je da se ukupno $|V| - 1$ put izvrši relaksacija svih grana u grafu u proizvoljnom redosledu grana. Tvrdimo da će nakon toga biti korektno izračunati najkraći

putevi od čvora v do svih čvorova u grafu. Za čvorove koji su nedostižni iz početnog čvora, dužina najkraćeg puta ostaće jednaka ∞.

```
// funkcija koja koriscenjem Belman-Fordovog algoritma
// racuna najkrace puteve do svih cvorova
void najkraciPuteviBelmanFord(){

  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  // niz koji za svaki cvor cuva duzinu najkraceg puta do njega
  vector<int> najkraciPut(brojCvorova,numeric_limits<int>::max());
  // niz koji za svaki cvor cuva njegovog prethodnika u
  // najkracem putu
  vector<int> roditelj(brojCvorova,-1);

  najkraciPut[0] = 0;

  // |V|-1 put prolazimo kroz skup svih grana
  for (int k = 0; k < brojCvorova - 1; k++)
    for (int i = 0; i < listaSuseda.size(); i++)
      for (int j = 0; j < listaSuseda[i].size(); j++){

         int sused = listaSuseda[i][j].first;
         int grana = listaSuseda[i][j].second;
         // ukoliko je potrebno vrsimo relaksaciju grane
         if (najkraciPut[i] + grana < najkraciPut[sused]){
             najkraciPut[sused] = najkraciPut[i] + grana;
             // i postavljamo koji cvor mu prethodi na najkracem putu
             roditelj[sused] = i;
         }
      }

  // ukoliko i dalje postoji put koji je moguce skratiti
  // onda graf sadrzi ciklus negativne duzine
  for (int i = 0; i < listaSuseda.size(); i++)
    for (int j = 0; j < listaSuseda[i].size(); j++){

      int sused = listaSuseda[i][j].first;
      int grana = listaSuseda[i][j].second;
      if (najkraciPut[i] + grana < najkraciPut[sused]){
         cout << "Graf sadrzi ciklus negativne duzine" << endl;
         return;
      }
    }

  // stampamo najkrace puteve do svih cvorova u grafu
  for(int i = 0; i < brojCvorova; i++)
```

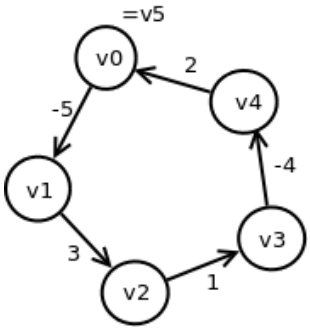
```
    odstampajNajkraciPut(i, roditelj, najkraciPut);
}

int main(){
  najkraciPuteviBelmanFord();
  return 0;
}
```

Dokažimo korektnost ovog algoritma. Neka je n broj čvorova u grafu. Označimo sa $d_k(i)$ vrednost promenljive `najkraciPut[i]` nakon izvršavanja k iteracija spoljašnje `for` petlje. Dokažimo korektnost ovog algoritma.

Tvrđenje: Ukoliko u grafu G postoji ciklus negativne dužine koji je dostižan iz početnog čvora v, onda postoji grana $(u, w) \in E$ koja se može relaksirati, tj. za koju važi $d_{n-1}(w) > d_{n-1}(u) + duzina(u, w)$; ako graf G ne sadrži ciklus negativne dužine, onda za svaki čvor $u \in V$ važi da je $d_{n-1}(u)$ jednako najkraćem rastojanju od čvora v do čvora u.

Dokaz: Pokažimo najpre prvo tvrđenje. Pretpostavimo da G sadrži ciklus negativne dužine $c = (v_0, v_1, \ldots, v_k), v_k = v_0$, dostižan iz čvora v (slika 10).



Slika 10: Ciklus negativne dužine.

Tada je:

$$\sum_{i=1}^{k} duzina(v_{i-1}, v_i) < 0 \tag{2}$$

Pretpostavimo suprotno, da za svaku granu $(u, w) \in E$ važi $d_{n-1}(w) \leq d_{n-1}(u) + duzina(u, w)$. Onda i za svaku granu ciklusa $(v_{i-1}, v_i) \in E, i = 1, \ldots, k$ važi:

$$d_{n-1}(v_i) \leq d_{n-1}(v_{i-1}) + duzina(v_{i-1}, v_i).$$

Sabiranjem ovih nejednakosti za sve grane ciklusa dobija se:

$$\sum_{i=1}^{k} d_{n-1}(v_i) \leq \sum_{i=1}^{k} d_{n-1}(v_{i-1}) + \sum_{i=1}^{k} duzina(v_{i-1}, v_i)$$

Pošto je $v_0 = v_k$, važi:

$$\sum_{i=1}^{k} d_{n-1}(v_i) = \sum_{i=1}^{k} d_{n-1}(v_{i-1})$$

te dalje važi:

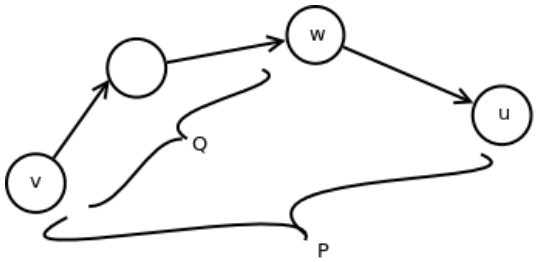
$$\sum_{i=1}^{k} duzina(v_{i-1}, v_i) \geq 0$$

suprotno pretpostavci 2.

Pokažimo sada drugo tvrđenje: ako graf ne sadrži ciklus negativne dužine, onda za svako $u \in V$ vrednost $d_{n-1}(u)$ sadrži dužinu najkraćeg puta od čvora v do čvora u. Pokazaćemo indukcijom po k da $d_k(u)$ sadrži minimalnu dužinu puta od v do u koji se sastoji od najviše k grana. Ako ovo važi, onda je $d_{n-1}(u)$ minimalna dužina puta od čvora v do čvora u koji se sastoji od maksimalno $n-1$ grana. Ovo je sigurno i dužina najkraćeg puta između ova dva čvora jer iz činjenice da graf ne sadrži ciklus negativne dužine sledi da najkraći put ne sadrži ponovljene čvorove, te se sastoji od maksimalno $n-1$ grana.

Bazni slučaj (za $k = 0$) je jednostavan, važi da je $d_k(u) = 0$ ako je $u = v$, a inače je $d_k(u) = \infty$. Stoga tvrđenje važi jer put dužine 0 postoji samo od nekog čvora do njega samog i dužine je 0.

Induktivna hipoteza: Pretpostavimo da za sve čvorove u važi da je $d_{k-1}(u)$ minimalna dužina puta od v do u koji se sastoji od najviše $k-1$ grana.



Slika 11: Ilustracija uz dokaz korektnosti Belman-Fordovog algoritma.

Neka je P najkraći put od čvora v do čvora u sa najviše k grana i neka je w čvor neposredno ispred u na putu P. Označimo deo puta P od čvora v do čvora w sa

Q. Tada se put Q sastoji od najviše $k-1$ grana i mora biti najkraći mogući put od v do w koji se sastoji od maksimalno $k-1$ grana (inače bismo u najkraćem putu P deo Q zamenili kraćim putem od v do w). Prema induktivnoj hipotezi dužina puta Q jednaka je $d_{k-1}(w)$.

U k-toj iteraciji spoljašnje `for` petlje razmatraju se sve grane grafa, pa i grana (w, u). Proverava se da li je zbir dužine grane (w, u) i trenutno najkraćeg puta do čvora w manji od trenutno najkraćeg puta do čvora u i ako jeste, vrši se ažuriranje. Dakle, važi jednakost:

$$d_k(u) = \min\{d_{k-1}(u), d_{k-1}(w) + duzina(w, u)\}.$$

Znamo da važi

$$d_{k-1}(w) + duzina(w, u) = duzina(Q) + duzina(w, u) = duzina(P)$$

pa stoga važi da je:

$$d_k(u) \leq duzina(P) \tag{3}$$

Takođe, s obzirom na to da je $d_{k-1}(u)$ dužina najkraćeg prostog puta od v do u koji se sastoji od najviše $k-1$ grana, važi:

$$d_{k-1}(u) \geq duzina(P) \tag{4}$$

jer P razmatra veći broj grana (ima veći broj opcija na raspolaganju).

Iz nejednakosti (3) i (4) sledi

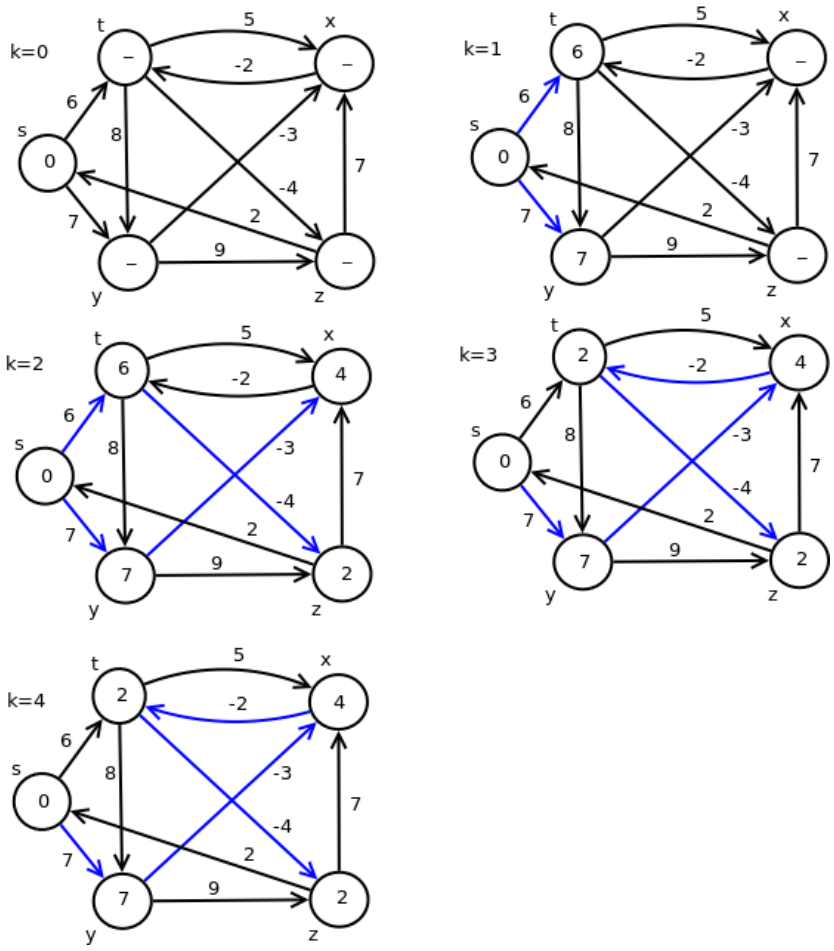
$$d_k(u) = duzina(P)$$

, odnosno $d_k(u)$ je minimalna dužina puta od čvora v do čvora u koji koristi najviše k grana. □

Primetimo da se relaksacija grana ne mora vršiti istim redosledom u svakoj od iteracija, jer će svaki redosled obilaska grana očuvati invarijantu: da je nakon k iteracija vrednost $d_k(u)$ jednaka minimalnoj dužini puta od v do u koji se sastoji od maksimalno k grana.

Složenost Belman-Fordovog algoritma iznosi $O(|V| \cdot |E|)$, jer spoljašnjom `for` petljom prolazimo $O(|V|)$ puta, a u svakoj iteraciji ove petlje prolazimo skupom svih grana u grafu.

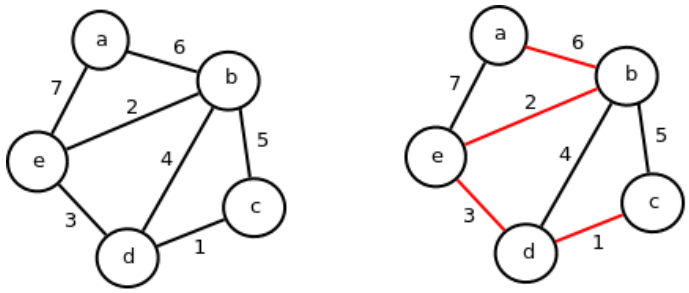
Na slici **??** ilustrovano je izvršavanje Belman-Fordovog algoritma.



Slika 12: Primer izvršavanja Belman-Fordovog algoritma. Graf ima 5 čvorova, te se algoritam sastoji od 4 iteracija, za $k = 1, 2, 3, 4$. Prva slika odgovara inicijalizaciji, a naredne slike pojedinačnim prolazima kroz sve grane. Vrednosti d_k prikazane su unutar čvorova, a grane plave boje vode od prethodnika čvorova na (trenutno) najkraćim putevima: ako je grana (u, v) plave boje, onda se do čvora v najkraćim putem dolazi preko čvora u. U svakom prolazu grane se relaksiraju u narednom redosledu: $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$.

Minimalno povezujuće drvo

Razmotrimo sistem računara koje treba povezati optičkim kablovima. Potrebno je obezbediti da postoji veza između svaka dva računara. Poznati su troškovi postavljanja kabla između svaka dva računara. Cilj je projektovati mrežu optičkih kablova tako da ukupna cena mreže bude minimalna. Sistem računara može biti predstavljen grafom čiji čvorovi odgovaraju računarima, a grane – potencijalnim vezama između računara, sa odgovarajućim (pozitivnim) cenama. Onda se problem svodi na pronalaženje povezanog podgrafa (sa granama koje odgovaraju postavljenim optičkim kablovima), koji sadrži sve čvorove, takav da mu ukupna suma cena grana bude minimalna (slika 13). Nije teško videti da taj podgraf mora da bude drvo. Naime, ako bi podgraf imao ciklus, onda bi se iz ciklusa mogla ukloniti jedna grana — time se dobija podgraf koji je i dalje povezan, a ima manju cenu, jer su cene grana pozitivne. Traženi podgraf zove se *minimalno povezujuće (razapinjuće) drvo* (MCST, skraćenica od eng. minimum–cost spanning tree) i ima mnogo primena. Slično se može rešiti i problem povezivanja N gradova autoputevima, tako da postoji put između svaka dva grada, a da ukupna cena izgradnje autoputa bude minimalna moguća. Minimalno povezujuće drvo se koristi i kod konstrukcije približnih algoritama, na primer, za rešavanje problema trgovačkog putnika.



Slika 13: Težinski graf i njegovo minimalno povezujuće drvo.

Dakle, problem je konstruisati efikasan algoritam za nalaženje minimalnog povezujućeg drveta. Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da su cene grana različite. Ova pretpostavka ima za posledicu da je minimalno povezujuće drvo jedinstveno, što olakšava rešavanje problema. Bez ove pretpostavke algoritam ostaje nepromenjen, izuzev što se, prilikom nailaska na grane jednake cene, proizvoljno bira jedna od njih.

Problem: Za zadati neusmereni povezani težinski graf $G = (V, E)$ konstruisati povezujuće drvo T minimalne cene.

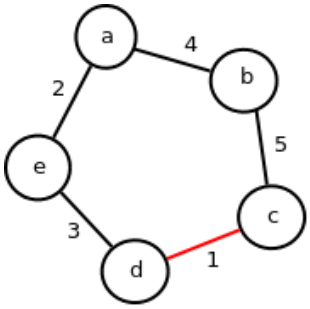
Primov algoritam

U kontekstu ovog problema težine grana težinskog grafa G su u stvari njihove cene. Prirodno je koristiti sledeću induktivnu hipotezu.

Induktivna hipoteza: Umemo da konstruišemo minimalno povezujuće drvo za povezani graf sa manje od m grana.

Bazni slučaj je trivijalan. Ako je zadat problem konstrukcije minimalnog povezujućeg drveta sa m grana, kako se on može svesti na problem sa manje od m grana? Tvrdimo da grana najmanje cene mora biti uključena u minimalno povezujuće drvo. Ako ona ne bi bila uključena, onda bi njeno dodavanje minimalnom povezujućem drvetu zatvorilo neki ciklus; uklanjanjem proizvoljne druge grane iz tog ciklusa ponovo se dobija drvo, ali manje cene — što je u suprotnosti sa pretpostavkom o minimalnosti konstruisanog povezujućeg drveta. Dakle, mi znamo jednu granu koja mora da pripada minimalnom povezujućem drvetu. Možemo da je uklonimo iz grafa i primenimo induktivnu hipotezu na ostatak grafa, koji sada ima manje od m grana. Da li je ovo regularna primena indukcije?

Prvi problem je u tome što posle uklanjanja grane, dobijeni problem nije ekvivalentan polaznom. Prvo, izbor jedne grane ograničava mogućnosti izbora drugih grana. Razmotrimo primer grafa sa slike 14. Grana (c, d) je grana minimalne cene u grafu, i ako nju uklonimo i problem svedemo na traženje minimalnog povezujućeg drveta u grafu G bez grane (c, d) dobili bismo da njega čine sve ostale grane u ciklusu: grane $(a, b), (b, c), (d, e)$ i (e, f). Dodavanjem grane (c, d) u ovo minimalno povezujuće drvo dobijamo ciklus, a znamo da ciklus ne može biti deo minimalnog povezujućeg drveta.



Slika 14: Graf koji je u obliku ciklusa.

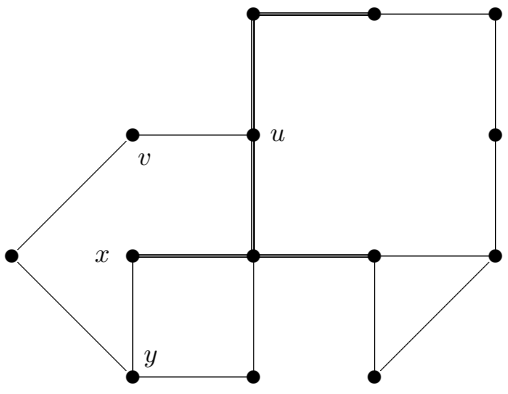
Drugi problem sa primenom ovakve induktivne hipoteze je taj što nakon uklanjanja grane graf ne mora da ostane povezan.

Rešenje nastalog problema je u preciziranju induktivne hipoteze. Mi znamo kako da izaberemo prvu granu, ali ne možemo da je uklonimo i prosto zaboravimo na nju, jer ostali izbori zavise od nje. Dakle, umesto da granu uklonimo, treba da naznačimo da je ona uključena u minimalno povezujuće drvo, i da tu činjenicu,

njen izbor, koristimo dalje u algoritmu. Algoritam se izvršava tako što se jedna po jedna grana bira i dodaje u minimalno povezujuće drvo. Prema tome, indukcija je ne prema veličini grafa, nego prema broju *izabranih grana* u zadatom (fiksiranom) grafu.

Induktivna hipoteza: Za zadati povezan graf $G = (V, E)$ umemo da pronađemo podgraf – drvo T sa k grana ($k < |V| - 1$), tako da je drvo T podgraf minimalnog povezujućeg drveta grafa G.

Bazni slučaj za ovu hipotezu smo već razmotrili — on se odnosi na izbor prve grane. Pretpostavimo da smo pronašli drvo T koje zadovoljava induktivnu hipotezu i da je potrebno da T proširimo narednom granom. Kako da pronađemo novu granu za koju ćemo biti sigurni da pripada minimalnom povezujućem drvetu? Primenićemo sličan pristup kao i pri izboru prve grane. Za T se već zna da je deo konačnog minimalnog povezujućeg drveta. Zbog toga u minimalnom povezujućem drvetu mora da postoji bar jedna grana koja povezuje neki čvor iz T sa nekim čvorom u ostatku grafa. Pokušaćemo da pronađemo takvu granu. Neka je E_k skup svih grana koje povezuju T sa čvorovima van T. Tvrdimo da grana sa najmanjom cenom iz E_k pripada minimalnom povezujućem drvetu. Označimo tu granu sa (u, v) (videti sliku 15; grane drveta T su podebljane). Pošto je drvo koje konstruišemo povezujuće, ono sadrži tačno jedan put od u do v jer između svaka dva čvora u drvetu postoji tačno jedan put. Ako grana (u, v) ne bi pripadala minimalnom povezujućem drvetu, onda ona ne bi pripadala ni putu od u do v. Međutim, pošto u pripada, a v ne pripada T, na tom putu mora da postoji bar još jedna grana (x, y) takva da $x \in T$ i $y \notin T$. Cena ove grane veća je od cene (u, v), jer je cena (u, v) najmanja među cenama grana koje povezuju T sa ostatkom grafa. Sada možemo da primenimo slično zaključivanje kao pri izboru prve grane. Ako granu (u, v) dodamo drvetu minimalnom povezujućem drvetu, a iz njega izbacimo granu (x, y), dobijamo povezujuće drvo manje cene, što je kontradikcija.



Slika 15: Nalaženje sledeće grane minimalnog povezujućeg drveta.

Opisani algoritam poznat je pod nazivom *Primov algoritam* i sličan je Dajkstri-

nom algoritmu za nalaženje najkraćih puteva od zadatog čvora. Interesantno je ovaj algoritam prvi osmislio Vojteh Jarnik 1930. godine, a da su tek kasnije nezavisno do njega došli Robert Prim 1957. godine i Edzger Dajkstra 1959. godine.

Prva izabrana grana je grana sa najmanjom cenom. Drvo T se inicijalizuje na drvo sa samo tom jednom granom. U svakoj iteraciji pronalazi se grana koja povezuje T sa nekim čvorom van T, a ima najmanju cenu. U algoritmu za nalaženje najkraćih puteva od zadatog čvora tražili smo najkraći put do čvora van T. Prema tome, jedina razlika između algoritma za konstrukciju minimalnog povezujućeg drveta i algoritma za nalaženje najkraćih puteva je u tome što se minimum ne traži po dužini puta, već po ceni grane. Ostatak algoritma prenosi se praktično bez promene. Za svaki čvor w van T pamtimo cenu grane minimalne cene do w od nekog čvora iz T, odnosno ∞ ako takva grana ne postoji. U svakoj iteraciji mi biramo granu najmanje cene i povezujemo odgovarajući čvor w sa drvetom T. Zatim proveravamo sve grane susedne čvoru w. Ako je cena neke takve grane (w, z) (za $z \notin T$) manja od cene trenutno najjeftinije poznate grane do z, onda ažuriramo cenu čvora z i granu koja kroz drvo vodi do njega.

```
// uredjen par vrednosti rastojanja do cvora i indeksa cvora
// vazan je redosled komponenti zbog operacije poredjenja po rastojanju
typedef pair<int,int> rastojanjeDoCvora;

vector<vector<pair<int,int>>> listaSuseda {{{1,7}, {2,6}},
      {{0,7}, {2,2}, {3,3}}, {{0,6}, {1,2}, {3,4}, {4,5}},
      {{1,3}, {2,4}, {4,1}}, {{2,5}, {3,1}}};

// Primov algoritam za odredjivanje minimalnog povezujuceg drveta
void minimalnoPovezujuceDrvoPrim(){

  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  // niz koji cuva informaciju o tome da li je cvor posecen
  vector<bool> posecen(brojCvorova,false);
  // niz koji za svaki cvor cuva duzinu najkrace grane koja vodi do njega
  vector<int> najkracaGrana(brojCvorova,numeric_limits<int>::max());
  // niz koji za svaki cvor cuva roditelja u minimalnom povezujucem drvetu
  vector<int> roditelj(brojCvorova,-1);

  // hip u koji smestamo duzine najkracih grana do svih cvorova
  priority_queue<rastojanjeDoCvora,vector<rastojanjeDoCvora>,
    greater<rastojanjeDoCvora>> rastojanja;

  // odredjujemo granu minimalne tezine
  int min = numeric_limits<int>::max();
  int min_beg = -1;
  int min_end = -1;
  for (int i = 0; i < listaSuseda.size(); i++)
```

```
  for (int j = 0; j < listaSuseda[i].size(); j++)
    if (listaSuseda[i][j].second < min){
      min = listaSuseda[i][j].second;
      min_beg = i;
      min_end = listaSuseda[i][j].first;
    }

// ubacujemo krajnji cvor grane minimalne tezine u hip
// i postavljamo duzinu grane do njega na 0
rastojanja.push(make_pair(0,min_beg));
najkracaGrana[min_beg] = 0;
roditelj[min_end] = min_beg;

// duzine grana do ostalih cvorova postavljamo na
// maksimalnu mogucu vrednost i ubacujemo ih u hip
for(int cvor = 0; cvor < brojCvorova; cvor++)
  if (cvor != min_beg){
    rastojanja.push(make_pair(numeric_limits<int>::max(),cvor));

// odredjujemo narednih (brojCvorova-1) cvorova i
// duzine najkracih grana do njih
for(int i = 0; i < brojCvorova; i++){

  // izdvajamo naredni cvor sa najmanjom duzinom grane do njega
  rastojanjeDoCvora najblizi = rastojanja.top();
  rastojanja.pop();
  int cvor = najblizi.second;

  // ako je taj cvor vec posecen, onda ga treba preskociti
  // i ne treba ga ponovo brojati
  if (posecen[cvor]){
    i--;
    continue;
  }
  // ako cvor nije bio do sada posecen, postavljamo
  // informaciju da smo ga sada posetili
  posecen[cvor] = true;

  // postavljamo vrednost najkrace grane do njega
  // iz do sada posecenih cvorova
  najkracaGrana[cvor] = najblizi.first;

  // za sve susede tekuceg cvora
  for (int j = 0; j < listaSuseda[cvor].size(); j++){
    // ako do sada nisu bili poseceni
    if (!posecen[listaSuseda[cvor][j].first]){
```

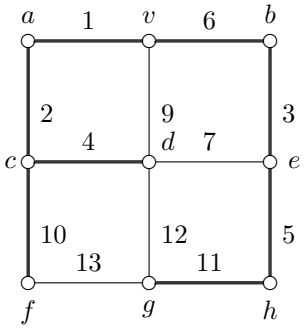
```
            int sused = listaSuseda[cvor][j].first;
            int duzinaGraneSuseda = listaSuseda[cvor][j].second;
            // ukoliko je grana iz tekuceg cvora kraca od
            // prethodno najkrace grane do tog cvora,
            // azuriramo vrednost najkrace grane i roditeljskog cvora
            // preko koga se dolazi do tog cvora
            if (duzinaGraneSuseda < najkracaGrana[sused]){
               najkracaGrana[sused] = duzinaGraneSuseda;
               roditelj[sused] = cvor;
               // ubacujemo element u hip, ukoliko je
               // postojala prethodna vrednost, ne brisemo je;
               // nova vrednost ce se naci u hipu iznad stare
               rastojanja.push(make_pair(najkracaGrana[sused], sused));
            }
          }
        }
    }
    cout << "Minimalno povezujuce drvo se sastoji od grana: " << endl;
    for(int i = 0; i < brojCvorova; i++)
      if (i! = min_beg)
        cout << "(" << roditelj[i] << "," << i << ") cene "
           << najkracaGrana[i] << endl;
}

int main(){
  minimalnoPovezujuceDrvoPrim();
  return 0;
}
```

Složenost Primovog algoritma identična je složenosti Dajkstrinog algoritma za nalaženje najkraćih rastojanja od zadatog čvora i iznosi $O((|E| + |V|) \log |V|)$.

Primer: Primov algoritam za konstrukciju minimalnom povezujućem drvetu ilustrovaćemo primerom na slici 16. Čvor u prvoj koloni tabele je onaj koji je dodat u odgovarajućem koraku. Prvi dodati čvor je v, i u prvoj vrsti navedeni su čvorovi do kojih postoje grane iz čvora v sa svojim cenama. U svakoj vrsti bira se grana sa najmanjom cenom. Spisak trenutno najboljih grana i njihovih cena popravlja se u svakom koraku (prikazani su samo krajevi grana). Na slici grafa su grane koje pripadaju minimalnom povezujućem drvetu podebljane.

Primov algoritam je takođe primer pohlepnog algoritma, jer se u svakom koraku biraju grane sa najmanjom cenom. U algoritmu smo uveli neka dodatna ograničenja pri izboru grana: razmatrane su samo grane povezane sa tekućim drvetom. Zbog toga algoritam nije čisti primer pohlepnog algoritma.



	v	a	b	c	d	e	f	g	h
v	–	$v(1)$	$v(6)$	∞	$v(9)$	∞	∞	∞	∞
a	–	–	$v(6)$	$a(2)$	$v(9)$	∞	∞	∞	∞
c	–	–	$v(6)$	–	$c(4)$	∞	$c(10)$	∞	∞
d	–	–	$v(6)$	–	–	$d(7)$	$c(10)$	$d(12)$	∞
b	–	–	–	–	–	$b(3)$	$c(10)$	$d(12)$	∞
e	–	–	–	–	–	–	$c(10)$	$d(12)$	$e(5)$
h	–	–	–	–	–	–	$c(10)$	$h(11)$	–
f	–	–	–	–	–	–	–	$h(11)$	–
g	–	–	–	–	–	–	–	–	–

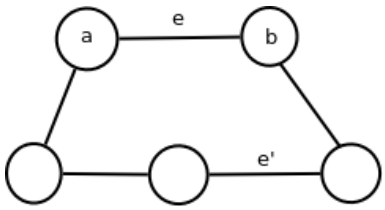
Slika 16: Primer izvršavanja Primovog algoritma za nalaženje minimalnog povezujućeg drveta.

Kruskalov algoritam

Drugi efikasan algoritam za određivanje minimalnog povezujućeg drveta datog neusmerenog težinskog grafa $G = (V, E)$ je takođe pohlepan, ali do minimalnog povezujućeg drveta ne dolazi dodavanjem novih grana na trenutno drvo, nego na trenutnu šumu. Inicijalno svaki čvor grafa predstavlja zasebno drvo i odgovarajuća šuma sadrži $|V|$ drveta i nijednu granu. Zatim se postepeno spajaju po dva drveta ove šume, dodavanjem grana. Na ovaj način smanjuje se broj drveta u šumi i na kraju se dolazi do samo jednog drveta. Pri tome se grane koje se dodaju razmatraju u neopadajućem redosledu cena; ako grana koja je sledeća na redu povezuje dva čvora u različitim drvetima trenutne šume, onda se ta grana uključuje u šumu, čime se ta dva drveta spajaju u jedno. U protivnom, ako grana povezuje dva čvora iz istog drveta trenutne šume, grana se preskače. Ovaj algoritam je prvi objavio Džozef Kruskal 1956. godine i poznat je pod nazivom *Kruskalov algoritam*.

Dokažimo da će ovaj algoritam uvek vratiti minimalno povezujuće drvo datog grafa. Jednostavnosti radi pretpostavimo da su sve cene grana različite. Lako se pokazuje da algoritam vraća povezujuće drvo datog grafa, te ćemo samo pokazati da je ono i minimalno. Pretpostavimo suprotno: da je Kruskalov algoritam vratio drvo K koje nije minimalno povezujuće drvo datog grafa. Označimo sa T minimalno povezujuće drvo datog grafa. Neka su grane oba drveta sortirane u rastućem redosledu svojih cena. Iz $K \neq T$ sledi da postoji barem jedna grana u kojoj se ova dva drveta razlikuju. Razmotrimo najraniju granu $e = (a, b)$ u rastućem redosledu grana prema cenama u kojoj se K i T razlikuju (tj. grana e pripada jednom, a ne pripada drugom drvetu). S obzirom na to da Kruskalov algoritam razmatra grane u rastućem redosledu cena i ne dodaje samo one koje zatvaraju neki ciklus, mora važiti da grana e pripada drvetu K koje je vratio algoritam, a ne pripada minimalnom povezujućem drvetu T (tabela 1). U minimalnom povezujućem drvetu T mora postojati jedinstveni put P od čvora a do čvora b. Na tom putu mora da postoji bar jedna grana e' čija je cena veća od cene grane e (slika 17). Naime, ako to ne bi važilo sve ostale

grane bi bile uključene Kruskalovim algoritmom u drvo K, uz granu e, te bi suprotno pretpostavci drvo K sadržalo ciklus. Ako iz drveta T izbacimo granu e', a dodamo granu e dobijamo povezujuće drvo manje cene što je suprotno pretpostavci da je T minimalno povezujuće drvo datog grafa.



Slika 17: Ilustracija uz dokaz korektnosti Kruskalovog algoritma.

	e_1	e_2	e_3	...	$e = (a, b)$	...
drvo K, pronađeno	√	√	√	√	√	...
drvo T, MCST	√	√	√	√	×	...

Tabela 1: Ilustracija uz dokaz korektnosti Kruskalovog algoritma.

Za utvrđivanje da li su krajnji čvorovi u i v tekuće grane (u, v) u istom ili različitim drvetima trenutne šume, pogodno je koristiti union-find strukturu podataka za disjunktne podskupove: trenutna drveta šume su disjunktni podskupovi skupa čvorova. Operacije `podskup(u)` i `podskup(v)` pronalaze predstavnike u', v' dva podskupa (korene drveta kojim su oni predstavljeni), pa su čvorovi u i v u istom podskupu akko je $u' = v'$. Ako je $u' \neq v'$, onda se ta dva podskupa zamenjuju svojom unijom, tj. primenjuje se operacija `unija(u',v')`, a dva poddrveta se granom spajaju u jedno.

```
// uredjen par vrednosti koji predstavlja granu
typedef pair<int,int> grana;

vector<vector<pair<int,int>>> listaSuseda {{{1,3}, {2,2}}, {{3,1}, {4,2}},
            {{5,3}}, {}, {{6,1}, {7,3}}, {{8,4}}, {}, {}, {}};

// funkcija za inicijalizaciju union-find strukture
void inicijalizuj(vector<int> &roditelj, vector<int> &rang, int n) {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    roditelj[i] = i;
    rang[i] = 0;
  }
}

// funkcija koja izracunava kom podskupu pripada neki element
int predstavnik(int x, vector<int> &roditelj) {
  int koren = x;
```

```
  while (koren != roditelj[koren])
    koren = roditelj[koren];
  while (x != koren) {
    int tmp = roditelj[x];
    roditelj[x] = koren;
    x = tmp;
  }
  return koren;
}

// funkcija koja pravi uniju dva podskupa
void unija(int x, int y, vector<int> &roditelj, vector<int> &rang) {
  int fx = predstavnik(x, roditelj);
  int fy = predstavnik(y, roditelj);
  if (rang[fx] < rang[fy])
     roditelj[fx] = fy;
  else if (rang[fy] < rang[fx])
     roditelj[fy] = fx;
  else {
     roditelj[fx] = fy;
     rang[fy]++;
  }
}

// Kruskalov algoritam za odredjivanje minimalnog povezujuceg drveta
void minimalnoPovezujuceDrvoKruskal(){

  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  // niz koji cuva informaciju o tome da li je cvor posecen
  vector<bool> posecen(brojCvorova,false);
  // niz koji za svaki cvor cuva duzinu najkrace grane koja vodi do njega
  vector<int> najkracaGrana(brojCvorova,numeric_limits<int>::max());
  // niz koji za svaki cvor cuva roditelja u minimalnom povezujucem drvetu
  vector<int> roditelj(brojCvorova);
  // niz koji za svaki cvor cuva njegov rang
  vector<int> rang(brojCvorova);

  // inicijalizujemo union-find strukturu
  // svaki cvor grafa predstavlja podskup za sebe
  inicijalizuj(roditelj, rang, brojCvorova);

  // kreiramo skup svih grana u grafu
  vector<pair<int,grana>> grane;
  for (int i = 0; i < brojCvorova; i++)
    for (int j = 0; j < listaSuseda[i].size(); j++){
      int sused = listaSuseda[i][j].first;
```

```
      int duzinaGrane = listaSuseda[i][j].second;
      grane.push_back({duzinaGrane,{i,sused}});
    }

  // sortiramo skup grana u neopadajucem redosledu cena
  sort(grane.begin(),grane.end());
  int brojGrana = 0;

  // prolazimo redom kroz skup grana
  for(auto it = grane.begin(); it != grane.end(); it++){

    // ako smo u skup grana dodali |V|-1 grana
    // ne treba prolaziti kroz preostale grane
    if (brojGrana == brojCvorova - 1) break;

    int u = it->second.first;
    int v = it->second.second;
    int duzina = it->first;

    int skup_u = predstavnik(u, roditelj);
    int skup_v = predstavnik(v, roditelj);

    // ako tekuca grana povezuje dva cvora koja pripadaju
    // razlicitim drvetima onda tu granu dodajemo u minimalno povezujuce drvo
    // i pravimo uniju skupova cvorova koji pripadaju tim drvetima
    if (skup_u != skup_v){
      unija(skup_u, skup_v, roditelj, rang);
      // ako je u roditelj od v u skupu, onda postavljamo granu do v
      if (u == roditelj[v])
         najkracaGrana[v] = duzina;
      // inace postavljamo granu do u
      else
         najkracaGrana[u] = duzina;
      brojGrana++;
    }
  }

  cout << "Minimalno povezujuce drvo se sastoji od grana: " << endl;
  for(int i = 1; i < brojCvorova; i++)
    cout << "(" << roditelj[i] << "," << i << ") cene "
     << najkracaGrana[i] << endl;
}

int main(){
  minimalnoPovezujuceDrvoKruskal();
  return 0;
```

```
}
```

Funkcija za inicijalizaciju strukture za disjunktne skupove je složenosti $O(|V|)$, dodavanje grana u skup grana je složenosti $O(|E|)$, njihovo sortiranje je prosečne složenosti $O(|E|\log|E|)$, a nakon toga se glavna petlja izvršava $|E|$ puta, dok su operacije koje se pozivaju u petlji (`predstavnik` i `unija`) složenosti $O(\log|V|)$. Dakle, ukupna složenost Kruskalovog algoritma iznosi $O(|V|) + O(|E|) + O(|E|\log|E|) + O(|E|\log|V|) = O(|E|\log|V|)$ (koristimo činjenicu da je $O(\log|E|) = O(\log|V|)$ zbog $|E| \leq |V|^2$).

naredna grana	dužina grane	uključena u MCST?	trenutna šuma
			$v, a, b, c, d, e, f, g, h$
(a, v)	1	da	$\underline{a}v, b, \underline{c}, d, e, f, g, h$
(a, c)	2	da	$acv, \underline{b}, c, d, \underline{e}, f, g, h$
(b, e)	3	da	$a\underline{c}v, be, \underline{d}, e, f, g, h$
(c, d)	4	da	$acdv, b\underline{e}, f, g, \underline{h}$
(e, h)	5	da	$acd\underline{v}, \underline{b}eh, f, g$
(b, v)	6	da	$abc\underline{de}hv, f, g$
(d, e)	7	ne	$abc\underline{d}eh\underline{v}, f, g$
(d, v)	8	ne	$ab\underline{c}deh\underline{v}, \underline{f}, g$
(c, f)	9	da	$abcdef\underline{h}\underline{v}, \underline{g}$
(g, h)	10	da	$abc\underline{d}ef\underline{g}hv$

Tabela 2: Primer izvršavanja Kruskalovog algoritma za graf sa slike 16.

Primer izvršavanja Kruskalovog algoritma na grafu sa slike 16 prikazan je u tabeli 2. Prolazimo redom kroz skup grana u rastućem redosledu cena i završavamo obradu kada u skup dodamo $|V| - 1$ (u ovom slučaju 8) grana. S obzirom na to da su dužine svih grana različite, kao rezultat dobijamo minimalno povezujuće drvo prikazano na slici 16.