Računarska grafika
Geometrijske transformacije u 2D

Vesna Marinković

Geometrijske transformacije

- Geometrijska transformacija je funkcija koja preslikava skup tačaka u skup tačaka (često su oba skupa $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$)
- Gde se u računarskoj grafici koriste geometrijske transformacije?

Geometrijske transformacije

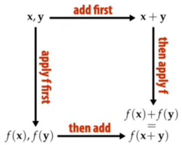
- Geometrijska transformacija je funkcija koja preslikava skup tačaka u skup tačaka (često su oba skupa $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$)
- Gde se u računarskoj grafici koriste geometrijske transformacije?
- Gotovo svuda!
    - za zadavanje dimenzija i pozicioniranje objekata u prostoru
    - za kretanje kamere u animacijama
    - za animiranje objekata tokom vremena
    - za transformacije iz jednog koordinatnog sistema u drugi
    - za projektovanje 3D objekata u 2D slike
    - za preslikavanje 2D tekstura na 3D objekte
    - za projektovanje senki 3D objekata na druge 3D objekte
    - ...
- Pojedine transformacije čuvaju neke atribute (dužinu duži, uglove, kolinearnost tačaka, ...)

Linearne transformacije

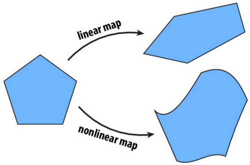
- Kada za f kažemo da je linearna transformacija?

Linearne transformacije

- Kada za f kažemo da je linearna transformacija?
- Algebarski: čuva operacije sabiranja i množenja skalarom
  - $f(v+w) = f(v) + f(w)$ za sve vrednosti v i w iz domena funkcije f
  - $f(cv) = cf(v)$ za sve skalare c i vrednosti v iz domena funkcije f



- Geometrijski:
  - preslikava prave u prave
  - čuva koordinatni početak



- Primeri linearnih transformacija: skaliranje, rotacija i smicanje

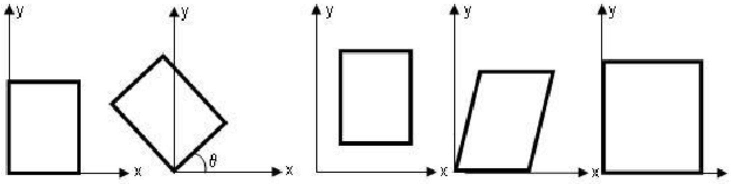
Linearne transformacije

- Koji je značaj linearnih transformacija?

Linearne transformacije

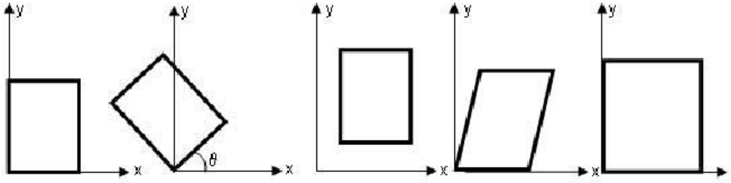
- Koji je značaj linearnih transformacija?
  - jeftine su za primenu
  - sve linearne transformacije se mogu predstaviti kao množenje matricom
  - relativno ih je jednostavno rešiti (sistem linearnih jednačina)
  - kompozicija linearnih transformacija je linearna transformacija
    - proizvod matrica linearnih transformacija je matrica složene transformacije
    - transformacije imaju uniformnu reprezentaciju
    - pojedostavljuje algoritme u računarskoj grafici

Prepoznavanje transformacija



- Ukoliko je na prvoj slici prikazan polazni objekat, koje transformacije su ilustrovane na narednim slikama?

Prepoznavanje transformacija



- Ukoliko je na prvoj slici prikazan polazni objekat, koje transformacije su ilustrovane na narednim slikama?
- Na koji način smo došli do zaključka?

Invarijante transformacija

- Transformacija je određena invarijantama koje čuva
  - linearna transformacija

Invarijante transformacija

- Transformacija je određena invarijantama koje čuva
  - linearna transformacija
    čuva prave i koordinatni početak
    $f(ax+y) = af(x) + f(y), f(0) = 0$
  - izometrijska transformacija

Invarijante transformacija

- Transformacija je određena invarijantama koje čuva
  - linearna transformacija
    čuva prave i koordinatni početak
    $f(ax+y) = af(x) + f(y), f(0) = 0$
  - izometrijska transformacija
    čuva rastojanja između tačaka
    $|f(x) - f(y)| = |x - y|$
  - translacija

Invarijante transformacija

- Transformacija je određena invarijantama koje čuva
  - linearna transformacija
    čuva prave i koordinatni početak
    $f(ax+y)=af(x)+f(y), f(0)=0$
  - izometrijska transformacija
    čuva rastojanja između tačaka
    $|f(x)-f(y)|=|x-y|$
  - translacija
    čuva razlike između proizvoljne dve tačke
    $f(x-y)=x-y$
  - skaliranje

Invarijante transformacija

- Transformacija je određena invarijantama koje čuva
  - linearna transformacija
    čuva prave i koordinatni početak
    $f(ax+y) = af(x) + f(y), f(0) = 0$
  - izometrijska transformacija
    čuva rastojanja između tačaka
    $|f(x) - f(y)| = |x - y|$
  - translacija
    čuva razlike između proizvoljne dve tačke
    $f(x - y) = x - y$
  - skaliranje
    čuva prave kroz koordinatni početak, pravac vektora
    $\frac{f(x)}{|f(x)|} = \frac{x}{|x|}$
  - rotacija

Invarijante transformacija

- Transformacija je određena invarijantama koje čuva
  - linearna transformacija
    čuva prave i koordinatni početak
    $f(ax+y) = af(x) + f(y), f(0) = 0$
  - izometrijska transformacija
    čuva rastojanja između tačaka
    $|f(x) - f(y)| = |x - y|$
  - translacija
    čuva razlike između proizvoljne dve tačke
    $f(x-y) = x - y$
  - skaliranje
    čuva prave kroz koordinatni početak, pravac vektora
    $\frac{f(x)}{|f(x)|} = \frac{x}{|x|}$
  - rotacija
    čuva koordinatni početak, rastojanja između tačaka, orijentaciju
    $f(0) = 0, |f(x) - f(y)| = |x - y|, det(f) > 0$

Baza vektorskog prostora

- Baza vektorskog prostora dimenzije 2 je skup vektora $\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\}$ za koje važi:
  - vektori iz datog skupa su linearno nezavisni
  - svaki vektor iz vektorskog prostora može se izraziti kao linearna kombinacija vektora iz ovog skupa: $V = c_1\overrightarrow{V_1} + c_2\overrightarrow{V_2}$
- Vektore baze vektorskog prostora nazivamo baznim vektorima

Izvođenje matrica linearnih transformacija u ravni

- Standardna baza: $\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Neka je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrica transformacije T

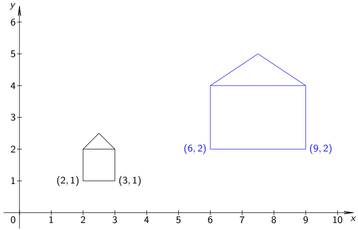
$$T(\vec{e_1}) = T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{e_2}) = T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

- Kolone matrice transformacije jednake su matrici transformacije T primenjenoj na vektore $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$
- Strategija za izvođenje matrica linearnih transformacija: računamo kolonu po kolonu matrice transformacije razmatranjem kako ona deluje na vektore standardne baze

Skaliranje u ravni u odnosu na koordinatni početak

- Tačke u ravni se mogu skalirati duž x i duž y ose
- Skaliranje ne mora nužno da bude uniformno – možemo da skaliramo po x osi za faktor 3, a po y osi za faktor 2 ($s_x = 3, s_y = 2$)



- Svojstva skaliranja:
  - ne čuvaju se uglovi između pravih u ravni, osim kada je $s_x = s_y$
  - ako objekat ne počinje u koordinatnom početku skaliranje će ga približiti ili udaljiti od koordinatnog početka

Matrica skaliranja u ravni

- Izvedimo matricu skaliranja S razmatranjem na koji način vektori $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ treba da budu transformisani:

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow s_x \cdot \vec{e_1} = \begin{bmatrix} s_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow s_y \cdot \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Matrica S je dijagonalna matrica:

$$x' = s_x \cdot x$$

$$y' = s_y \cdot y$$

Skaliranje sa negativnim faktorima

- Kada je $s_x = -1$ i $s_y = -1$ na skaliranje možemo da gledamo kao na kompoziciju dve refleksije

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

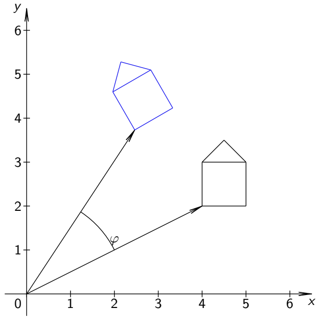
- S obzirom na to da svaka refleksija menja orijentaciju, pri skaliranju sa negativnim faktorima u 2D orijentacija se čuva
- Primetimo, na skaliranje u 3D sa faktorima $s_x = -1$, $s_y = -1$ i $s_z = -1$ možemo da gledamo kao na kompoziciju tri refleksije

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Orijentacija se u 3D ne čuva

Rotacija u ravni oko koordinatnog početka

- Razmotrimo rotaciju oko koordinatnog početka za ugao φ



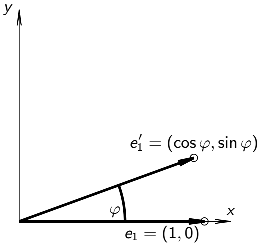
- Svojstva rotacije:
  - čuva koordinatni početak
  - čuva dužine duži
  - čuva uglove među parovima pravih
  - čuva orijentaciju

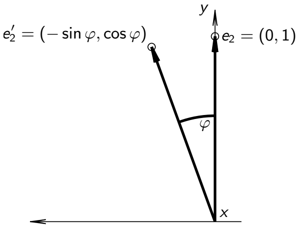
Matrica rotacije u ravni

- Izvedimo matricu rotacije R_φ razmatranjem na koji način ona utiče na vektore $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$:

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$





Matrica rotacije u ravni

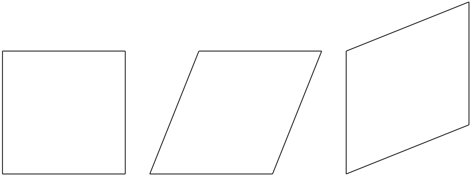
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = x \cdot \cos\varphi - y \cdot \sin\varphi$$

$$y' = x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi$$

Smicanje u ravni

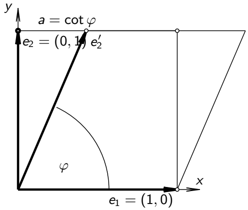
- Transformacija pri kojoj objekat treba iskositi u pravcu neke od koordinatnih osa



$SH_x : x' = x + ay$ $\quad$ $SH_y : y' = y + bx$

- Svojstva smicanja:
  - jedna osa (horizontalna ili vertikalna) je fiksna
  - ne čuvaju se dužine osim na pravcu u kom se vrši istezanje
  - ne čuvaju se uglovi

Matrica smicanja u ravni



- Izvedimo matricu smicanja u pravcu x ose SH_x razmatranjem na koji način ona utiče na vektore $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \operatorname{ctg}\varphi \\ 1 \end{bmatrix}$$

gde je φ ugao za koji se vrši iskošenje (označimo $a = \operatorname{ctg}\varphi$)

Matrica smicanja u ravni

- Smicanje u pravcu x ose

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{ctg}\varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = x + a \cdot y$$

$$y' = y$$

- Smicanje u pravcu y ose

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{ctg}\theta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = x$$

$$y' = y + b \cdot x$$

Opšti oblik matrice linearne transformacije

- U opštem obliku matrica linearne transformacije je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- Ukoliko je determinanta ove matrice $ad - bc$ jednaka nuli, onda ovu transformaciju zovemo singularna i ona nema inverz
- Kod singularnih transformacija kolone matrice su linearno zavisne
- Ukoliko je $ad - bc$ različito od nule, inverz matrice je $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- Matrice svih pomenutih linearnih transformacija su invertibilne

Translacija u ravni

- Nije linearna transformacija, te se ne može predstaviti kao množenje matricom
- Translaciju je moguće predstaviti korišćenjem sabiranja:

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Kompozicija transformacija

- Kompoziciju linearnih transformacija možemo predstaviti kao množenje matrica

$$M_3(M_2(M_1x)) = (M_3M_2M_1)x$$

- Kompoziciju translacija dobijamo sabiranjem vektora translacija

$$T_{u_1}(T_{u_2}(T_{u_3}(x))) = T_{u_1+u_2+u_3}(x)$$

- Šta ako želimo da izmešamo translacije i linearne transformacije?

$$M_2(M_1x + u_1) + u_2 = (M_2M_1)x + (M_2u_1 + u_2)$$

- Moramo da pratimo vrednosti i matrice i vektora

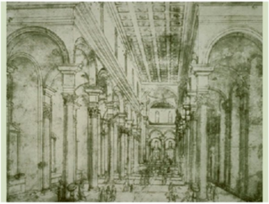
Homogene koordinate u ravni

- Želimo da translacija ($v' = v + T$), skaliranje ($v' = S \cdot v$), rotacija ($v' = R \cdot v$) i smicanje ($v' = SH \cdot v$) imaju istu formu
- Sabiranje sa vektorom nije konzistentno sa množenjem matricom transformacije
- Poželjno je sve transformacije predstaviti kao množenje matricom da bismo kombinaciju transformacija izrazili kao kompoziciju njihovih matrica
- U homogenim koordinatama sve ove transformacije imaju formu množenja matrica

Homogene koordinate u ravni

- Uvedene su iz potrebe da se razmatra perspektiva

Filippo Brunelleschi, 1428



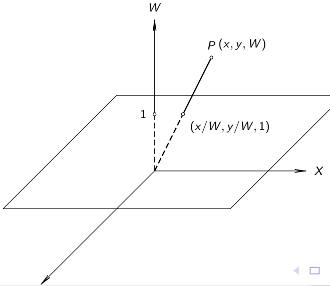
- Uveo ih je Möbius kao način da se pravama dodele koordinate
- Prirodan izbor na dosta mesta u računarskoj grafici:
  - 3D transformacije
  - perspektivne projekcije
  - preslikavanje senki
  - odsecanje
  - direkcioni izvori svetla
  - ...

Homogene koordinate u ravni

- Tačka u ravni predstavlja se trojkom vrednosti (x, y, W)
- Bar jedna od vrednosti x, y, W nije jednaka 0
- Dve trojke (x, y, W) i (x', y', W') predstavljaju istu tačku ako postoji broj t takav da je $x = tx'$, $y = ty'$ i $W = tW'$
- Ako je $W \neq 0$, onda tačku (x, y, W) možemo predstaviti u obliku $(x/W, y/W, 1)$ – homogenizacija
- $(x/W, y/W)$ zovemo Dekartovim koordinatama homogene tačke

Homogene koordinate u ravni

- Tačka $(x, y, 0)$ je beskonačno daleka tačka u pravcu (x, y)
- Homogenim tačkama u ravni odgovaraju trojke vrednosti, a te trojke odgovaraju tačkama u Dekartovom prostoru
- Skupu svih trojki kojima odgovara jedna ista homogena tačka odgovara prava Dekartovog prostora: sve tačke oblika (tx, ty, tW), $t \neq 0$ pripadaju jednoj pravoj Dekartovog prostora
- Ako homogenizujemo tačku, dobijamo njenu reprezentaciju $(x/W, y/W, 1)$ koja u Dekartovom smislu pripada ravni $W = 1$



2D transformacije u homogenim koordinatama

- Tačku $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ preslikavamo u tačku $v' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$
- U slučaju linearnih transformacija potrebno je "ugraditi" 2×2 matricu transformacije u gornji levi ugao 3×3 jedinične matrice:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- U slučaju translacije potrebno je "ugraditi" vektor translacije u treću kolonu jedinične matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Korišćenjem homogenih koordinata, afine transformacije u 2D možemo predstaviti kao linearne transformacije u 3D!

Inverzne transformacije

- Sve pomenute matrice transformacija su invertibilne
- Transformacija inverzna skaliranju u odnosu na koordinatni početak za faktore s_x i s_y je skaliranje u odnosu na koordinatni početak za faktore $\frac{1}{s_x}$ i $\frac{1}{s_y}$
- Transformacija inverzna rotaciji oko koordinatnog početka za ugao φ je rotacija oko koordinatnog početka za ugao $-\varphi$ (inverz matrice rotacije je njen transponat)
- Transformacija inverzna smicanju sa koeficijentom a u pravcu neke koordinatne ose je smicanje sa koeficijentom $-a$ u pravcu iste ose
- Transformacija inverzna translaciji za vektor $[t_x \ t_y]^T$ je translacija za vektor $[-t_x \ -t_y]^T$

Rotacija – transponat kao inverz

- Rotacija preslikava vektore standardne baze e_1 i e_2 u vektore e_1' i e_2' ortonormirane baze

$$R^T \cdot R = \begin{bmatrix} -e_1'- \\ -e_2'- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | & | \\ e_1' & e_2' \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {e_1'}^T e_1' & {e_1'}^T e_2' \\ {e_2'}^T e_1' & {e_2'}^T e_2' \end{bmatrix}$$

- Na dijagonali se dobija skalarni proizvod vektora sa samim sobom što je kvadrat norme vektora, tj. vrednost 1, a van dijagonale skalarni proizvod dva ortogonalna vektora, tj. vrednost 0
- Dakle, važi: $R^T \cdot R = E$, tj. $R^{-1} = R^T$

Matrice kod kojih je transponat jednak inverzu

- Da li svaka matrica za koju važi $R^T R = E$ opisuje matricu rotacije?

Matrice kod kojih je transponat jednak inverzu

- Da li svaka matrica za koju važi $R^T R = E$ opisuje matricu rotacije?
- Razmotrimo matricu

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice kod kojih je transponat jednak inverzu

- Da li svaka matrica za koju važi $R^T R = E$ opisuje matricu rotacije?
- Razmotrimo matricu
$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Nije rotacija jer ne čuva orijenaticiju
- U pitanju je refleksija u odnosu na y osu
- Transformacije koje čuvaju rastojanja i koordinatni početak su ortogonalne transformacije
  - rotacija – ako čuva orijentaciju
  - refleksija – ako ne čuva orijenaciju

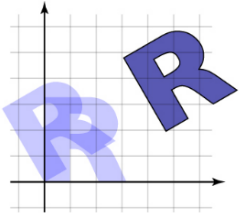
Kompozicija transformacija

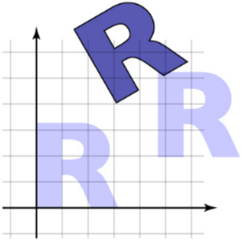
- Matrice složenijih transformacija formiramo izračunavanjem kompozicije matrica osnovnih transformacija
- Primer: transformaciji kojom se tačka skalira oko koordinatnog početka sa faktorima s_x i s_y, nakon toga rotira oko koordinatnog početka za ugao φ, a zatim translira za vektor $[t_x \ t_y]$ odgovara matrica transformacije:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kompozicija transformacija

- Važne napomene:
  - matrice se primenjuju zdesna ulevo
  - bitan je poredak matrica jer množenje matrica u opštem slučaju nije komutativno
- Primer: dobija se različit rezultat ako prvo vršimo rotaciju oko koordinatnog početka, pa translaciju u odnosu na to ako prvo vršimo translaciju, pa rotaciju oko koordinatnog početka





Kompozicija transformacija

- Kompozicija dve transformacije istog tipa je transformacija istog tipa
- Kompozicija dve translacije je translacija

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t'_x \\ 0 & 1 & t'_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & t''_x \\ 0 & 1 & t''_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t'_x + t''_x \\ 0 & 1 & t'_y + t''_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Kompozicija dva skaliranja u odnosu na koordinatni početak je skaliranje u odnosu na koordinatni početak

$$\begin{bmatrix} s'_x & 0 & 0 \\ 0 & s'_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s''_x & 0 & 0 \\ 0 & s''_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s'_x \cdot s''_x & 0 & 0 \\ 0 & s'_y \cdot s''_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kompozicija transformacija

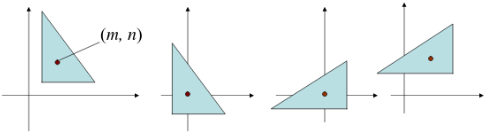
- Kompozicija dve rotacije oko koordinatnog početka je rotacija oko koordinatnog početka

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) & 0 \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Kompozicija dva smicanja u pravcu iste koordinatne ose je smicanje u pravcu iste koordinatne ose

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformacije koje nisu u odnosu na koordinatni početak



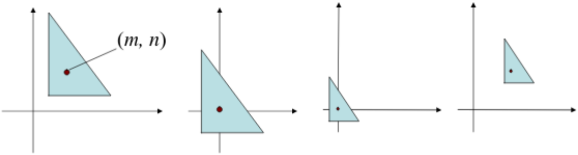
- Rotacija oko tačke $P(m, n)$ (koja nije koordinatni početak) za ugao φ može se izvesti na sledeći način:
  - transliraj tačku P u koordinatni početak
  - izvrši rotaciju oko koordinatnog početka za ugao φ
  - transliraj koordinatni početak u tačku P

$$T_{m,n} \cdot R_{\varphi} \cdot T_{-m,-n} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & m(1-\cos\varphi) + n\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & n(1-\cos\varphi) - m\sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformacije koje nisu u odnosu na koordinatni početak



- Analogno bi se razmatralo skaliranje u odnosu na tačku koja nije koordinatni početak (npr. hoćemo da se pri skaliranju ne promeni centar objekta)

Inverz kompozicije transformacija

- Inverz kompozicije transformacija je kompozicija inverza pojedinačnih transformacija u obrnutom redosledu:

$$(M_1 M_2 \cdot \ldots \cdot M_n)^{-1} = M_n^{-1} \cdot \ldots \cdot M_2^{-1} M_1^{-1}$$

Izometrijske transformacije

- Izometrijska transformacija je geometrijska transformacija koja čuva rastojanje između tačaka
- Matrica je ortogonalna ako vektori koji čine njene kolone predstavljaju ortonormiranu bazu:
  - intenzitet svake kolone jednak je 1
  - skalarni proizvod svake dve kolone jednak je 0
- Analogno važi i za vrste ortogonalne matrice
- Izometrijskoj transformaciji odgovara matrica oblika:

$$\begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

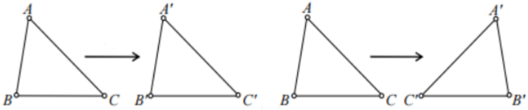
  gde je njena gornja leva 2×2 podmatrica ortogonalna, tj. važi:
  $a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1,\ ab + cd = 0$
- I obratno, ovakvim matricama odgovaraju izometrijske transformacije

Izometrijske transformacije – svojstva

- Izometrijske transformacije čuvaju uglove i dužine
- Nazivaju se i transformacije čvrstih tela (*rigid-body*)
- U izometrijske transformacije spadaju translacija, rotacija, simetrije (centralna, osna)
- Kompozicija izometrijskih transformacija je izometrijska transformacija
- Transformacija inverzna izometrijskoj transformaciji je izometrijska transformacija

Direktne i indirektne izometrijske transformacije

- Izometrijska transformacija ravni je direktna ako čuva orijentaciju ravni, tj. svaki trougao te ravni preslikava u trougao iste orijentacije
- Izometrijska transformacija ravni je indirektna ako svaki trougao te ravni preslikava u trougao suprotne orijentacije



- Za utvrđivanje da li je izometrijska transformacija direktna ili indirektna dovoljno je izvršiti proveru za jedan trougao
- Orijentacija trougla se utvrđuje računanjem vektorskog proizvoda
- Rotacija i translacija spadaju u direktne izometrijske transformacije, a npr. osna refleksija u indirektne

Afine transformacije

- Afine transformacije su transformacije koje čuvaju kolinearnost, odnose rastojanja između kolinearnih tačaka i paralelnost
- Afine transformacije ne čuvaju nužno uglove i dužine
- Primeri afinih transformacija: translacija, rotacija, skaliranje, smicanje
- Translacija i rotacija su i izometrijske transformacije, dok skaliranje i smicanje nisu
- Proizvoljni niz rotacija/translacija/skaliranja/smicanja je afina transformacija

Predstavljanje afine transformacije

- S obzirom na to da se matrica afinih transformacija može zapisati kao:

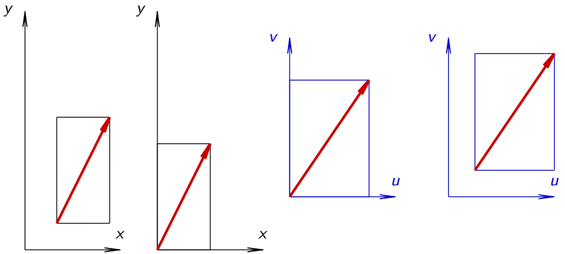
$$\begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^* & t^* \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

važi da se svaka afina transformacija u ravni može predstaviti kao kompozicija jedne linearne transformacije i jedne translacije:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T^* \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t^*$$

Problem preslikavanja slike u prozor

- Jedan od standardnih zadataka u računarskoj grafici je preslikati figuru iz jednog koordinatnog sistema u drugi
- Primer: preslikati sliku iz nekog koordinatnog sistema u prozor ekrana
- Preslikavamo sadržaj pravougaonika sa levim donjim temenom (x_{min}, y_{min}) i gornjim desnim temenom (x_{max}, y_{max}) u koordinatnom sistemu (x, y) u pravougaonik sa levim donjim temenom (u_{min}, v_{min}) i gornjim desnim temenom (u_{max}, v_{max}) u koordinatnom sistemu (u, v)



translacija T_x skaliranje S_{xu} translacija T_u

Rešenje problema preslikavanja slike u prozor

- Primenjujemo translaciju koja tačku (x_{min}, y_{min}) preslikava u tačku $(0, 0)$:

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_{min} \\ 0 & 1 & -y_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Primenjujemo skaliranje u odnosu na $(0, 0)$ kojim se veličina prvog pravougaonika svodi na veličinu drugog pravougaonika:

$$S_{xu} = \begin{bmatrix} \frac{u_{max}-u_{min}}{x_{max}-x_{min}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{max}-v_{min}}{y_{max}-y_{min}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Primenjujemo translaciju koja tačku $(0, 0)$ preslikava u tačku (u_{min}, v_{min}):

$$T_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{min} \\ 0 & 1 & v_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $M_{xu} = T_u \cdot S_{xu} \cdot T_x$