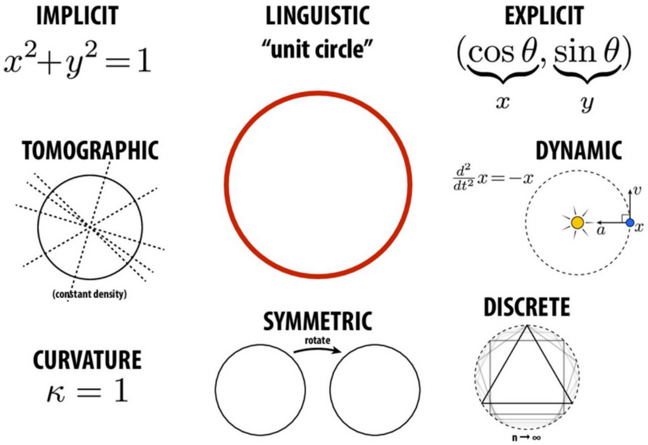
Računarska grafika
Reprezentacija figura

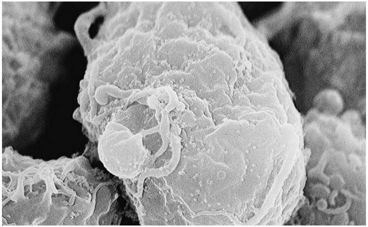
Vesna Marinković

Kako opisati geometriju jediničnog kruga?



Ovaj i neki naredni slajdovi su preuzeti sa slajdova Univerziteta Carnegie Mellon.

Primeri geometrija



Klasifikacija reprezentacija

- Postoji veliki broj načina da se digitalno kodira reprezentacija

Klasifikacija reprezentacija

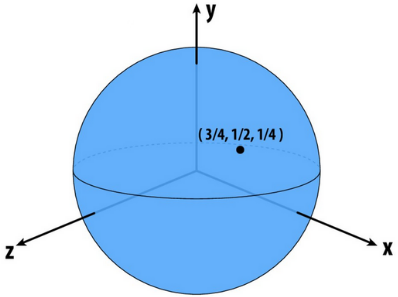
- Postoji veliki broj načina da se digitalno kodira reprezentacija
- Eksplicitne reprezentacije
  – direktno kodiraju gde se nalaze tačke sa figure
  - oblak tačaka,
  - mreža poligona,
  - reprezentacije kretanjem,
  - deo-po-deo Bezijeova kriva,
  - splajn,
  - NURBS,...

Klasifikacija reprezentacija

- Postoji veliki broj načina da se digitalno kodira reprezentacija
- Eksplicitne reprezentacije
  – direktno kodiraju gde se nalaze tačke sa figure
  - oblak tačaka,
  - mreža poligona,
  - reprezentacije kretanjem,
  - deo-po-deo Bezijeova kriva,
  - splajn,
  - NURBS,...
- Implicitne reprezentacije
  – daju efektivni test da li tačka pripada figuri ili ne
  - algebarske površi,
  - geometrija čvrstih tela,
  - skupovi nivoa,
  - fraktali,...

Implicitne reprezentacije

- Tačke sa figure nisu direktno poznate, već zadovoljavaju neki odnos
- Npr. jedinična sfera se sastoji od tačaka koje zadovoljavaju jednačinu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; u opštem slučaju $f(x, y, z) = 0$
- Pogodne su za zadatke tipa: “da li se tačka nalazi unutar figure?”, “kolika je udaljenost tačke do površi?”
- Kako proveriti da li se tačka $(3/4, 1/2, 1/4)$ nalazi unutar sfere?



Algebarske površi

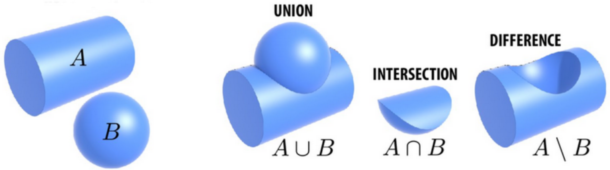
- Površ je skup nula polinoma po x, y i z

$x^2+y^2+z^2=1$ $\quad$ $(R-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=r^2$ $\quad$ $(x^2+\frac{9y^2}{4}+z^2-1)^3 = x^2z^3+\frac{9y^2z^3}{80}$

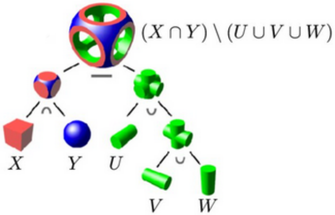
- Složene figure je teško opisati na ovaj način
- Teško je izgenerisati veliki broj tačaka sa površi (da bi je npr. nacrtali)

Geometrija čvrstih tela (eng. constructive solid geometry)

- Od jednostavnijih oblika korišćenjem Bulovih operacija dobijamo složenije

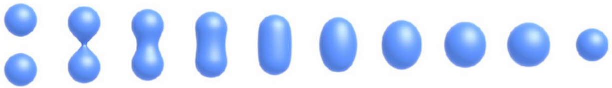


- Može se vršiti nadovezivanje ovakvih operacija



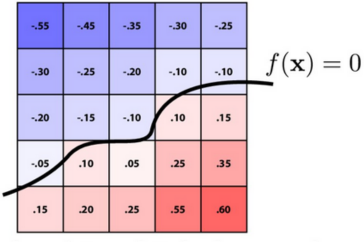
Površi bez striktnog oblika (eng. blobby surface)

- Umesto Bulovih operacija, dve površi se mogu postepeno mešati



Nivo-skupovi (eng. level sets)

- U mreži možemo čuvati aproksimirane vrednosti funkcije
- Površ prolazi tamo gde je interpolirana vrednost funkcije jednaka 0



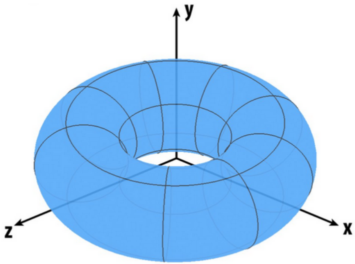
- Može se javiti alijasing problem
- Pogodne za simulaciju fluida
- Velika prostorna složenost reprezentacije

Fraktali

- Geometrija koju vidimo u prirodi često ima puno sličnih delova, detalja u svim srazmerama
- Oblik se može razložiti na manje delove tako da je svaki od delova smanjena kopija celine
- Teško se kontroliše oblik

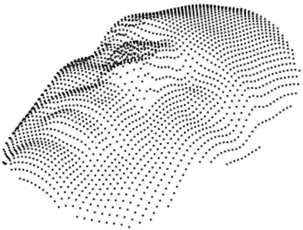
Eksplicitne reprezentacije

- Tačke sa figure se direktno zadaju ili postoji mogućnost njihovog generisanja
- Npr. jedinična sfera se može zadati kao skup tačaka
  $(\cos u \cdot \sin v, \sin u \cdot \sin v, \cos v)$ za $0 \leq u < 2\pi$ i $0 \leq v \leq \pi$;
  u opštem slučaju $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \rightarrow (x, y, z)$
- Pogodne su za zadatke poput uzorkovanja
- Kako proveriti da li se tačka $(3/4, 1/2, 1/4)$ nalazi unutar torusa datog sa
  $f(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)$?



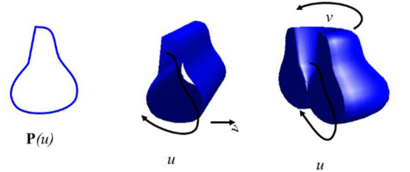
Oblak tačaka (eng. point cloud)

- Najjednostavnija reprezentacija: veliki spisak tačaka koje pripadaju obliku
- Često proširen informacijama o normalama, boji i sl.
- Jednostavno je predstaviti proizvoljnu geometriju
- Jednostavno iscrtavanje ako imamo gust oblak tačaka (više od jedne tačke po pikselu)
- Teško je vršiti interpolaciju u regionima gde nema dovoljno tačaka

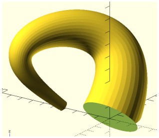


Reprezentacija kretanjem (eng. sweep representation)

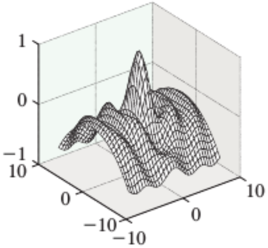
- Kretanje nekog objekta duž neke putanje u prostoru određuje telo
- Najjednostavnija tela ove vrste su definisana 2D oblašću koja se kreće duž linearne putanje upravne na ravan oblasti – to su translaciona tela
- Tela dobijena rotacijom 2D oblasti oko ose nazivaju se rotaciona tela



- Proširenja ove reprezentacije dozvoljavaju da se objekat koji se kreće skalira tokom kretanja (i slična uopštenja)

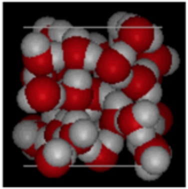
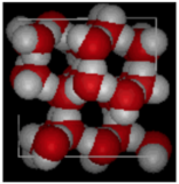


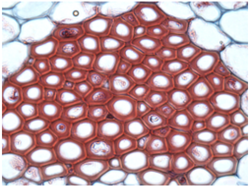
Mreže poligona



- Mreža poligona je skup (najčešće velikog broja) poligona međusobno povezanih ivicama koji formiraju površ

Mreže poligona u prirodi

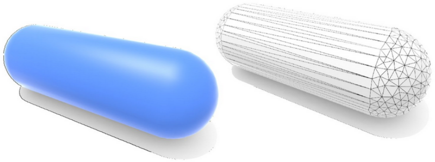


- U prirodi se javljaju u mnogim kontekstima: molekuli, kristali, tkiva
- Složeni oblici opisani su kao kolekcije jednostavnih primitiva
- Primitive su uglavnom konveksne, ali su iregularnog oblika

Primer: Shaw center, Otava

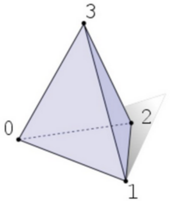
Prednosti i mane mreže poligona

- Prednosti ove reprezentacije:
  - jednostavna reprezentacija
  - (skoro) sve se može predstaviti poligonima
  - renderovanje poligona je brzo i jednostavno
  - konačna reprezentacija
  - za svako teme su poznati susedi
  - možemo raditi prilagodljivo uzorkovanje
  - predstavlja ulaz/izlaz različitih alata



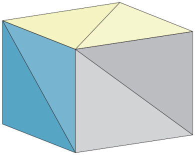
- Ipak ovakva reprezentacija nije idealna:
  - uvek predstavlja aproksimaciju zakrivljene površi
  - može biti veoma nestrukturirana
  - moramo da čuvamo mnogo više informacija, ne samo spisak tačaka

Mreža trouglova

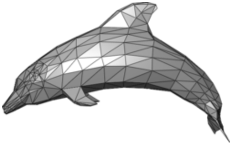


- U računarskoj grafici najčešće se koriste mreže trouglova
- Kolekcija trouglova u 3D prostoru
- Prednosti korišćenja mreža trouglova:
  - najjednostavniji poligon koji ima površinu
  - trougao leži uvek u ravni
  - pogodno jer grafičke biblioteke znaju samo da crtaju trouglove
- Elementi mreže trouglova:
  - temena
  - ivice
  - trougaone strane

Predstavljanje figura mrežom trouglova

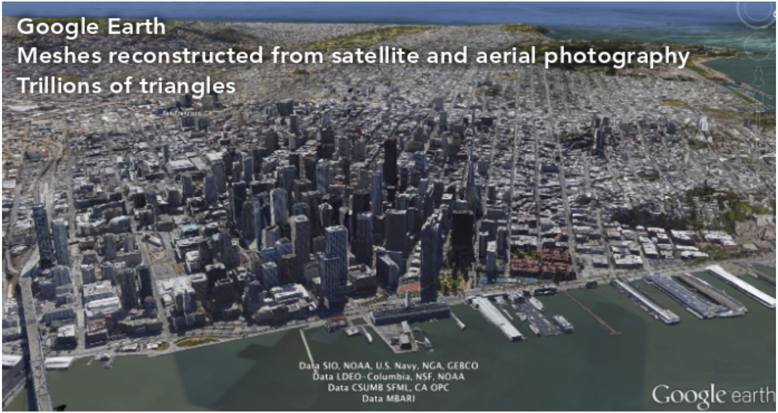


- Poliedre transformišemo u mreže trouglova podelom strana na trouglove



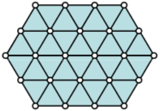
- Figure koje ne možemo tačno predstaviti mrežama trouglova, aproksimiramo utvrđivanjem lokacija velikog broja tačaka na figuri i povezivanjem susednih tačaka

Mreže sa veoma velikim brojem poligona

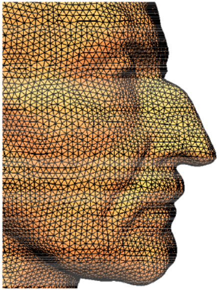


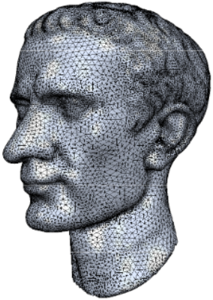
Koju mrežu smatramo dobrom?

- Jednakostranični trouglovi
- Broj suseda blizak broju 6



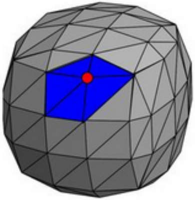
- Ravnomerno vs. prilagodljivo uzorkovanje ...





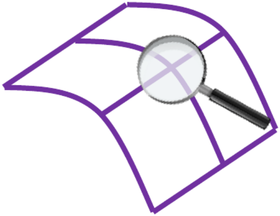
Mreža mnogostrukosti

- Mreža je mreža mnogostrukosti ako se sve ivice i trouglovi susedni temenu v mogu poređati u cikličnom poretku: $t_1, e_1, t_2, e_2, \dots, t_n, e_n$ bez ponavljanja tako da je ivica e_i stranica trouglova t_i i t_{i+1} (indeksi se računaju po modulu n)
- Drugim rečima, mreža trouglova je mreža mnogostrukosti ako:
  - svaka ivica pripada tačno dvema stranama mreže
  - poligoni susedni jednom temenu formiraju jedan zatvoreni ciklus
- Operacije nad mrežom mnogostrukosti i strukture podataka za predstavljanje mreža mnogostrukosti su znatno jednostavnije

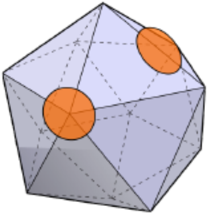


Mnogostrukosti u topologiji

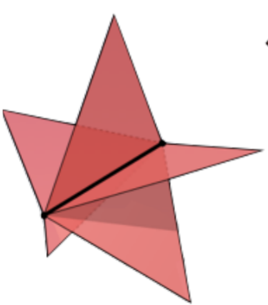
- U topologiji za mnogostrukosti važi da svaka tačka ima okolinu koja izgleda kao disk
- Ako dovoljno zumiramo površ deluje kao ravan (primer: planeta Zemlja)
- Ako površ presečemo malom sferom dobijamo disk

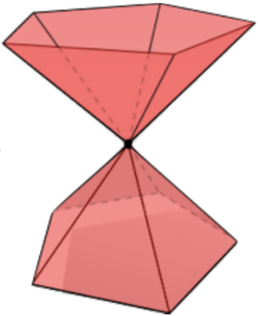


Primer mreže mnogostrukosti

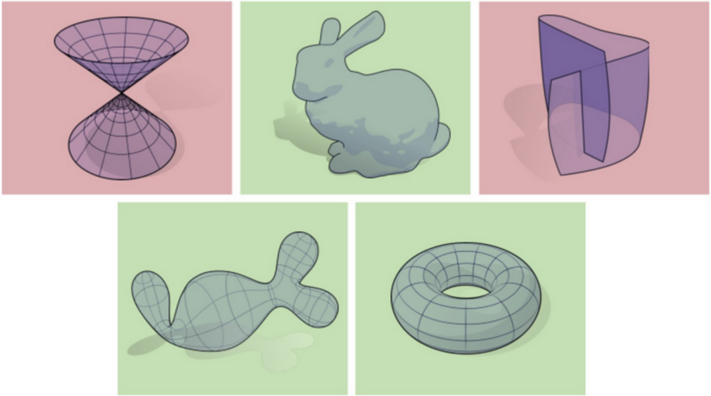


Primeri mreža trouglova koje nisu mreže mnogostrukosti

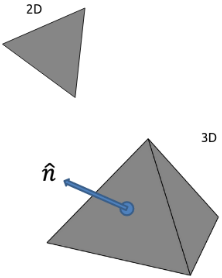




Primeri mreža koje jesu i koje nisu mreže mnogostrukosti



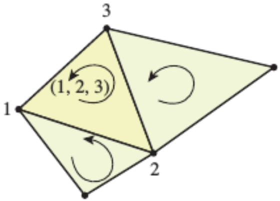
Vektori normala

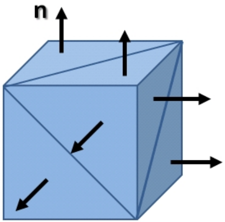


- U 3D prostoru, trouglovi mogu imati proizvoljni položaj
- Vektorom normale zadaje se orijentacija trougla
- Vektori normale su važni za: identifikovanje zadnje stane objekta, interakciju svetlosti sa površi, . . .

Orijentacija trouglova u mreži

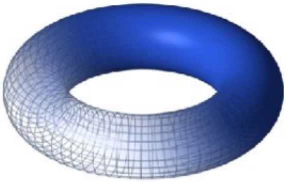
- Trouglove u mreži orijentišemo tako što za temena trougla v_i, v_j i v_k računamo vektor normale ravni kojoj pripada taj trougao $(v_j - v_i) \times (v_k - v_i)$
- Dva susedna poligona su konzistentno orijentisana ako se ivica koju dele javlja kao (v_i, v_j) u jednom poligonu, a kao (v_j, v_i) u drugom



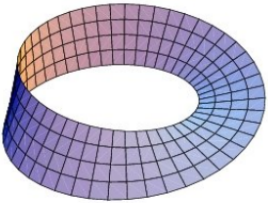


Orijentabilne i neorijentabilne mreže

- Mreža poligona je orijentabilna ako je moguće orijentisati poligone mreže tako da su svaka dva susedna poligona konzistentno orijentisana



Orientable



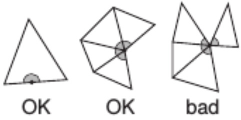
Non orientable

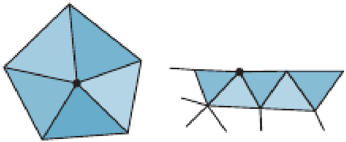
Mreže mnogostrukosti sa granicom

- Granica je tamo gde se površ završava
- Primer: struk i zglobovi u slučaju pantalona
- Lokalno izgleda kao poludisk
- Globalno, svaka granica formira ciklus

Mreže mnogostrukosti sa granicom

- Dozvoljavamo da se unutar mreže mnogostrukosti javi granično teme i granična ivica
- Za granično teme važi da ivice i strane kojima to teme pripada ne obrazuju ciklus, već lanac
- Za prvi i poslednji trougao u ovom lancu važi da se ivice koje su granične ne sadrže ni u jednom drugom trouglu osim u ovim
- Dakle, za mreže mnogostrukosti sa granicom važi:
  - svaka ivica je sadržana u jednom ili dva trougla
  - svako teme je sadržano u jednom lancu trouglova povezanih stranicama





Strukture podataka za predstavljanje mreže

- Mora biti prostorno efikasna
- Ako je potrebno promeniti topologiju mreže potrebno je efikasno odrediti:
  - sve čvorove povezane sa datim čvorom
  - sve ivice/čvorove date strane
  - sve strane/ivice oko datog čvora
  - obe strane/oba temena date ivice
  - stranu sa datim temenima

Različite reprezentacije mreže poligona

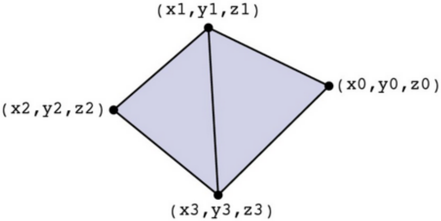
- Eksplicitna reprezentacija (supa poligona)
- Reprezentacija poligona listom indeksa temena
- Reprezentacija matricama incidencije
- Struktura podataka zasnovana na poluivicama
- Winged-edge reprezentacija
- Lanci povezanih trouglova (triangle fan, triangle strip)
- Dvostruko-povezane liste ivica (half-edge structure)

Supa poligona

- Svaki poligon P sa n temena zadat je nizom koordinata svojih temena

$$P = ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n))$$

- Redosled temena odgovara obilasku temena poligona



x0,y0,z0	x1,y1,z1	x3,y3,z3
x1,y1,z1	x2,y2,z2	x3,y3,z3

Supa poligona

- Prostorno neefikasno za veći broj poligona, kada temena pripadaju različitim poligonima
- Ne postoji eksplicitna informacija o zajedničkim temenima/ivicama
- Provera pripadnosti temena nekom drugom poligonu je skupa i može biti nepouzdana zbog greške zaokruživanja
- Prilikom iscrtavanja mreže poligona, svaka ivica se dva puta iscrtava

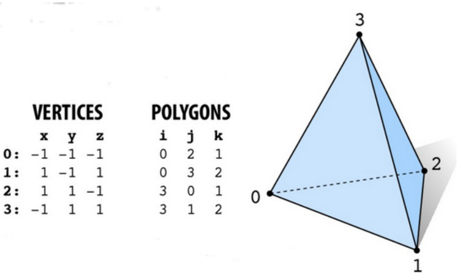
Reprezentacija poligona listom indeksa temena

- Svako teme zapisano je tačno jednom u listi temena

$$V = (V_1, V_2, \ldots, V_n) = ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n))$$

- Svaki poligon predstavljen je listom indeksa temena

$$P_1 = (i, j, k, l, m), P_2 = (u, v, w), \ldots$$


VERTICES

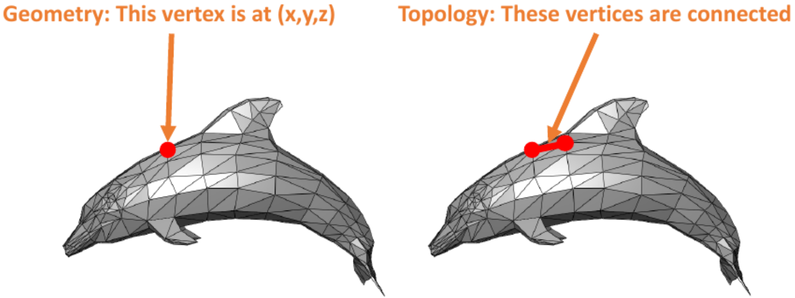
	x	y	z
0:	−1	−1	−1
1:	1	−1	1
2:	1	1	−1
3:	−1	1	1

POLYGONS

i	j	k
0	2	1
0	3	2
3	0	1
3	1	2

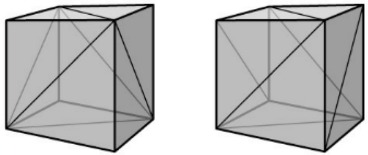
Geometrija vs. topologija mreže

- Tabela temena opisuje geometriju mreže, a tabela poligona njenu topologiju
- Malom izmenom vrednosti u tabeli temena broj povezanih komponenti se ne menja
- Dve nesusedne ivice mreže mogu se seći, ali se podešavanjem koordinata temena ovakav presek može izbeći

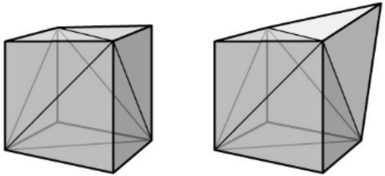


Geometrija vs. topologija mreže

- Ista geometrija mreže, ali drugačija topologija



- Ista topologija mreže, ali drugačija geometrija



Reprezentacija poligona listom indeksa temena

- Ova reprezentacija koristi manje memorije
- Ne postoji eksplicitna informacija o zajedničkim temenima/ivicama
- Određivanje svih poligona koji imaju kao teme neku tačku je linearne složenosti po broju poligona
- I u ovoj reprezentaciji svaka ivica se crta dva puta

Matrice incidencije

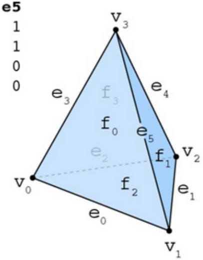
- Kodiramo sve informacije o susedstvu matricama incidencije: vrednost 1 označava incidenciju, a vrednost 0 da nije incidentno

VERTEX↔EDGE

	v0	v1	v2	v3
e0	1	1	0	0
e1	0	1	1	0
e2	1	0	1	0
e3	1	0	0	1
e4	0	0	1	1
e5	0	1	0	1

EDGE↔FACE

	e0	e1	e2	e3	e4	e5
f0	1	0	0	1	0	1
f1	0	1	0	0	1	1
f2	1	1	1	0	0	0
f3	0	0	1	1	1	0



Matrice incidencije

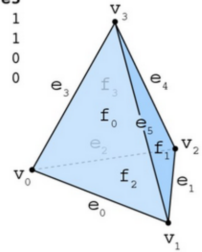
- Kodiramo sve informacije o susedstvu matricama incidencije: vrednost 1 označava incidenciju, a vrednost 0 da nije incidentno

VERTEX↔EDGE

	v0	v1	v2	v3
e0	1	1	0	0
e1	0	1	1	0
e2	1	0	1	0
e3	1	0	0	1
e4	0	0	1	1
e5	0	1	0	1

EDGE↔FACE

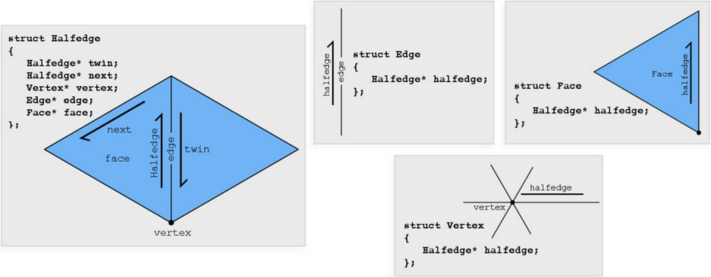
	e0	e1	e2	e3	e4	e5
f0	1	0	0	1	0	1
f1	0	1	0	0	1	1
f2	1	1	1	0	0	0
f3	0	0	1	1	1	0



- Za iole veće mreže matrice će biti retke – čuva se veliki broj nula; efikasnija reprezentacija je nizom povezanih listi
- Velika prostorna složenost, ali je traženje suseda $O(1)$
- Mreža ne mora biti mreža mnogostrukosti

Struktura podataka zasnovana na poluivicama

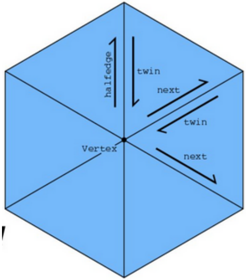
- Ova struktura podataka čuva samo neke informacije o susedstvu
- Svaku ivicu "delimo" na dve poluivice (eng. halfedge) u svakom od smerova
- Ključna ideja: dve poluivice se ponašaju kao lepak između elemenata mreže



- Svako teme, ivica i strana čuvaju pokazivač na tačno jednu poluivicu

Obilazak mreže korišćenjem poluivica

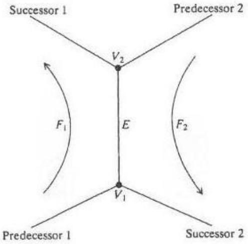
- Koristimo pokazivač na dvojnika ivice i pokazivač na narednu ivicu da se krećemo po mreži
- Primer: kako posetiti sva temena strane
- Primer: kako posetiti sve ivice susedne datom temenu



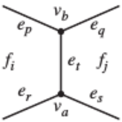
- Ova struktura ima smisla ako je mreža mnogostrukosti

Winged-edge struktura podataka

- Pogodna je za predstavljanje mreža kod kojih strane nisu trouglovi
- Ivice se smatraju građanima prvog reda
- Za svaku ivicu čuvaju se informacije o:
  - dva temena koje ivica povezuje
  - dve strane kojima ivica pripada
  - prethodnoj i sledećoj ivici prilikom obilaska u pozitivnom smeru leve, odnosno desne strane kojoj ivica pripada
- Za svako teme i za svaku stranu čuvaju se informacije o proizvoljnoj ivici koja im pripada



Winged-edge struktura podataka



Vertices

$x_a\ y_a\ z_a\ e_r$

$x_b\ y_b\ z_b\ e_q$

$\cdots$

Faces

e_r

e_s

$\cdots$

Winged edges

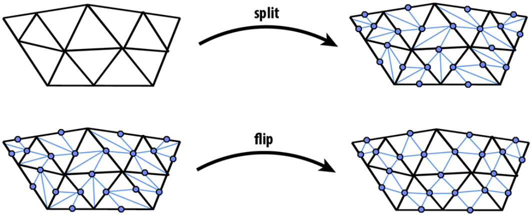
$v_a\ v_b\ f_i\ f_j\ e_r\ e_p\ e_s\ e_q$

$\cdots$

- Ova reprezentacija omogućava efikasno izvršavanje narednih operacija:
  - za datu stranu f odrediti sva njena temena v
  - za datu ivicu e odrediti obe njene susedne strane
  - za dato teme v odrediti sve susedne ivice/strane

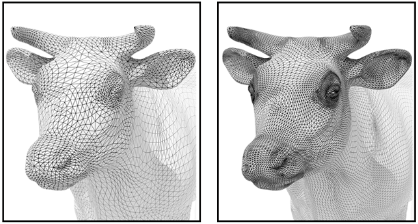
Operacije nad mrežom trouglova

- Jedna od najznačajnijih osobina mreže trouglova je homogenost
- Osnovne operacije nad mrežom trouglova su:
  - unapređivanje mreže
    - jedan trougao zamenjuje se sa nekoliko manjih trouglova, da bi se mreža učinila glatkijom
    - uzastopne podele dovode do značajnog povećanja broja trouglova
  - pojednostavljivanje mreže
    - mreža se zamenjuje drugom mrežom koja joj je slična, ali ima kompaktniju strukturu
    - stiže se do jednostavnije reprezentacije iste površi

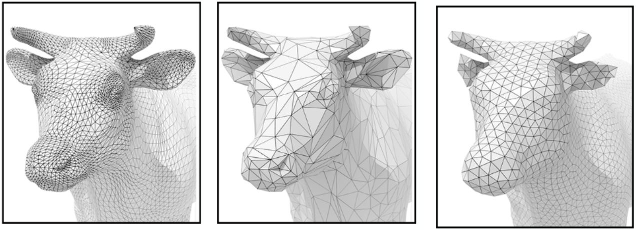


Operacije nad mrežom trouglova

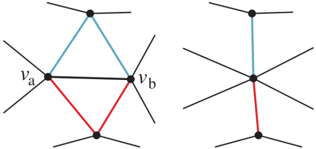
- Unapređivanje mreže



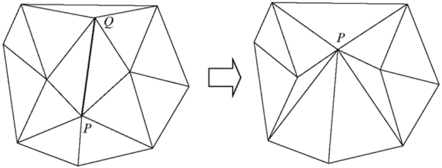
- Pojednostavljivanje mreže i regularizacija



Operacije nad mrežom trouglova – sažimanje ivice

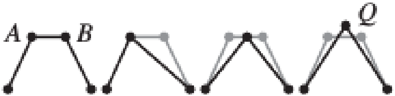


- Jedna od standardnih operacija pojednostavljivanja mreže je sažimanje ivice
- Ivica se sažima dok joj dužina ne postane 0



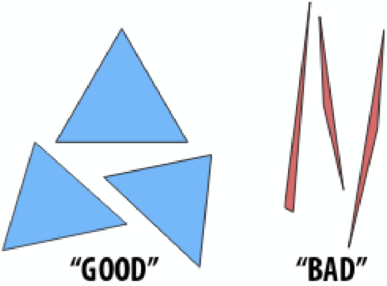
Operacije nad mrežom trouglova – sažimanje ivice

- Prilikom stapanja dva temena treba izabrati lokaciju za novo teme
- Lokacija novog temena zavisi od željenog cilja:
  - ako je cilj minimizovati račun, može se zadržati jedno od starih temena
  - ako želimo da očuvamo oblik, može se izabrati središte duži određene ovim temenima
  - ako uprosečavanje pomera puno tačaka a to nije poželjno, nova tačka se može izabrati tako da se minimizuje maksimalno rastojanje tačaka stare mreže od nove tačke mreže



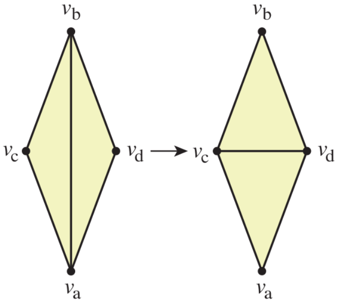
Operacije nad mrežom trouglova – zamena ivice

- Dešava se da se mreža deformiše tako da pojedinačni trouglovi postanu dugački i uski – imaju loš "aspect ratio"
- Aspect ratio se može definisati kao odnos dužine najduže i najkraće stranice trougla
- Želimo da iz mreže uklonimo trouglove sa velikom vrednošću za aspect ratio



Operacije nad mrežom trouglova – zamena ivice

- Ulepšavanje mreže obuhvata operacije nad mrežom kojima se teži tome da se trouglovi mreže učine što bliskijim jednakostraničnim trouglovima
- Zamena ivice transformiše dva dugačka i uska trougla u dva skoro jednakostranična trougla



Operacije nad mrežom trouglova – ilustracija