Računarska grafika
Reprezentacija krivih i površi u 3D

Vesna Marinković

Beg iz "ravnice"

- Do sada smo radili sa ravnim entitetima, poput pravih i poligona
  - dobro se uklapaju sa grafičkim hardverom
  - matematički jednostavni
- U mnogim primenama računarske grafike neophodne su glatke krive i površi
  - modelovanje objekata
  - fontovi u visokom kvalitetu
  - modelovanje kretanja kamere
  - putanja kroz prostor boja ...

Kako predstaviti krive u 3D?

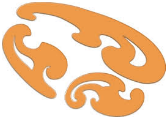
- Rasterski format nije pogodan: alijasing, nema skalabilnosti, memorijski zahtevno

Kako predstaviti krive u 3D?

- Rasterski format nije pogodan: alijasing, nema skalabilnosti, memorijski zahtevno
- Kriva je zadata listom kontrolnih tačaka

Kako predstaviti krive u 3D?

- Rasterski format nije pogodan: alijasing, nema skalabilnosti, memorijski zahtevno
- Kriva je zadata listom kontrolnih tačaka
  - U klasičnim numeričkim metodama nad datim tačkama dizajniramo jedinstvenu globalnu krivu
  - U kontekstu računarske grafike i CAD je pogodnije dizajnirati male povezane segmente krive



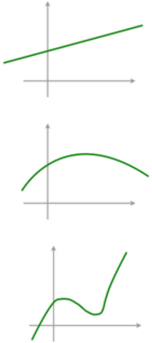
- Načini interpolacije:
  - deo-po-deo linearna aproksimacija
  - trigonometrijske funkcije
  - polinomi višeg reda

Polinomska interpolacija

- Najčešće se koristi polinomska interpolacija, pri čemu su polinomi trećeg stepena
- Zašto stepen 3?

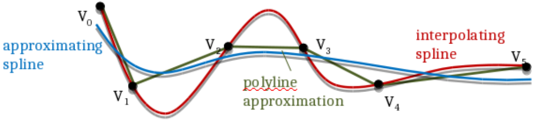
Polinomska interpolacija

- Najčešće se koristi polinomska interpolacija, pri čemu su polinomi trećeg stepena
- Zašto stepen 3?
  - polinomi nižeg stepena nisu dovoljno fleksibilni
  - polinomi visokog stepena zahtevaju više računa
  - najmanji stepen takav da kriva ne pripada nužno ravni



Krive u 3D

- Pamtimo listu kontrolnih tačaka (i vektora), a između njih vršimo neki vid interpolacije ili aproksimacije
- Splajn je parametarska kriva vođena kontrolnim tačkama ili kontrolnim vektorima



- Brojne primene: za predstavljanje glatkih krivih, za generisanje frejmova između dve slike za davanje privida glatke animacije, za aproksimiranje skupih funkcija (log, sin, . . .)

Različite reprezentacije krivih

- Eksplicitna reprezentacija $y = f(x), z = g(x)$
  - problemi: za jednu vrednost x postoji samo jedna tačka na krivoj sa tom vrednošću x, ne mogu se predstaviti vertikalne prave
  - rešenje: potrebno je kombinovati više krivih

Različite reprezentacije krivih

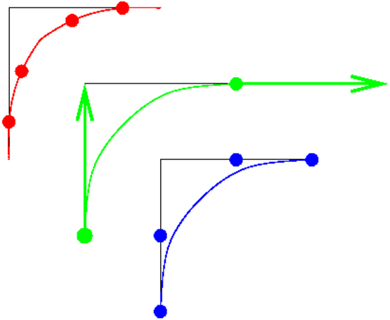
- Eksplicitna reprezentacija $y = f(x), z = g(x)$
  - problemi: za jednu vrednost x postoji samo jedna tačka na krivoj sa tom vrednošću x, ne mogu se predstaviti vertikalne prave
  - rešenje: potrebno je kombinovati više krivih
- Implicitna reprezentacija $f(x, y, z) = 0$
  - problem: ovakva reprezentacija može da dâ više rešenja nego što nam treba
  - rešenje: potrebno je koristiti dodatne uslove, što može stvoriti druge probleme

Različite reprezentacije krivih

- Eksplicitna reprezentacija $y = f(x), z = g(x)$
  - problemi: za jednu vrednost x postoji samo jedna tačka na krivoj sa tom vrednošću x, ne mogu se predstaviti vertikalne prave
  - rešenje: potrebno je kombinovati više krivih
- Implicitna reprezentacija $f(x, y, z) = 0$
  - problem: ovakva reprezentacija može da dâ više rešenja nego što nam treba
  - rešenje: potrebno je koristiti dodatne uslove, što može stvoriti druge probleme
- Parametarska reprezentacija $x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ 0 \leq t \leq 1$
  - ova reprezentacija nema većinu problema koje imaju prethodne dve
  - za funkcije x, y i z se često koriste kubni polinomi

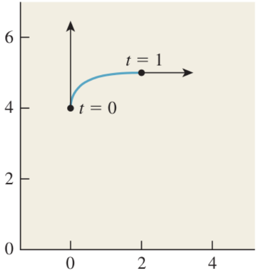
Predstavljanje kubnih krivih

- Za definisanje kubnih krivih potrebne su nam vrednosti 4 parametara
- Postoji veći broj mogućnosti za izbor ta 4 parametra
- Najčešći načini za predstavljanje krivih:
  - interpolacija
  - Hermitova kriva
  - Bezjeova kriva



Hermitova kriva – primer

- Automobil se kreće duž y ose sa vektorom brzine $[0, 3]^T$ i stiže u tačku $(0, 4)$ u trenutku $t = 0$
- Potrebno je modelovati kretanje automobila koji skreće i usporava tako da je u trenutku $t = 1$ u poziciji $(2, 5)$ sa vektorom brzine $[2, 0]$



Hermitova kriva – opšta formulacija

- Za date pozicije P i Q i vektore brzina v i w odrediti funkciju $\gamma : [0, 1] \rightarrow R^2$ tako da je

$$\gamma(0) = P, \gamma(1) = Q, \gamma'(0) = v, \gamma'(1) = w$$

- Opšti oblik kubnog polinoma (i njegovog izvoda) je

$$\gamma(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

$$\gamma'(t) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1$$

- Zamenom uslova u jednačinu dobija se rešenje koje ima sledeći oblik

$$\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P + (-2t^3 + 3t^2)Q + (t^3 - 2t^2 + t)v + (t^3 - t^2)w$$

$$= (1 - t)^2(2t + 1)P + t^2(-2t + 3)Q + t(t - 1)^2v + t^2(t - 1)w$$

Hermitova kriva – opšti pojmovi

- Rezultujuća kriva naziva se Hermitova kriva za ulaz P, Q, v i w
- Četiri polinoma u gornjoj jednačini (uz P, Q, v i w) nazivaju se Hermitove bazne funkcije
- Na koji način se menja kriva ako hoćemo da izmenimo samo početnu tačku (ili, analogno, neki drugi od datih paramatera)?

Hermitova kriva – opšti pojmovi

- Rezultujuća kriva naziva se Hermitova kriva za ulaz P, Q, v i w
- Četiri polinoma u gornjoj jednačini (uz P, Q, v i w) nazivaju se Hermitove bazne funkcije
- Na koji način se menja kriva ako hoćemo da izmenimo samo početnu tačku (ili, analogno, neki drugi od datih paramatera)?
  - ako se koristi Hermitova baza potrebno je izmeniti samo koeficijent uz jedan polinom
  - ako se koristi standardna baza $\{1, t, t^2, t^3\}$ potrebno je izmeniti sve koeficijente

Hermitova kriva – matrični zapis

- Hermitovu krivu

$$\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P + (-2t^3 + 3t^2)Q + (t^3 - 2t^2 + t)v + (t^3 - t^2)w$$

možemo zapisati u matričnoj formi:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} P & Q & v & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} = G \cdot M \cdot \mathbf{T}(t)$$

- $\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}^T$
- G – geometrijska matrica krive, čije su kolone koordinate od P, Q, v, w
- M – bazna matrica koja sadrži koeficijente polinoma Hermitove baze

Hermitova kriva – matrični zapis

- Hermitovu krivu

$$\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P + (-2t^3 + 3t^2)Q + (t^3 - 2t^2 + t)v + (t^3 - t^2)w$$

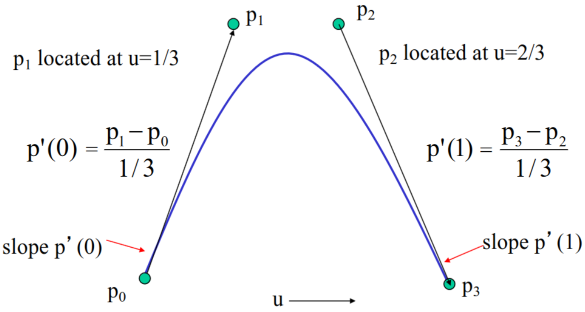
možemo zapisati u matričnoj formi:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} P & Q & v & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} = G \cdot M \cdot \mathbf{T}(t)$$

- $\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}^T$
- G – geometrijska matrica krive, čije su kolone koordinate od P, Q, v, w
- M – bazna matrica koja sadrži koeficijente polinoma Hermitove baze
- Ovim je zadata promena baze iz Hermitove baze u bazu $\{1, t, t^2, t^3\}$

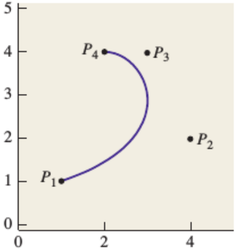
Bezjeova kriva – primer

- Dat je skup kontrolnih tačaka P_0, P_1, P_2, P_3 nad kojima je potrebno kreirati glatku krivu
- Povezivanje ovih tačaka dužima vodi funkciji koja nije glatka



Bezjeova kriva – opšta formulacija

- Za razliku od Hermitove krive koja je određena sa dve tačke i dva vektora, Bezjeova kriva se gradi nad 4 tačke P_1, P_2, P_3, P_4
- Kriva počinje u tački P_1, završava se u tački P_4, ima inicijalnu brzinu $3(P_2 - P_1)$ i završnu brzinu $3(P_4 - P_3)$



Bezjeova kriva – matrični zapis

- Bezjeova kriva data je jednačinom:

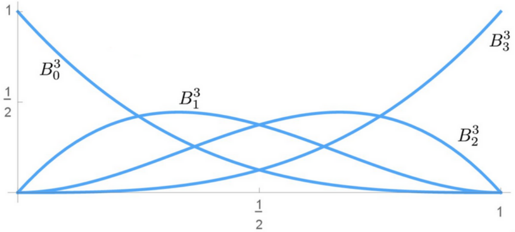
$$\gamma(t) = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}(t)$$

- Kolone geometrijske matrice sadrže koordinate 4 date tačke, a bazna matrica sadrži drugačije koeficijente u odnosu na Hermitovu krivu
- Bezjeova kriva ima manje intuitivnu specifikaciju
- Prednost Bezjeove krive je u tome što su svi ulazni podaci tačke

Funkcije mešanja

- Razmotrimo bazne funkcije u slučaju Bezjeove krive

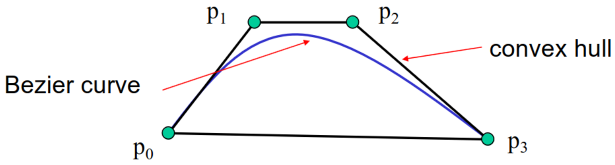
$$\gamma(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t)P_3 + t^3 P_4$$



- Specijalan slučaj Bernštajnovih polinoma $B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$
  - sve nule su u 0 i 1
  - za svaki stepen sumiraju se na 1
  - na intervalu $(0, 1)$ imaju vrednost između 0 i 1

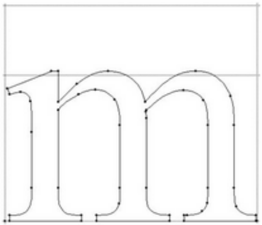
Kubna Bezjeova kriva – svojstva

- Prolazi kroz krajnje tačke P_0 i P_3
- Tangentna je na segmente P_0P_1 i P_2P_3
- Sadržana je u konveksnom omotaču kontrolnih tačaka



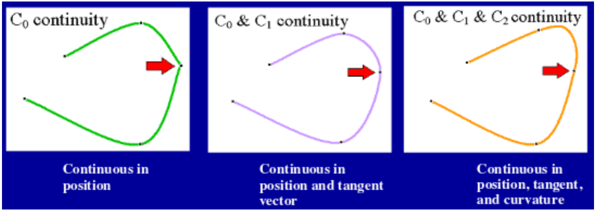
Bezjeova kriva – primene

- Kubne Bezjeove krive se koriste, između ostalog, za definicije fontova
- Koriste se i u mnogim programima za crtanje i pravljenje ilustracija (npr. Adobe Illustrator)



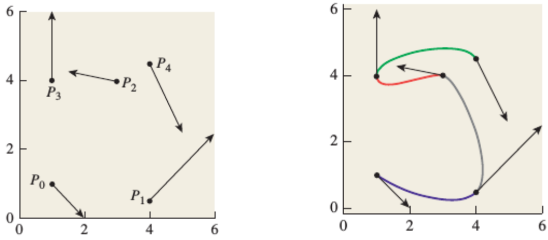
Nadovezivanje krivih

- Postoji više kriterijuma za nadovezivanje krivih jedna na drugu:
  - ograničenja nad krajnjim tačkama
  - ograničenja nad tangentnim vektorima (tj. izvodima)
  - ograničenja vezana za neprekidnost u krajnjim tačkama
- Razlikujemo sledeće klase neprekidnosti
  - C^0 – neprekidna funkcija
  - C^1 – diferencijabilna funkcija, prvi izvod neprekidan
  - C^2 – dva puta diferencijabilna funkcija, prvi i drugi izvod su neprekidni



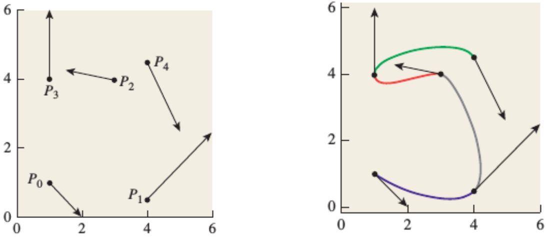
Nadovezivanje krivih

- Dat je niz tačaka $P_0, P_1, \ldots, P_n$ i pridruženih vektora $v_0, v_1, \ldots, v_n$
- Potrebno je odrediti krivu $\gamma : [0, n] \to R^2$ koja prolazi kroz date tačke sa datim vektorima brzina
- Možemo odrediti Hermitovu krivu $\gamma_0 : [0, 1] \to R^2$ koja počinje u tački P_0, završava se u P_1 i ima početnu i završnu tangentu v_0 i v_1
- Analogno, možemo odrediti krivu $\gamma_1 : [0, 1] \to R^2$ koja počinje u tački P_1, završava se u P_2 i ima brzine v_1 i v_2 i slično krive $\gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$



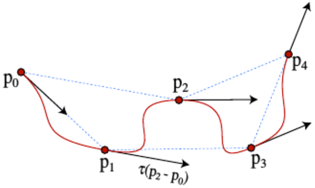
Nadovezivanje krivih

- Rezultat sastavljen od krivih γ je neprekidna diferencijabilna kriva koja prolazi kroz svaku tačku sa odgovarajućom tangentom
- Pojedinačni delovi $t_i \to \gamma_i(t - i)$ se nazivaju segmentima krive, kompletna kolekcija se naziva splajn, a date tačke i vektori kontrolnim podacima
- Ovim se postiže lokalna kontrola nad krivom: svaka kontrolna tačka utiče na ograničeni deo krive



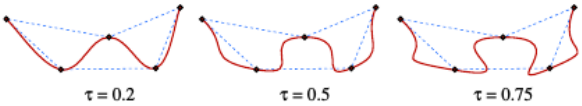
Ketmul-Rom splajn

- Dat je niz tačaka $P_0, P_1, \ldots, P_n$, potrebno je pronaći glatku krivu koja prolazi kroz tačku P_i u trenutku $t = i, i = 0, 1, \ldots, n$
- Ako bismo znali tangentu u svakoj tački P_i mogli bismo da iskoristimo Hermitove krive
- Ideja je iskoristiti prethodnu i narednu kontrolnu tačku za navođenje: tangentni vektor u tački P_i biramo da bude u smeru $P_{i+1} - P_{i-1}$
- Rezultujuću krivu nazivamo Ketmul-Rom splajn
- Ketmul-Rom splajn nije sadržan u konveksnom omotaču kontrolnih tačaka



Tenzija splajna

- Tangetni vektor se skalira vrednošću $\tau \in [0, 1]$ koju nazivamo tenzijom splajna
- Tenzija splajna određuje koliko se oštro kriva savija u kontrolnim tačkama



- Pretpostavimo da je vrednost $\tau = 1/3$, odnosno da je tangentni vektor: $v_i = \frac{1}{3}(P_{i+1} - P_{i-1})$

Ketmul-Rom splajn – matrični zapis

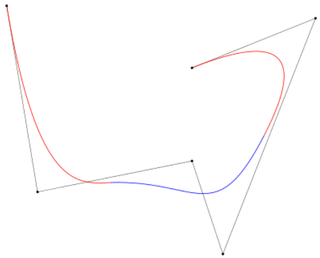
- Krivu možemo definisati na segmentu P_iP_{i+1} tako što zamenimo vrednosti vektora tangenti u jednačinu Hermitove krive:

$$\gamma_i(t) = \begin{bmatrix} P_i & P_{i+1} & \frac{P_{i+1}-P_{i-1}}{3} & \frac{P_{i+2}-P_i}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}(t)$$

- Vrednost $\gamma_i(t)$ dobija se kao funkcija tačaka $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$
- Za P_0 koristimo vektor tangente $v_o = \frac{2}{3}(P_1 - P_0)$ (što bismo dobili ako bi postojala i tačka P_{-1} simetrično tački P_1 u odnosu na P_0)
- Analogno i za P_n
- Pojedinačne funkcije su beskonačno diferencijabilne u većini tačaka (jer su definisane polinomima), ali u zajedničkim tačkama su samo jednom diferencijabilne

Kubni B-splajn

- Kubni B-splajnovi su nalik Ketmul-Rom splajnovima, razlikuju se po tome što su kubni B-splajnovi:
  - C^2 glatki, tj. i prvi i drugi izvod su neprekidne funkcije
  - neinterpolišući, tj. oni prolaze blizu kontrolnih tačaka ali ne kroz njih u opštem slučaju
- Iako B-splajn ne prolazi kroz kontrolne tačke, njegov dodatni stepen neprekidnosti čini ga atraktivnim za mnoge primene



Dva pristupa crtanju parametarskih krivih

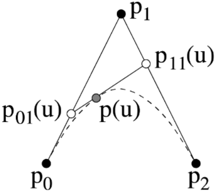
- Iterativna procedura
  - Povećavamo vrednost parametra t za istu konstantnu (malu) vrednost
  - Računamo vrednosti $x(t), y(t)$ i $z(t)$
  - Tačku $(x(t), y(t), z(t))$ spajamo pravom linijom sa prethodno određenom tačkom
- Rekurzivna procedura
  - delimo krivu na segmente dok se ne dođe do približno pravih linija
  - za različite tipove krivih razlikuje se proces podele
  - za različite tipove krivih razlikuju se testovi da li se segment krive može aproksimirati pravom linijom

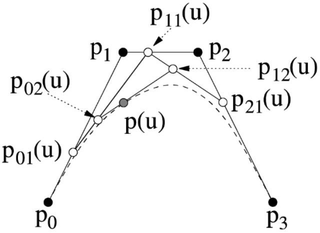
Algoritam De Kasteljau

- Koristi se za određivanje tačke na Bezjeovoj krivoj za datu vrednost parametra t, odnosno za podelu jedne Bezjeove krive na dve
- Isecanjem oštrih uglova dobijamo poligon koji je glatkiji
- Ponavljanjem ovog postupka dobili bismo krivu iz klase C^1

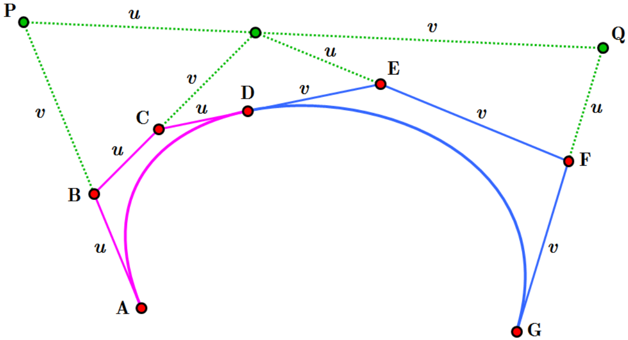
$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_{01}(u) &= (1-u)\mathbf{p}_0 + u\mathbf{p}_1 \\
\mathbf{p}_{11}(u) &= (1-u)\mathbf{p}_1 + u\mathbf{p}_2.
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{p}(u) = (1-u)\mathbf{p}_{01}(u) + u\mathbf{p}_{11}(u)$$





Primer podele za kubnu Bezjeovu krivu



Parametarske krive u 3D – podsetimo se

- Parametarska reprezentacija površi u 3D predstavlja uopštenje parametarske reprezentacije krivih
- Matrični zapis krive (koristimo oznaku parametra s umesto t):

$$\gamma(s) = G \cdot M \cdot \mathbf{S}(s)$$

  - $\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix}^T$
  - G – geometrijska matrica krive
  - M – bazna matrica

Parametarske površi u 3D

- Umesto konstantne vrednosti geometrijske matrice, dozvoljavamo da se tačke u G menjaju u 3D prostoru duž neke putanje

$$\gamma(s,t) = G(t) \cdot M \cdot S(s)$$

- Za fiksiranu vrednost t_1 parametra t, $\gamma(s,t_1)$ je parametarska kriva
- Za vrednost t_2 blisku t_1 dobija se kriva $\gamma(s,t_2)$ bliska krivoj $\gamma(s,t_1)$
- Familija ovakvih krivih linija formira površ u 3D