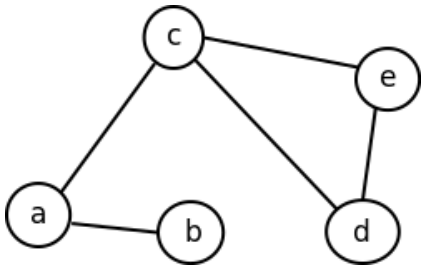
Grafovski algoritmi

Osnovni pojmovi

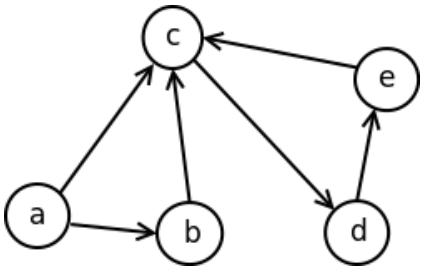
Grafovi su jedna od najkorisnijih struktura podataka. Jedan od najranijih primera grafova čine mreže puteva i odgovarajuće mape. Poznat je slučaj srednjevekovne kopije mape iz petog veka koja je sadržala mrežu puteva Rimskog carstva sa nazivima gradova i dužinama puteva između njih, koja je raspolagala sa dovoljno informacija potrebnih da se pronađe najkraći put između dva grada. Još jedna od klasičnih primena grafova (specijalno drveta) je predstavljanje genealogija. Naime, porodična stabla su vekovima korišćena u svrhe odgovora na pravna pitanja poput pitanja dozvoljenih brakova, nasledstva i nasleđivanja vlasti. Naravno, postoji mnogo drugih poznatih primera primena grafova, kao što su predstavljanje strana i ivica poliedara, komunikacione mreže, električna kola, strukturne formule molekula, društvene igre, traženje izlaza iz lavirinta, a u današnje vreme veoma popularna primena je za modelovanje pojava na društvenim mrežama.

Formalno, graf $G = (V, E)$ se sastoji od skupa V *čvorova* i skupa E *grana* (oznake V i E potiču od početnih slova engleskih reči za teme – vertex i granu – edge). Grana najčešće odgovara paru različitih čvorova, mada su ponekad dozvoljene i petlje, odnosno grane koje vode od čvora ka njemu samom. Graf može biti *neusmeren* (slika 1) ili *usmeren* (slika 3). Grane usmerenog grafa su uređeni parovi čvorova i kod njih je redosled čvorova koje grana povezuje važan. Ako se graf predstavlja grafički, onda se grane usmerenog grafa crtaju kao strelice usmerene od jednog čvora (početka) ka drugom čvoru (kraju grane). Grane neusmerenog grafa su neuređeni parovi čvorova: one se crtaju kao obične duži, bez usmerenja.



Slika 1: Primer neusmerenog grafa.

Susedom čvora v nazvaćemo sve čvorove u do kojih postoji grana iz čvora v. Susedi čvora c u neusmerenom grafu sa slike 1 su čvorovi a, d i e, dok je u usmerenom grafu sa slike 3 jedini sused čvora c čvor d. Primetimo da je u grafu prikazanom na slici 3 čvor c povezan i sa čvorovima a, b i e, međutim, oni nisu



Slika 2: Primer usmerenog grafa.

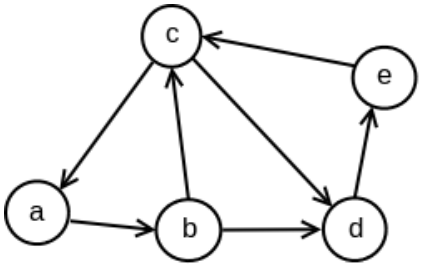
susedi čvora c jer su grane usmerene ka čvoru c. *Stepen* $d(v)$ čvora v je broj grana susednih čvoru v (odnosno broj grana koje čvor v povezuju sa nekim drugim čvorom). U usmerenom grafu razlikujemo *ulazni stepen* čvora v koji je jednak broju grana za koje je čvor v kraj, odnosno *izlazni stepen* čvora v koji je jednak broju grana za koje je čvor v početak. Na primer, stepen čvora c u neusmerenom grafu sa slike 1 je 3, dok za čvor c usmerenog grafa sa slike 3 važi da mu je ulazni stepen jednak 3, a izlazni stepen jednak 1.

Put od čvora v_1 do čvora v_k u grafu $G = (V, E)$ je niz čvorova grafa $v_1, v_2, \ldots, v_k$ povezanih granama grafa $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$. Put je *prost* ako se svaki čvor u njemu pojavljuje samo jednom. Na primer, niz čvorova a, b, c, d, e u usmerenom grafu sa slike 3 predstavlja jedan prost put u tom grafu, dok put b, c, d, e, c nije prost. Za čvor u se kaže da je *dostižan* iz čvora v ako postoji put (usmeren, odnosno neusmeren, zavisno od grafa) od čvora v do čvora u. Npr. čvor e grafa sa slike 3 dostižan je iz čvora a jer postoji put a, c, d, e od čvora a do čvora e. Po definiciji čvor v je dostižan iz čvora v. *Ciklus* je put čiji se prvi i poslednji čvor poklapaju. Ciklus je *prost* ako se, sem prvog i poslednjeg čvora, ni jedan drugi čvor u njemu ne javlja dva puta. Niz čvorova c, d, e predstavlja prost ciklus i u datom usmerenom i u datom neusmerenom grafu.

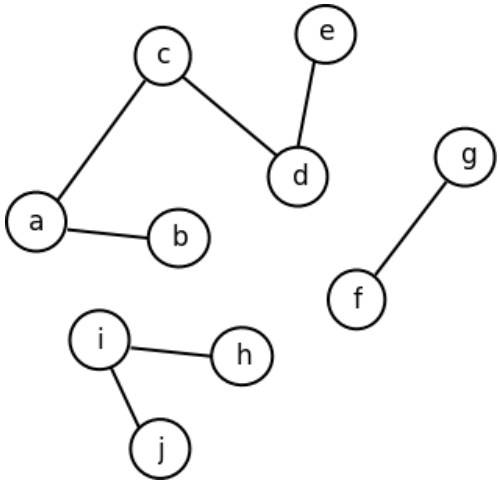
Neusmereni oblik usmerenog grafa $G = (V, E)$ je isti graf, bez smerova na granama (tako da su parovi čvorova u E neuređeni). Za neusmeren graf se kaže da je *povezan* ako postoji put između proizvoljna dva čvora u grafu. Graf sa slike 1 je povezan. Za usmerene grafove razlikujemo pojam slabe i jake povezanosti: usmereni graf je *slabo povezan* ako u njegovom neusmerenom obliku postoji put između svaka dva čvora u grafu, a *jako povezan* ako za svaka dva čvora u i v u grafu postoji usmeren put od čvora u do čvora v i usmeren put od čvora v do čvora u. Graf sa slike 3 je slabo povezan, ali nije jako povezan: od čvora b, na primer, nije moguće stići do čvora a. Međutim, graf sa slike 3 je jako povezan.

Neusmereni graf je *šuma* ako ne sadrži cikluse (slika 4). *Drvo* je povezana šuma.

Graf $H = (U, F)$ je *podgraf* grafa $G = (V, E)$ ako istovremeno važi $U \subseteq V$ i $F \subseteq E$. Na primer, graf sa skupom čvorova $\{a, b, c, d\}$ i skupom grana $\{(a, b), (a, c), (c, d)\}$ je jedan podgraf usmerenog grafa sa slike 3. *Povezujuće drvo* neusmerenog grafa G je njegov podgraf koji je drvo i sadrži sve čvorove

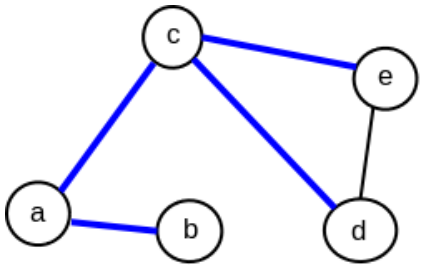


Slika 3: Primer usmerenog grafa koji je jako povezan.



Slika 4: Primer grafa koji je šuma.

grafa G. Na primer, jedno povezujuće drvo neusmerenog grafa sa slike 1 je istaknuto plavom bojom na slici 5: ono bi sadržalo sve čvorove grafa i skup grana $\{(a,b),(a,c),(c,d),(c,e)\}$. *Povezujuća šuma* neusmerenog grafa G je njegov podgraf koji je šuma i sadrži sve čvorove grafa G. Ako neusmereni graf $G = (V, E)$ nije povezan, onda se on može na jedinstven način razložiti u skup povezanih podgrafova, koji predstavljaju klase ekvivalencije za relaciju dostižnosti i koji se nazivaju *komponente povezanosti* grafa G.



Slika 5: Graf i njegovo povezujuće drvo (čije su grane označene plavom bojom).

Predstavljanje grafa

Uobičajena su dva načina predstavljanja grafova. Prvi je *matricom povezanosti*, odnosno *matricom susedstva* grafa (eng. adjacency matrix). Neka je $|V| = n$ i $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Matrica povezanosti grafa G je kvadratna matrica $A = (a_{ij})$ reda n, sa elementima a_{ij} koji su jednaki 1 ako i samo ako $(v_i, v_j) \in E$, odnosno ako postoji grana od čvora v_i do čvora v_j; ostali elementi matrice A imaju vrednost nula. Ako je graf neusmeren, matrica A je simetrična. Vrsta i ove matrice je dakle niz dužine n čija je j-ta koordinata jednaka 1 ako iz čvora v_i vodi grana ka čvoru v_j, odnosno 0 u protivnom. Nedostatak predstavljanja grafa matricom povezanosti je to što ona uvek zauzima prostor veličine n^2, nezavisno od toga koliko grana ima graf. Ako je broj grana u grafu mali, većina elemenata matrice povezanosti biće jednaka nula.

Ako se za predstavljanje grafa koristi matrica povezanosti, složenost operacije dodavanja grane u graf, odnosno operacije uklanjanja grane iz grafa je $O(1)$. Takođe, i ispitivanje da li su dva čvora u grafu povezana granom je složenosti $O(1)$. Prolazak kroz sve čvorove susedne datom čvoru je složenosti $O(|V|)$.

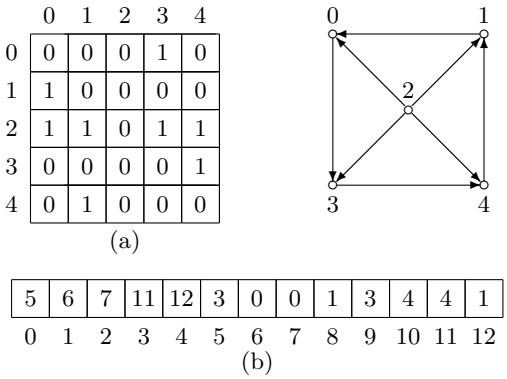
U jeziku C++ graf predstavljen matricom povezanosti možemo deklarisati na sledeći način:

```
bool matricaPov[max][max]
```

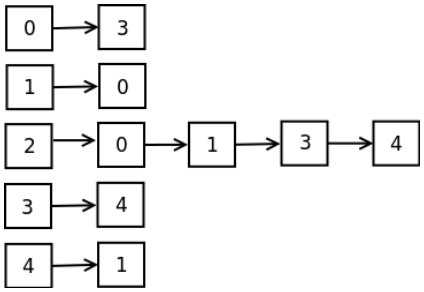
ili, ako broj čvorova saznajemo tek u vreme izvršavanja programa:

```
vector<vector<bool>> matricaPov(n);
for (int i = 0; i < n; i++)
   matricaPov[i].resize(n);
```

Umesto da se i sve nepostojeće grane eksplicitno predstavljaju, kao što je slučaj sa matricom povezanosti grafa, mogu se formirati povezane liste od jedinica iz i-te vrste, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Ovaj način predstavljanja grafa naziva se *lista povezanosti*, odnosno *lista susedstva* (eng. adjacency list). Svakom čvoru pridružuje se povezana lista koja sadrži sve grane susedne tom čvoru, tačnije sve čvorove do kojih postoji grana iz tog čvora. Lista može biti uređena prema rednim brojevima čvorova na krajevima njenih grana. Graf je predstavljen nizom lista. Svaki element niza sadrži ime (indeks) čvora i pokazivač na njegovu listu suseda. Treba napomenuti da iako ime tako sugeriše, implementacija ovakve reprezentacije grafa ne mora biti zasnovana na povezanim listama, već se umesto povezanih listi može koristiti dinamički niz ili neka vrsta balansiranih binarnih drveta ili pak heš tabela.



Slika 6: Predstavljanje grafa sa slike matricom povezanosti (a), odnosno listom povezanosti u vidu statičkog niza (b).



Slika 7: Predstavljanje grafa listom povezanosti.

Ako je graf *statički*, odnosno ako nisu dozvoljena umetanja i brisanja čvorova i grana, onda se graf može predstaviti statičkim nizom a dužine $|V|+|E|$ u slučaju usmerenog grafa (odnosno dužine $|V|+2|E|$ u slučaju neusmerenog grafa). Prvih $|V|$ članova niza su pridruženi čvorovima. Element niza a na poziciji i, $i < |V|$ je pridružen čvoru v_i i sadrži indeks početka spiska čvorova susednih čvoru v_i,

$i = 0, 1, \ldots, n-1$, dok se na pozicijama i, $|V| \leq i < |V| + |E|$ nalaze informacije o susedima čvorova. Naime, susedi čvora v_i za $0 \leq i < n-1$ nalaze se u nizu a na pozicijama $[a[i], a[i+1])$, dok se susedi čvora v_{n-1} nalaze na pozicijama od $a[n-1]$ do kraja niza. Primetimo da se na poziciji 0 u nizu a nalazi vrednost koja odgovara broju čvorova u grafu.

Na slikama 6 i 7 prikazana su na primeru jednog grafa oba načina predstavljanja grafa u slučaju kada je graf statički. Čvorovi su numerisani brojevima od 0 do 4. Na poziciji $(1, 0)$ u matrici povezanosti nalazi se vrednost 1 jer postoji grana iz čvora 1 ka čvoru 0, dok se na poziciji $(0, 1)$ nalazi 0 jer ne postoji suprotno orijentisana grana u grafu. Lista povezanosti pridružena čvoru 1 je dužine 1 jer iz čvora 1 polazi tačno jedna grana. Slično, lista povezanosti pridružena čvoru 2 je dužine 4 jer iz čvora 2 polaze četiri grane. Razmotrimo sada reprezentaciju grafa statičkim nizom: na poziciji 0 nalazi se vrednost 5, a na poziciji 1 vrednost 6, što ukazuje na to da se na pozicijama $[5, 6)$ u ovom nizu nalaze susedi čvora 0 – u ovom slučaju to je samo čvor 3. Susedi čvora 2 nalaze se na pozicijama $[7, 11)$ i to su redom $0, 1, 3$ i 4.

Sa matricama povezanosti je jednostavnije raditi. S druge strane, liste povezanosti su prostorno efikasnije za grafove sa malim brojem grana: njihova memorijska složenost je $O(|V| + |E|)$, za razliku od matrica povezanosti čija je memorijska složenost $O(|V|^2)$. U praksi se često radi sa grafovima koji imaju znatno manje grana od maksimalnog mogućeg broja, što je $n(n-1)/2$ za neusmereni, odnosno $n(n-1)$ za usmereni graf ako isključimo petlje (odnosno $n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2$ grana za neusmereni, odnosno $n(n-1) + n = n^2$ za usmereni graf ako dozvolimo petlje), i tada je efikasnije koristiti liste povezanosti. U slučaju kada se za implementaciju liste susedstva koriste povezane liste, ispitivanje da li su dva čvora u grafu povezana, kao i uklanjanje grane iz grafa je u najgorem slučaju složenosti $O(|V|)$. U slučaju kada se za implementaciju lista povezanosti koriste heš tabele, očekivano vreme izvršavanja ovih operacija je $O(1)$. Prolazak kroz sve čvorove susedne čvoru v je složenosti $O(1 + d(v))$, gde je $d(v)$ stepen čvora v u slučaju neusmerenog grafa, odnosno izlazni stepen čvora v ako je graf usmeren. Dodavanje novog čvora u graf je jednostavnije nego u slučaju reprezentacije grafa matricom povezanosti.

U jeziku C++ za deklaraciju grafa predstavljenog listama povezanosti možemo iskoristiti naredni fragment koda:

```
vector<vector<int>> listaSuseda(n);
```

Na primer, usmereni graf sa slike 6 predstavićemo kao:

```
vector<vector<int>> listaSuseda {{3}, {0}, {0, 1, 3, 4}, {4}, {1}};
```

Broj čvorova grafa možemo dobiti kao broj elemenata u spoljašnjem vektoru:

```
int brCvorova = listaSuseda.size();
```

Novu granu `(cvorOd,cvorDo)` možemo dodati u graf na sledeći način:

```
listaSuseda[cvorOd].push_back(cvorDo);
```

dok kroz sve susede čvora možemo iterirati na sledeći način:

```
for (int cvorDo : listaSuseda[cvorOd])
    ...
```

Treba pomenuti da postoje i drugi načini za predstavljanje grafa: graf se može čuvati i kao niz grana, gde se za svaku granu čuva informacija sa kojim čvorovima je incidentna.

U narednim algoritmima smatraćemo da je graf sa kojim radimo dinamički i da je zadat listom povezanosti.

Obilasci grafova

Prvi problem na koji se nailazi pri konstrukciji proizvoljnog algoritma za obradu grafa je kako pregledati ulaz. U slučaju nizova taj problem je trivijalan zbog jednodimenzionalnosti ulaza — nizovi se mogu lako pregledati sekvencijalnim prolaskom kroz elemente. Pregledanje grafa, odnosno njegov *obilazak*, nije trivijalan problem. Postoje dva osnovna algoritma za obilazak, odnosno pretragu grafa: *pretraga u dubinu* i *pretraga u širinu*.

U opštem slučaju, obilazak povezanog grafa iz čvora s ima sledeći kostur:

```
dodaj cvor s u kolekciju C
sve dok C nije prazno
   uzmi cvor v iz C
   ako je v neoznaceno
      oznaci v
      za svaku granu (v,w)
        ubaci cvor w u C
```

Ukoliko za kolekciju C odaberemo stek, dobijamo algoritam pretrage u dubinu, ako kolekciju C implementiramo kao red, dobijamo algoritam pretrage u širinu. Konačno, ako kolekciju C implementiramo kao red sa prioritetom dobijamo pretragu prema prioritetu, gde bi se, ako prioritet razmatramo kao težinu grane dobilo minimalno povezujuće drvo datog grafa, a ako bismo kao prioritet razmatrali rastojanje od polaznog čvora mogli izračunati najkraći putevi od polaznog čvora do svih ostalih čvorova u datom grafu.

Pretraga u dubinu

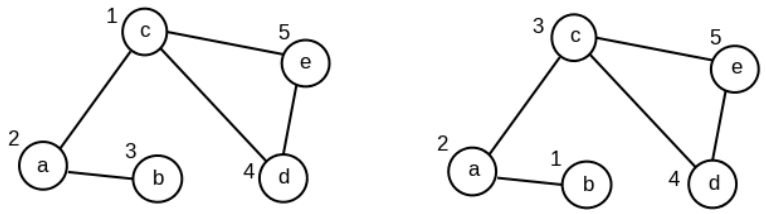
Pretraga u dubinu (DFS, skraćenica od depth–first–search) je praktično ista za neusmerene i usmerene grafove. Međutim, pošto želimo da ispitamo neke osobine grafova koje nisu iste za neusmerene i usmerene grafove, razmatranje pretrage u dubinu biće podeljeno na dva dela: na pretragu neusmerenih i pretragu usmerenih grafova.

Neusmereni grafovi Neka je dat graf $G = (V, E)$. Želimo da izvršimo obilazak grafa tako da uvek kada je to moguće idemo dalje u dubinu pre nego

što se vratimo u čvor u kom smo već bili. Ovaj pristup zove se *pretraga u dubinu* (DFS). Osnovni razlog korisnosti pretrage u dubinu leži u njenoj jednostavnosti i lakoj realizaciji rekurzivnim algoritmom.

Razmotrimo problem pretrage u dubinu kada je graf zadat listom povezanosti i dat je čvor r grafa iz koga se započinje pretraga. Čvorove ćemo označavati u trenutku kada ih po prvi put posetimo. Inicijalno su svi čvorovi neoznačeni. Čvor r iz koga se pokreće pretraga se *označava* kao posećen. Zatim se u listi suseda čvora r pronalazi prvi neoznačeni sused r_1 čvora r, pa se iz čvora r_1 rekurzivno pokreće pretraga u dubinu. Iz nekog nivoa rekurzije, pokrenutog iz čvora v, izlazi se ako su svi susedi čvora v (ako ih ima) iz koga je pretraga pokrenuta već označeni. Ako su u trenutku završetka pretrage iz čvora r_1 svi susedi čvora r označeni, onda se pretraga za čvor r završava. U protivnom se u listi suseda čvora r pronalazi sledeći neoznačeni sused r_2, izvršava se pretraga polazeći od r_2, itd.

Primer 1: Razmotrimo neusmereni graf prikazan na slici 1: neka je on predstavljen listom susedstva tako da su čvorovi u svakoj listi numerisani leksikografski rastuće. Ako bi se pokrenula pretraga u dubinu iz čvora c redom bi se obilazili čvorovi c, a, b, d, e, a ako bi se pretraga u dubinu pokrenula iz čvora b, obilazili bi se redom čvorovi b, a, c, d, e.



Slika 8: Ilustracija redosleda obilaska čvorova prilikom pretrage u dubinu u koliko se pretraga startuje iz čvorova c i b, redom. Uz čvorove su prikazani brojevi koji odgovaraju redosledu kojim se čvorovi po prvi put posećuju.

Pretraga grafa uvek se vrši sa nekim ciljem. Da bi se različite primene uklopile u pretragu u dubinu, poseti čvora ili grane pridružuju se dve vrste obrade, *ulazna obrada* i *izlazna obrada*. Ulazna obrada vrši se u trenutku označavanja čvora. Izlazna obrada vrši se na kraju, kada obradimo sve potomke datog čvora. Ulazna i izlazna obrada zavise od konkretne primene algoritma DFS. Na taj način moguće je rešavanje različitih problema jednostavnim definisanjem ulazne i izlazne obrade.

Algoritam pretrage u dubinu dat je u nastavku. Jednostavnosti radi, graf će u narednim kodovima biti deklarisan kao globalna promenljiva.

```
// reprezentacija grafa listom povezanosti
// graf je neusmeren, pa se svaka grana dva puta javlja u listi
```

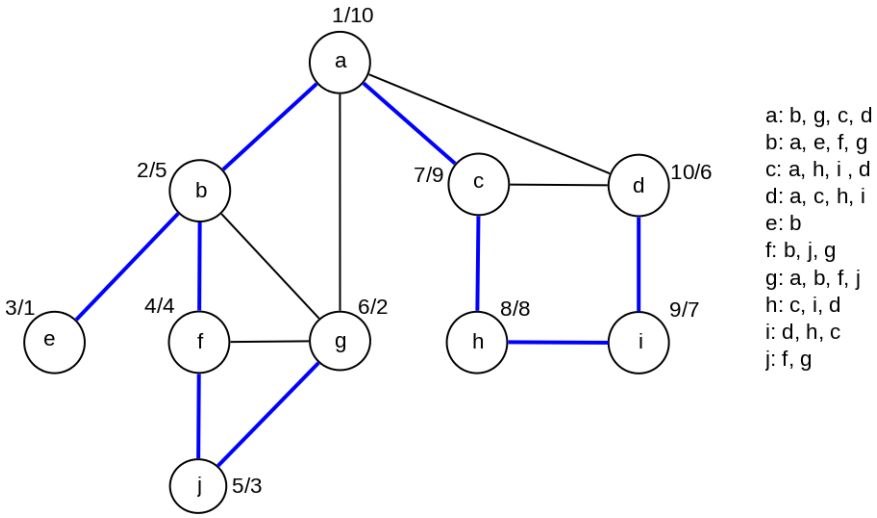
```
vector<vector<int>> listaSuseda
     {{1, 2}, {0, 3, 4}, {0, 5}, {1}, {1, 6, 7},
     {2, 8}, {4}, {4}, {5}};

void dfs(int cvor, vector<bool> &posecen){
  posecen[cvor] = true;
  // ovde ide ulazna obrada

  // rekurzivno prolazimo kroz sve njegove susede
  // koje ranije nismo obisli
  for (auto sused : listaSuseda[cvor]){
    if (!posecen[sused])
      dfs(sused,posecen);
  }
  // ovde ide izlazna obrada
}

// funkcija koja vrsi DFS obilazak datog grafa iz datog cvora
void dfs(int cvor){
  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  vector<bool> posecen(brojCvorova, false);
  dfs(cvor,posecen);
}

int main(){
  dfs(0);
  return 0;
}
```

Primer pretrage grafa u dubinu prikazan je na slici 9.

Lema: Ako je graf G povezan, onda su po završetku pretrage u dubinu svi čvorovi označeni, a sve grane grafa G su pregledane bar po jednom.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, i označimo sa U skup neoznačenih čvorova zaostalih posle izvršavanja algoritma. Pošto je graf G povezan, bar jedan čvor u iz U mora biti povezan granom sa nekim označenim čvorom w (skup označenih čvorova je neprazan jer sadrži bar čvor v). Međutim, ovako nešto je nemoguće, jer kad se poseti čvor w, moraju biti posećeni (pa dakle i označeni) svi njegovi neoznačeni susedi, dakle i čvor u. Pošto su svi čvorovi posećeni, a kad se čvor poseti, onda se pregledaju sve grane koje vode iz njega, zaključujemo da su i sve grane grafa pregledane. □

Prilikom izvršavanja DFS algoritma na neusmerenom grafu $G = (V, E)$ koji je zadat listom povezanosti, svaka grana se pregleda tačno dva puta, po jednom sa svakog kraja. Prema tome, ukupan broj izvršavanja tela `for` petlje u svim rekurzivnim pozivima algoritma DFS je $O|E|$. S druge strane, broj rekurzivnih poziva je $|V|$, pa se složenost DFS algoritma može opisati izrazom $O(|V| + |E|)$.



Slika 9: Primer pretrage grafa u dubinu kada je graf zadat listama povezanosti. Dva broja uz čvor jednaka su njegovim rednim brojevima pri dolaznoj, odnosno odlaznoj DFS numeraciji.

Primetimo da složenost pretrage zavisi od reprezentacije grafa: naime, ako bi graf bio zadat matricom povezanosti, onda bi prolazak kroz susede jednog fiksiranog čvora podrazumevao prolaz kroz odgovarajuću vrstu matrice, što je složenosti $\Theta(n)$. Odatle zaključujemo da bi prolazak kroz susede svakog od čvorova bio složenosti $\Theta(n^2)$. Dakle, u slučaju algoritma pretrage u dubinu efikasnija implementacija se dobija korišćenjem reprezentacije grafa listom povezanosti.

Algoritam DFS se mora prilagoditi da bi korektno radio i u slučaju nepovezanih grafova. Naime, ako su posle prvog pokretanja opisanog algoritma svi čvorovi označeni, onda je graf povezan, i obilazak je završen. U protivnom, može se pokrenuti nova pretraga u dubinu polazeći od proizvoljnog neoznačenog čvora u grafu, itd. Prema tome, algoritam pretrage u dubinu se može iskoristiti da bi se ustanovilo da li je graf povezan, odnosno za pronalaženje svih njegovih komponenti povezanosti.

```
vector<vector<int>> listaSuseda
     {{1, 2}, {3}, {}, {}, {6, 7}, {8}, {}, {}, {}};

// obilazak u dubinu iz cvora cvor
void dfs(int cvor, vector<bool> &posecen,
         int brojKomponente, vector<int>& komponente) {
  // tekuci cvor pridruzujemo tekucoj komponenti
  posecen[cvor] = true;
  komponente[cvor] = brojKomponente;
```

```
  // rekurzivno prolazimo kroz sve njegove susede
  // koje ranije nismo obisli
  for (auto sused : listaSuseda[cvor])
    if (!posecen[sused])
      dfs(sused, posecen, brojKomponente, komponente);
}

// za svaki cvor grafa se u vektor komponente upisuje
// redni broj komponente kojoj on pripada;
// funkcija vraca ukupan broj komponenata povezanosti
int komponentePovezanosti(vector<int> &komponente) {
  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  vector<bool> posecen(brojCvorova, false);
  int brojKomponente = 1;
  // pokrecemo novu DFS pretragu iz prvog neposecenog cvora
  for (int cvor = 0; cvor < brojCvorova; cvor++)
    if (!posecen[cvor]) {
      dfs(cvor, posecen, brojKomponente, komponente);
      brojKomponente++;
    }
  return brojKomponente;
}

int main() {
  // odredjujemo komponente povezanosti
  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  vector<int> komponente(brojCvorova);
  int brojKomponenti = komponentePovezanosti(komponente);

  // ispisujemo rezultat
  cout << "Ukupan broj komponenti povezanosti je "
       << brojKomponenti - 1 << endl;
  for (int i = 0; i < brojCvorova; i++)
    cout << "Cvor " << i << " pripada komponenti "
         << komponente[i] << endl;
  return 0;
}
```

I ovaj algoritam bi bio vremenske složenosti $O(|V| + |E|)$.

Mi ćemo najčešće razmatrati slučaj kada je graf povezan, jer se u opštem slučaju problem svodi na posebnu obradu svake komponente povezanosti.

Konstrukcija DFS drveta i DFS numeracija Prikazaćemo sada dve jednostavne a važne primene algoritma DFS — formiranje specijalnog povezujućeg drveta, takozvanog *DFS drveta* i numeraciju čvorova grafa *DFS brojevima*.

Prilikom obilaska grafa G u dubinu, u petlji kojom se prolaze svi susedi čvora v mogu se izdvojiti sve grane ka novooznačenim čvorovima w. Preko izdvojenih grana dostižni su svi čvorovi povezanog neusmerenog grafa, pa je podgraf koga čine izdvojene grane povezan. Taj podgraf nema cikluse, jer se od svih grana koje vode u neki čvor, izdvaja samo jedna. Prema tome, izdvojene grane su grane podgrafa grafa G koji je u slučaju povezanog grafa povezujuće drvo, koje nazivamo *DFS drvo* grafa G. Čvor iz koga se startuje obilazak u dubinu biće koren DFS drveta. Čak i ako se drvo ne formira eksplicitno, mnoge algoritme je lakše razumeti razmatrajući DFS drvo grafa G.

U nastavku je dat algoritam konstrukcije DFS drveta datog grafa predstavljenog listom susedstva. DFS drvo će biti predstavljeno u vidu vektora grana grafa.

```
vector<vector<int>> listaSuseda
    {{1, 2}, {3, 4}, {5}, {}, {6, 7}, {8}, {}, {}, {}};

void dfs(int cvor, vector<bool> &posecen,
     vector<vector<int>> &dfs_drvo){
  posecen[cvor] = true;

  // rekurzivno prolazimo kroz sve njegove susede
  // koje ranije nismo obisli
  for (auto sused : listaSuseda[cvor]){
    if (!posecen[sused]){
      // u DFS drvo dodajemo granu iz tekuceg ka novom cvoru
      // i njoj suprotno usmerenu granu (jer je graf neusmeren)
      dfs_drvo[cvor].push_back(sused);
      dfs_drvo[sused].push_back(cvor);
      dfs(sused,posecen,dfs_drvo);
    }
  }
}

// funkcija koja vrsi DFS obilazak datog grafa iz datog cvora
void dfs(int cvor){
  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  vector<bool> posecen(brojCvorova, false);
  vector<vector<int>> dfs_drvo(brojCvorova);
  dfs(cvor,posecen,dfs_drvo);

  // stampamo grane grafa koje pripadaju DFS drvetu
  cout << "Grane DFS drveta su: ";
  for (int i = 0; i < dfs_drvo.size(); i++)
    for (int j = 0; j < dfs_drvo[i].size(); j++)
      cout << "(" << i << "," << dfs_drvo[i][j] << ")" << endl;
}
```

```
int main(){
  dfs(0);
  return 0;
}
```

Postoje dve varijante DFS numeracije čvorova: *dolazna DFS numeracija*, odnosno *preOrder* numeracija, kojom se čvorovi numerišu prema redosledu označavanja čvorova i *odlazna DFS numeracija*, odnosno *postOrder* numeracija, kod koje se čvorovi numerišu prema redosledu napuštanja čvorova. Primer grafa sa čvorovima numerisanim na dva načina prikazan je na slici 9. Dolazna i odlazna numeracija čvorova će nam biti od koristi za rešavanje raznih problema nad grafovima.

Za primer sa slike 9 redosled čvorova u rastućem redosledu dolazne numeracije glasi $a, b, e, f, j, g, c, h, i, d$, dok je redosled čvorova u rastućem redosledu odlazne numeracije $e, g, j, f, b, d, i, h, c, a$. Algoritmi kojima se čvorovi ispisuju u redosledu dolazne, odnosno odlazne numeracije opisani su narednim kodovima.

```
void dfs_preorder(int cvor, vector<bool> &posecen){
  posecen[cvor] = true;
  // stampamo naredni cvor u preOrder numeraciji
  cout << cvor << " ";

  // rekurzivno prolazimo kroz sve susede koje nismo obisli
  for (auto sused : listaSuseda[cvor]){
    if (!posecen[sused])
      dfs_preorder(sused,posecen);
  }
}
```

```
void dfs_postorder(int cvor, vector<bool> &posecen){
  posecen[cvor] = true;

  // rekurzivno prolazimo kroz sve susede koje nismo obisli
  for (auto sused : listaSuseda[cvor]){
    if (!posecen[sused])
      dfs_postorder(sused,posecen);
  }
  // stampamo naredni cvor u postOrder numeraciji
  cout << cvor << " ";
}
```

Alternativno, možemo implementirati funkcije kojima se za sve čvorove u grafu ispisuju vrednosti dolazne i odlazne numeracije.

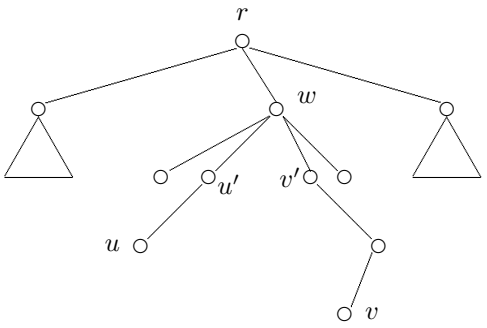
```
int vreme_dolazna = 1;
int vreme_odlazna = 1;
vector<int> dolazna;
vector<int> odlazna;
```

```
void dfs(int cvor, vector<bool> &posecen) {
  posecen[cvor] = true;

  // cvor dobija narednu mogucu vrednost dolazne numeracije
  dolazna[cvor] = vreme_dolazna;
  vreme_dolazna++;

  // rekurzivno prolazimo kroz sve susede koje do sada nismo obisli
  for (auto sused : listaSuseda[cvor]) {
    if (!posecen[sused] == -1) {
      dfs(sused,posecen);
    }
  }
  // cvor dobija narednu mogucu vrednost odlazne numeracije
  odlazna[cvor] = vreme_odlazna;
  vreme_odlazna++;
}

void dfs(int cvor) {
  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  dolazna.resize(brojCvorova, -1);
  odlazna.resize(brojCvorova, -1);
  vector<bool> posecen(brojCvorova, false);

  dfs(cvor,posecen);

  cout << "Dolazna i odlazna numeracija cvorova:" << endl;
  for (int i = 0; i < brojCvorova; i++)
    cout << "Cvor " << i << ": " << dolazna[i]
         << "/" << odlazna[i] << endl;
}
```

Čvor v nazivamo *pretkom* čvora w u DFS drvetu T sa korenom r ako je v na jedinstvenom putu od r do w u T. Ako je čvor v predak čvora w, onda je čvor w *potomak* čvora v. Na primer, za graf sa slike 9 važi da je čvor b predak čvora j u DFS drvetu, a j potomak čvora b. Ako je algoritam DFS pokrenut za čvor r i čvor v je predak čvora w, DFS pretraga iz čvora v počeće pre pretrage iz čvora w, pa je $v.Pre < w.Pre$. S druge strane, pretraga iz čvora v završava se posle pretrage iz čvora w, pa je $v.Post > w.Post$.

DFS drvo obuhvata sve čvorove povezanog grafa G. Redosled sinova svakog čvora u drvetu određen je listom povezanosti koja zadaje graf G, pa se za svaka dva sina istog čvora može reći koji je od njih levi (prvi po tom redosledu), a koji desni. Relacija levi – desni se prenosi na proizvoljna dva čvora u i v koji nisu u relaciji predak – potomak (videti ilustraciju na slici 10). Za čvorove u i v tada postoji jedinstveni zajednički predak w u DFS drvetu, kao i sinovi u' i v' čvora

w takvi da je čvor u' predak čvora u i čvor v' predak čvora v. Kažemo da je čvor u levo od čvora v ako i samo ako je čvor u' levo od čvora v'. Geometrijska interpretacija ove relacije je jasna: DFS drvo ćemo iscrtavati naniže prilikom prelaska u nove – neoznačene čvorove (koraci u dubinu), odnosno sleva udesno prilikom dodavanja novih grana posle povratka u već označene čvorove. Ako je čvor u levo od čvora v, onda je on prilikom pretrage označen pre čvora v, pa je $u.Pre < v.Pre$. Obrnuto ne važi uvek: ako je $u.Pre < v.Pre$, onda je čvor u levo od čvora v, ili je čvor u predak čvora v u DFS drvetu (tj. iznad v). S druge strane, pretraga iz čvora u završava se pre pretrage iz čvora v, pa je $u.Post < v.Post$.



Slika 10: Ilustracija relacije "levo – desno" na skupu čvorova DFS drveta.

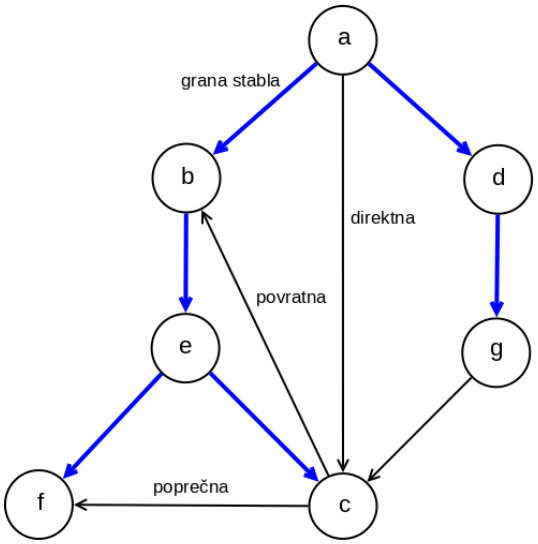
Lema: [Osnovna osobina DFS drveta neusmerenog grafa] Neka je $G = (V, E)$ povezan neusmeren graf i neka je $T = (V, F)$ DFS drvo grafa G. Svaka grana grafa $e \in E$ pripada drvetu T (tj. $e \in F$) ili spaja dva čvora grafa G, od kojih je jedan predak drugog u drvetu T.

Dokaz: Neka je (v, u) grana grafa G, i pretpostavimo da je u toku DFS pretrage čvor v posećen pre čvora u. Posle označavanja čvora v, u petlji se rekurzivno pokreće DFS pretraga iz svakog neoznačenog suseda čvora v. U trenutku kad dođe red na čvor u, ako je u označen onda je u potomak čvora v u drvetu T, a u protivnom se iz u započinje poziv DFS, pa u postaje sin čvora v u drvetu T i grana (v, u) pripada DFS drvetu T. □

Tvrđenje leme može se preformulisati na sledeći način: grane grafa ne mogu biti *poprečne grane* u odnosu na DFS drvo, odnosno grane koje povezuju čvorove na razdvojenim putevima od korena (tj. takva dva čvora u i v koja su u odnosu levo – desno).

Usmereni grafovi Procedura pretrage u dubinu usmerenih grafova ista je kao za neusmerene grafove. Međutim, usmerena DFS drveta imaju nešto drugačije osobine. Za njih, na primer, nije tačno da nemaju poprečne grane, što se može videti iz primera na slici 11. U odnosu na DFS drvo grane grafa pripadaju jednoj od četiri kategorije: *grane DFS drveta*, *povratne*, *direktne* i *poprečne* grane. Prve tri vrste grana povezuju dva čvora od kojih je jedan potomak drugog u DFS

drvetu: grana DFS drveta povezuje oca sa sinom, povratna grana potomka sa pretkom, a direktna grana pretka sa potomkom (slika 11). Jedino poprečne grane povezuju čvorove koji nisu "srodnici" u drvetu. Poprečne grane, međutim, moraju biti usmerene "zdesna ulevo", kao što pokazuje sledeća lema.



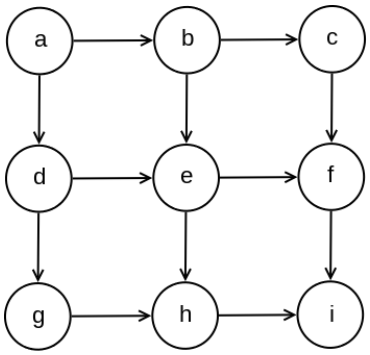
Slika 11: DFS drvo usmerenog grafa. Klasifikacija grana u odnosu na DFS drvo.

Lema: [Osnovna osobina DFS drveta usmerenog grafa] Neka je $G = (V, E)$ usmereni graf i neka je $T = (V, F)$ DFS drvo grafa G. Ako je $(v, w) \in E$ grana grafa G za koju važi $v.Pre < w.Pre$, onda je čvor w potomak čvora v u drvetu T.

Dokaz: Pošto prema dolaznoj DFS numeraciji čvor v prethodi čvoru w, čvor w je označen posle čvora v. Grana grafa (v, w) mora biti razmatrana u toku rekurzivnog poziva algoritma DFS iz čvora v. Ako u tom trenutku čvor w nije označen, onda se grana (v, w) mora uključiti u DFS drvo, tj. $(v, w) \in F$, pa je tvrđenje leme tačno. U protivnom, čvor w je označen u toku izvođenja rekurzivnog poziva DFS iz v, pa je w potomak čvora v u DFS drvetu T. □

Algoritam DFS za povezan neusmereni graf, započet iz proizvoljnog čvora, obilazi ceo graf. Analogno tvrđenje ne mora biti tačno za usmerene grafove. Preciznije, ovo tvrđenje će važiti samo ako je graf jako povezan. Posmatrajmo usmereni graf na slici 12. Ako se DFS pretraga započne iz čvora c, onda će biti dostignuti samo čvorovi u desnoj koloni. DFS pretraga može da dostigne sve čvorove grafa samo ako se započne iz čvora a. Ako se čvor a ukloni iz grafa zajedno sa dve grane koje izlaze iz njega, onda u datom grafu ne postoji čvor iz koga DFS

algoritam obilazi ceo graf. Prema tome, uvek kad govorimo o DFS obilasku usmerenog grafa, smatraćemo da je DFS algoritam pokrenut onoliko puta koliko je potrebno da bi svi čvorovi bili označeni i sve grane bile razmotrene. Dakle, u opštem slučaju usmereni graf umesto DFS drveta ima *DFS šumu*.

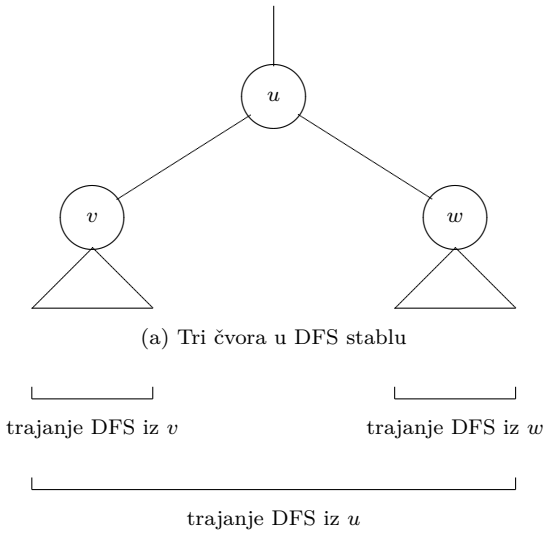


Slika 12: Primer kad pretraga u dubinu usmerenog grafa ako se pokrene iz čvora v ne obilazi sve čvorove grafa.

Nepostojanje poprečnih grana u odnosu na DFS drvo koje idu sleva udesno govori nešto korisno o odlaznoj numeraciji čvorova grafa i o četiri vrste grana u odnosu na DFS drvo. Na slici 13(a) prikazana su tri čvora grafa u, v i w u okviru DFS drveta grafa. Čvorovi v i w su sinovi čvora u, a čvor w je desno od čvora v. Na slici 13(b) prikazani su vremenski intervali trajanja rekurzivnih poziva algoritma DFS za svaki od ovih čvorova. Zapažamo da je DFS algoritam pokrenut iz čvora v, potomka čvora u, aktivan samo u podintervalu vremena za koje je aktivan DFS algoritam iz čvora u (pretka čvora v). Specijalno, DFS pretraga iz v čvora završava se pre završetka DFS pretrage iz čvora u. Prema tome, iz činjenice da je v potomak čvora u sledi da je $v.Post < u.Post$. Pored toga, ako je čvor w desno od čvora v, onda poziv algoritma DFS iz čvora w ne može biti pokrenut pre nego što se završi DFS poziv iz čvora v. Prema tome, ako je v levo od w, onda je $v.Post < w.Post$. Iako to nije pokazano na slici 13, isti zaključak je tačan i ako su čvorovi v i w u različitim drvetima DFS šume, pri čemu je drvo čvora v levo od drveta čvora w.

Razmotrimo sada za proizvoljnu granu (u, v) grafa G odnos odlazne DFS numeracije čvorova u i v.

- Ako je (u, v) grana drveta ili direktna grana, onda je čvor v potomak čvora u, pa važi $v.Post < u.Post$.
- Ako je (u, v) poprečna grana, onda zbog toga što je čvor v levo od čvora u, ponovo važi $v.Post < u.Post$.
- Ako je (u, v) povratna grana i $v \neq u$, onda je v pravi predak čvora u i $v.Post > u.Post$. Međutim, pošto je specijalno i petlja jedna vrsta povratne grane, za povratnu granu može da važi i $v = u$, pa samim tim i



(a) Tri čvora u DFS stablu

(b) Aktivni intervali za njihove pozive DFS

Slika 13: Odnos između položaja čvorova u DFS drvetu i trajanja rekurzivnih poziva pokrenutih iz ovih čvorova.

$v.Post = u.Post$. Prema tome, u opštem slučaju za povratnu granu (u, v) važi $v.Post \geq u.Post$.

Prema tome, dokazano je naredno tvrđenje.

Lema: Grana (u, v) usmerenog grafa $G = (V, E)$ je povratna u odnosu na DFS drvo grafa ako i samo ako prema odlaznoj numeraciji čvor u prethodi čvoru v, odnosno $u.Post \leq v.Post$.

Na osnovu vrednosti dolazne i odlazne numeracije čvorova u grafu može se izvršiti klasifikacija grana u grafu u odnosu na DFS drvo. Naime za usmerenu granu $(u, v) \in E$ važi:

- ako je $u.Post \leq v.Post$, onda je grana (u, v) povratna,
- ako je $u.Post > v.Post$ i $u.Pre > v.Pre$, onda je grana (u, v) poprečna,
- ako je $u.Post > v.Post$ i $u.Pre < v.Pre$, onda ako je čvor u roditelj čvora v u DFS drvetu grana (u, v) je grana DFS drveta, a inače je (u, v) direktna grana.

Razmotrimo algoritam kojim se za svaku granu usmerenog grafa određuje njen tip u odnosu na DFS drvo, na osnovu vrednosti dolazne i odlazne numeracije čvorova.

```
vector<vector<int>> listaSuseda {{1, 2, 4}, {3, 4}, {5}, {},
                                 {0, 6, 7}, {8,3}, {}, {1}, {}};
```

```
int vreme_dolazna = 1;
int vreme_odlazna = 1;
vector<int> dolazna;
vector<int> odlazna;
vector<int> roditelj;

void dfs(int cvor) {
  // cvor dobija narednu mogucu vrednost dolazne numeracije
  dolazna[cvor] = vreme_dolazna;
  vreme_dolazna++;
  // rekurzivno prolazimo kroz sve susede koje do sada nismo obisli
  for (auto sused : listaSuseda[cvor]) {
    if (dolazna[sused] == -1) { // !posecen[sused]
      // 'cvor' je roditelj cvora 'sused' u DFS drvetu
      roditelj[sused] = cvor;
      dfs(sused);
    }
  }
  // cvor dobija narednu mogucu vrednost odlazne numeracije
  odlazna[cvor] = vreme_odlazna;
  vreme_odlazna++;
}

void klasifikuj_grane(int cvor) {
  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  dolazna.resize(brojCvorova, -1);
  roditelj.resize(brojCvorova, -1);
  odlazna.resize(brojCvorova, -1);

  dfs(cvor);

  cout << "Dolazna i odlazna numeracija cvorova:" << endl;
  for (int i = 0; i < brojCvorova; i++)
    cout << "Cvor " << i << ": " << dolazna[i]
         << "/" << odlazna[i] << endl;

  cout << "Tipovi grana datog usmerenog grafa: " << endl;
  for (int i = 0; i < listaSuseda.size(); i++)
    for (int j = 0; j < listaSuseda[i].size(); j++){
      int k = listaSuseda[i][j];

      if (i == roditelj[k])
         cout << i << "-" << k << " je grana DFS drveta" << endl;
      else if (odlazna[i] <= odlazna[k])
         cout << i << "-" << k << " je povratna grana" << endl;
      else // odlazna[i] > odlazna[j]
```

```
            if (dolazna[i] < dolazna[k])
               cout << i << "-" << k << " je direktna grana" << endl;
            else
               cout << i << "-" << k << " je poprecna grana" << endl;
    }
}

int main(){
  klasifikuj_grane(0);
  return 0;
}
```

Pokazaćemo sada kako se algoritam DFS pretrage može iskoristiti za utvrđivanje da li je dati graf aciklički.

Problem: Za dati usmereni graf $G = (V, E)$ ustanoviti da li sadrži usmereni ciklus.

Lema: Neka je $G = (V, E)$ usmereni graf, i neka je T DFS drvo grafa G. Tada graf G sadrži usmereni ciklus ako i samo ako graf G sadrži povratnu granu u odnosu na DFS drvo T.

Dokaz: Pretpostavimo da graf G sadrži povratnu granu (u, v). Ona zajedno sa granama DFS drveta na putu od v do u čini ciklus, te jedan smer datog tvrđenja direktno važi. Pokažimo da važi i suprotno tvrđenje, odnosno da ako u grafu postoji ciklus, tada je nužno jedna od njegovih grana povratna. Zaista, pretpostavimo da u grafu G postoji ciklus koji čine grane $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)$, od kojih niti jedna nije povratna u odnosu na DFS drvo T. Ako je $k = 1$, odnosno ciklus je petlja, onda je sama grana (v_1, v_1) povratna. Ako je pak $k > 1$, pretpostavimo da nijedna od grana $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$ nije povratna. Prema prethodnoj lemi važe nejednakosti $v_1.Post > v_2.Post > \cdots > v_k.Post$, iz kojih sledi da je $v_k.Post < v_1.Post$, pa je grana (v_k, v_1) prema prethodnoj karakterizaciji povratna — suprotno pretpostavci. Time je dokazano da u svakom ciklusu postoji povratna grana u odnosu na DFS drvo. □

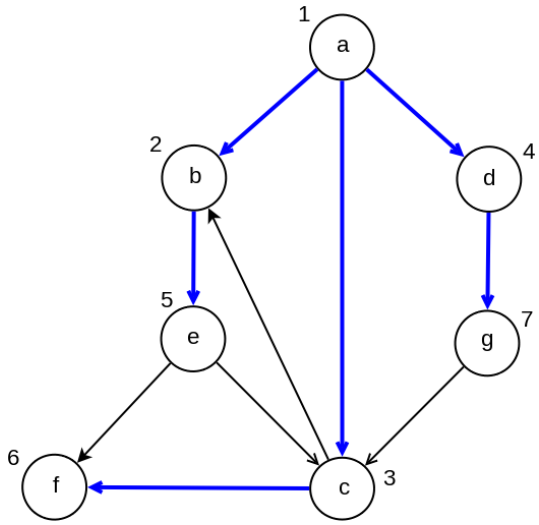
Na osnovu prethodne leme sledi da se algoritam za proveru da li graf sadrži ciklus može svesti na DFS pretragu grafa, određivanje odlazne DFS numeracije čvorova datog grafa i proveru postojanja povratne grane. Složenost ovog algoritma je $O(|V| + |E|)$.

Pretraga u širinu

Pretraga u širinu (ili BFS, što je skraćenica od breadth–first–search) je obilazak grafa na sistematičan način, nivo po nivo, pri čemu se usput formira *drvo pretrage u širinu* (BFS drvo). Pretpostavimo da je graf zadat listom povezanosti. Ako BFS pretragu pokrenemo iz čvora v (v je koren BFS drveta), onda se najpre posećuju svi susedi čvora v redosledom određenim redosledom u listi povezanosti grafa i oni će biti sinovi čvora v u BFS drvetu (čvorovi nivoa 1). Zatim se

dolazi do svih njihovih neposećenih suseda, odnosno do "unuka" polaznog čvora (čvorovi nivoa 2), i tako dalje. Prilikom obilaska čvorovi se mogu numerisati *BFS brojevima*, slično kao pri pretrazi u dubinu. Preciznije, čvor w ima BFS broj k ako je on k-ti po redu čvor označen u toku obilaska algoritmom BFS. BFS drvo grafa može se formirati uključivanjem samo grana ka novooznačenim čvorovima: lako se pokazuje da dobijeni podgraf jeste povezan i da nema ciklus jer od svih grana koje vode nekom čvoru uključujemo tačno jednu, dok čvor nije posećen. Zapaža se da izlazna obrada kod pretrage u širinu, za razliku od pretrage u dubinu, nema smisla; pretraga nema povratak "naviše", već se, polazeći od korena, kreće samo naniže.

Na slici 14 ilustrovan je postupak pretrage u širinu pokrenut iz čvora a: nakon čvora a posećuju se njegovi susedi – čvorovi b, c i d i oni će biti čvorovi nivoa 1. Nakon njih se obilaze neposećeni susedi čvora b – to je jedino čvor e, pa čvor f kao jedini neposećeni sused čvora c i konačno čvor g kao neposećeni sused čvora d: čvorovi e, f i g biće čvorovi nivoa 2 u BFS drvetu. Daljom analizom možemo utvditi da nijedan od čvorova e, f i g nema neposećenih suseda, te se pretraga u širinu završava. Plavom bojom istaknute su grane grafa koje pripadaju BFS drvetu, a uz svaki čvor prikazana je vrednost njegove BFS numeracije.



Slika 14: BFS drvo i BFS numeracija usmerenog grafa.

Kako realizovati pretragu u širinu? Čvorove obilazimo u željenom redosledu korišćenjem pogodne strukture podataka: sve neposećene susede tekućeg čvora smeštamo u datu kolekciju i potrebno ih je obraditi u redosledu dodavanja u tu kolekciju. U ove svrhe možemo iskoristiti strukturu podataka red.

Prikažimo na koji način se može realizovati pretraga u širinu ako je graf povezan i ako je zadat listom povezanosti. Prilikom pretrage štampamo čvorove grafa u

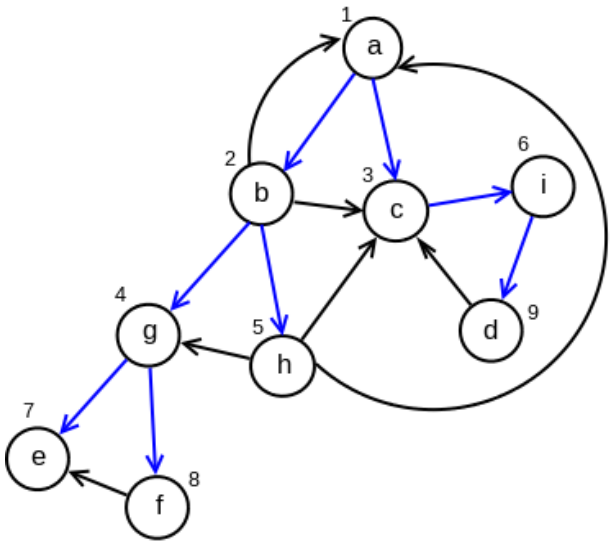
redosledu određenim BFS numeracijom čvorova i konstruišemo BFS drvo. BFS drvo ćemo predstaviti listom grana. Pretpostavićemo da je graf usmeren, te da pri dodavanju grane (u, v) u BFS drvo ne treba dodavati i njoj simetričnu granu (v, u).

```
vector<vector<int>> listaSuseda {{1, 2}, {2, 3, 4}, {5},
                      {0, 4}, {6, 7}, {1, 8}, {}, {6}, {2}};

void bfs(int cvor) {
  int brojCvorova = listaSuseda.size();
  vector<bool> posecen(brojCvorova, false);
  vector<vector<int>> bfs_drvo(brojCvorova);

  // red u kom cuvamo cvorove u redosledu kojim ih treba posetiti
  queue<int> red;
  red.push(cvor);
  posecen[cvor] = true;
  // stampamo prvi cvor u redosledu BFS numeracije
  cout << cvor << endl;
  while (!red.empty()) {
    // dohvatamo element sa pocetka reda i uklanjamo ga iz kolekcije
    int cvor = red.front();
    red.pop();
    for (int sused : listaSuseda[cvor]) {
      // neposecene susede tekuceg cvora dodajemo u red
      if (!posecen[sused]) {
        posecen[sused] = true;
        // stampamo naredni cvor u redosledu BFS numeracije
        cout << sused << endl;
        // dodajemo odgovarajucu granu u bfs drvo (pretpostavljamo da je graf usmeren)
        bfs_drvo[cvor].push_back(sused);
        red.push(sused);
      }
    }
  }
  cout << "Grane BFS drveta su: ";
  for (int i = 0; i < bfs_drvo.size(); i++)
    for (int j = 0; j < bfs_drvo[i].size(); j++)
      cout << "(" << i << "," << bfs_drvo[i][j] << ")" << endl;
}

int main() {
  bfs(0);
  return 0;
}
```

Lako je uveriti se da se prilikom BFS obilaska povezanog grafa svaki čvor obrađuje

po jednom i da se svaka grana pregleda po jednom u slučaju usmerenog grafa, odnosno dva puta ako je graf neusmeren. Stoga je vremenska složenost algoritma pretrage u širinu $O(|V| + |E|)$. Slično kao i kod pretrage u dubinu, složenost algoritma bi bila veća da se koristi reprezentacija grafa matricom povezanosti jer je prolaz kroz sve susede nekog čvora složenosti $\Theta(n^2)$.

Primer 2: Razmotrimo primer izvršavanja algoritma pretrage u širinu pokrenutog iz čvora a na primeru grafa sa slike 15. Neka redosled suseda čvorova u listi povezanosti kojom je predstavljen graf odgovara leksikografskom poretku oznaka čvorova. Najpre posećujemo čvor a, a nakon njega njegove neposećene susede: čvor b, a zatim čvor c. Nakon toga posećujemo neposećene susede čvora b, odnosno čvorove g i h redom, a zatim neposećene čvorove suseda c: čvor i. Nakon toga posećujemo čvorove e i f kao susede čvora g, čvor h nema neposećenih suseda, a zatim posećujemo čvor d kao jedinog neposećenog suseda čvora i. Nakon ovoga redom razmatramo čvorove e, f i d i zaključujemo da nijedan od njih nema neposećenih čvorova i pretraga se završava (tabela 1). Grane BFS drveta su na slici 15 prikazane plavom bojom, a uz svaki čvor prikazan je njegov broj u BFS numeraciji.



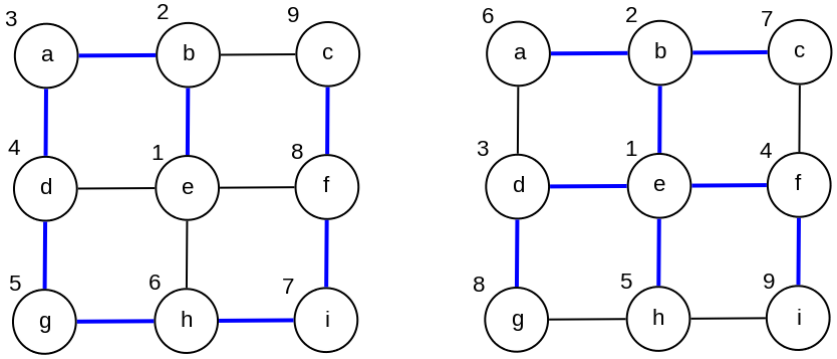
Slika 15: Primer usmerenog grafa na kome ilustrujemo pretragu u širinu.

Na slici 16 ilustrovana je razlika između pretrage u dubinu i pretrage u širinu na primeru jednog neusmerenog grafa. Pretpostavljamo da je graf predstavljen listama povezanosti i da su čvorovi u listama povezanosti navedeni u leksikografskom poretku. U levom delu slike ilustrovan je postupak pretrage u dubinu pokrenut iz čvora a: uz svaki čvor prikazana je vrednost njegove dolazne numeracije, a plavom bojom su istaknute grane koje pripadaju DFS drvetu. U desnom delu slike ilustrovan je postupak pretrage u širinu pokrenut iz čvora

tekući čvor	sadržaj reda
-	a
a	b, c
b	c, g, h
c	g, h, i
g	h, i, e, f
h	i, e, f
i	e, f, d
e	f, d
f	d
d	-

Tabela 1: Ilustracija izvršavanja algoritma pretrage u širinu na primeru grafa sa slike 15.

a: uz svaki čvor prikazana je vrednost BFS numeracije, a plavom bojom su istaknute grane koje pripadaju BFS drvetu grafa.

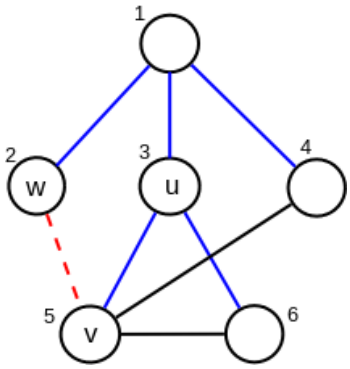


Slika 16: Razlika između DFS i BFS drveta za pretragu pokrenutu iz središnjeg čvora. Plavom bojom označene su grane koje pripadaju DFS i BFS drvetu, redom. Čvorovi su numerisani redosledom kojim se obilaze.

Razmotrimo nekoliko tvrđenja koja važe za pretragu u širinu, odnosno za BFS drvo.

Lema: Ako grana (u, v) pripada BFS drvetu grafa G i čvor u je otac čvora v, onda čvor u ima najmanji BFS broj među čvorovima iz kojih postoji grana ka v.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, da u grafu G postoji grana (w, v), takva da čvor w ima manji BFS broj od čvora u (slika 17). Onda bi u trenutku obrade čvora w čvor v morao biti upisan u red, pa bi grana (w, v) morala biti uključena u BFS drvo. Međutim, prema pretpostavci, grana (u, v) je uključena u BFS drvo, pa ne može istovremeno biti uključena i grana (w, v) te dobijamo kontradikciju. □



Slika 17: Ilustracija uz dokaz leme 1. Plavom bojom istaknute su grane BFS drveta, a uz svaki čvor prikazana je BFS numeracija čvora.

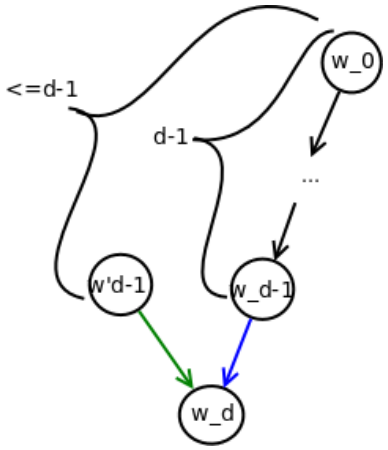
Definišimo *rastojanje* $d(u, v)$ između čvorova u i v kao dužinu najkraćeg puta od čvora u do čvora v, s tim da se pod dužinom puta podrazumeva broj grana koje čine taj put. Ovaj pojam odgovara *nivou čvora* u odnosu na BFS drvo.

Lema: Put od korena r BFS drveta do proizvoljnog čvora w kroz BFS drvo najkraći je put od čvora r do čvora w u grafu G.

Dokaz: Indukcijom po d dokazaćemo da do svakog čvora w na rastojanju d od korena r (jedinstveni) put kroz drvo od r do w ima dužinu d. Za $d = 1$ tvrđenje je tačno: grana (r, w) je nužno deo BFS drveta, pa između r i w postoji put kroz BFS drvo dužine 1. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve čvorove koji su na rastojanju manjem od d od korena r, i neka je w neki čvor na rastojanju d od korena; drugim rečima, postoji niz čvorova $w_0 = r$, w_1, $w_2, \ldots, w_{d-1}, w_d = w$ koji čine put dužine d od r do w, i ne postoji kraći put od r do w. Pošto je dužina najkraćeg puta od r do w_{d-1} jednaka $d - 1$ prema induktivnoj hipotezi put od r do w_{d-1} kroz drvo ima dužinu $d - 1$. U trenutku obrade čvora w_{d-1}, ako čvor w_d nije označen, pošto u grafu G postoji grana (w_{d-1}, w_d), ta grana se uključuje u BFS drvo, pa do čvora w_d postoji put dužine d kroz drvo (slika 18). U protivnom, ako je u tom trenutku čvor w_d već označen, onda do čvora w_d kroz BFS drvo vodi grana iz nekog čvora w'_{d-1}, označenog pre w_{d-1}, iz čega sledi da je nivo čvora w'_{d-1} najviše $d - 1$ i do njega po induktivnoj hipotezi postoji put dužine najviše $d - 1$ kroz BFS drvo, te i do čvora w vodi put kroz BFS drvo dužine najviše d. □

Lema: Ako je graf $G = (V, E)$ neusmeren i $(v, w) \in E$ neka njegova proizvoljna grana, onda ta grana spaja dva čvora čiji se nivoi razlikuju najviše za jedan.

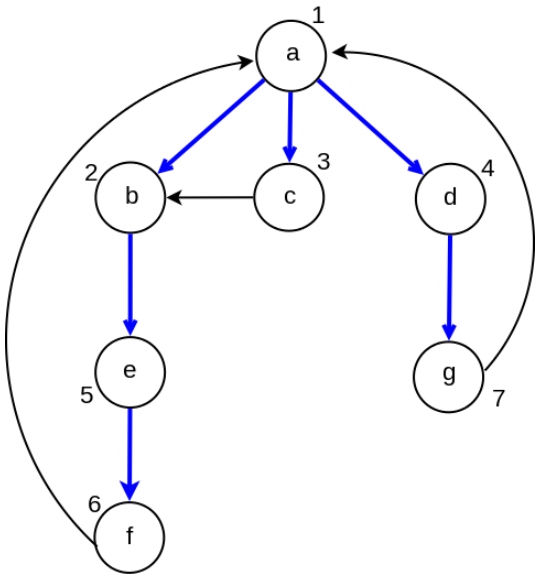
Dokaz: Pretpostavimo da je od čvorova v i w, čvor v prvi dostignut BFS pretragom i neka je njegov nivo d. Tada je nivo čvora w veći ili jednak od d. S druge strane, nivo čvora w nije veći od $d + 1$, jer do njega vodi grana BFS drveta ili iz čvora v, ili iz nekog čvora koji je označen pre v. Dakle, nivo čvora w



Slika 18: Ilustracija uz dokaz leme.

je ili d ili $d+1$, te tvrđenje leme važi. □

Primetimo da analogno tvrđenje ne bi nužno važilo u slučaju da je graf usmeren (slika 19).



Slika 19: Ilustacija da lema 3 ne važi za usmerene grafove. Grane (f, a) i (g, a) povezuju dva čvora čiji se nivoi razlikuju za više od 1.