

Zadaci iz Geometrije 4

Srđan Vukmirović, Vladica Andrejić, Tijana Šukilović

6. mart 2013

Homogene koordinate

1. U euklidskoj ravni date su prave $p: 2x - y = 0$, $q: -2x + y + 3 = 0$, $r: x + y - 1 = 0$. Ako je projektivno preslikavanje f zadato matricom:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

odrediti sliku trougla $\triangle ABC$, gde je $\{A\} = p \cap q$, $\{B\} = p \cap r$, $\{C\} = q \cap r$. Nacrtati sliku.

2. Pokazati da je krug projektivno ekvivalentan hiperboli/paraboli.
3. Kriva II reda data je jednačinom $-4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 - 14x_2x_3 + 2x_3^2 = 0$. Odrediti da li je u pitanju elipsa, hiperbola ili parabola.

1 Dezagova teorema

1. U proizvoljan četvorougao $ABCD$ upisan je trapez čije su osnove paralelne jednoj dijagonali četvorougla. Dokazati da se kraci trapeza seku na drugoj dijagonali četvorougla.
2. Dokazati:
 - a) $\mathcal{H}(A, B; C, D) \implies \mathcal{H}(B, A; C, D)$
 - b) $\mathcal{H}(A, B; C, D) \implies \mathcal{H}(C, D; A, B)$
3. Date su prave a i b koje se seku van crteža i tačka P koja im ne pripada. Konstruisati pravu p koja sadrži tačku P i presečnu tačku pravih a i b .

2 Projektivna preslikavanja

2.1 Jednodimenzione mnogostrukosti

1. Neka su A, B, C tri razne tačke prave p i A', B', C' tri razne tačke prave $p' \neq p$. Odrediti sliku tačke D pri projektivnom preslikavanju $f: p \wedge p'$ koje tačke A, B, C slika redom na tačke A', B', C' . Šta se dešava u slučaju $p = p'$?

2. Projektivno preslikavanje $f : p \wedge p'$ jednodimenzionih mnogostrukosti je perspektivno ako i samo ako je zajednički element tih mnogostrukosti fiksiran.
3. Odrediti hiperboličko preslikavanje $f : p \wedge p$ koje fiksira tačke M i N , a tačku A slika u tačku A' .
4. Odrediti paraboličko preslikavanje $f : p \wedge p$ koje fiksira tačku M , a tačku A slika u tačku A' . Pokazati da važi $\mathcal{H}(M, f(A); A, f(f(A)))$.
5. Pokazati da je preslikavanje $f : p \wedge p$ koje tačke A, B, C slika redom na tačke B, C, A eliptičko.
6. (*Papasova teorema*) Ako su tačke A, B, C kolinearne i tačke A', B', C' kolinearne, pokazati da su i tačke $\{X\} = BC' \cap B'C$, $\{Y\} = AC' \cap A'C$, $\{Z\} = AB' \cap A'B$ takođe kolinearne.

2.2 Dvodimenzione mnogostrukosti

1. Dokazati da su osa s , protivosa u i horizont v' međusobno paralelne prave.
2. Dokazati da je perspektivno kolinearno preslikavanje određeno sa:
 - a) centrom S , osom s i slikom A' tačke A
 - b) centrom S , osom s i slikom a' prave a
 - c) centrom S , osom s i protivosom u
 - d) centrom S , osom s i horizontom v'
3. Afina homologija je zadata osom s i zrakom afinosti p . Odrediti sliku kvadrata u toj homologiji.
4. Dati su centar S , osa s i protivosa u homologije. Ako kvadrat seče protivosu, konstruisati njegovu sliku.
5. Afina homologija je zadata osom s i parom odgovarajućih tačaka S i S^c . Odrediti sliku kruga sa centrom S u toj homologiji.
6. Dati su centar S , osa s i horizont v' homologije. Konstruisati sliku datog kruga $k(V, r)$.
7. Data je tačka S , prava s i četvorougao $ABCD$. Odrediti homologiju čiji je centar tačka S , osa prava s i koje prevodi $ABCD$ u četvorougao čije su dijagonale ortogonalne.
8. U ravni je četvorougao $ABCD$ koji nije trapez. Odrediti sve homologije koja imaju A i B za fiksne tačke, dok četvorougao $ABCD$ prevode u paralelogram.
9. Data je prava s i četvorougao $ABCD$. Odrediti afinu homologiju koja ima osu s i koja dati četvorougao preslikava u kvadrat.
10. U ravni je data prava s i tačke A, B, C i D' . Afinom homologijom sa osom s trougao ABC se slika na jednakokraki trougao $A'B'C'$ sa osnovicom $B'C'$, tako da D' leži na pravoj $B'C'$. Konstruisati $\triangle A'B'C'$.

3 Krive II reda

1. Date su tačke A, B, C, D, E nedegenerisane krive II reda Γ i prava $p \ni A$. Konstruisati drugu presečnu tačku krive Γ i prave p .
2. Date su tačke A, B, C, D i tangenta a u tački A nedegenerisane krive II reda Γ . Konstruisati tangentu c u tački C na Γ .
3. Date su tangente a, b, c i dodirne tačke $A \in a, B \in b$ krive II reda Γ . Za datu tačku $R \in c$ odrediti $AR \cap \Gamma$.
4. Date su tačke A, B, C i pravac o' ose parabole, kao i prava $p \ni A$. Konstruisati drugu presečnu tačku prave p i parabole.
5. Date su tačke A i B i prave a, b, p . Konstruisati centar hiperbole ako je a tangenta u A , b tangenta u B i p asimptota hiperbole.
6. Date su asimptota q hiperbole, pravac asimptote p , tangenta t , njena dodirna tačka T i tačka X na asimptoti q . Odrediti drugu tangentu hiperbole kroz tačku X .
7. Dokazati da središta tetiva elipse i hiperbole koje su paralelne jednom dijametru te krive pripadaju njemu konjugovanom dijametru. Šta se dešava u slučaju parabole?
8. Konstruisati glavne ose elipse koja je zadata parom konjugovanih dijametara AB i CD .

4 Metoda odstojanja normalnog projektovanja

4.1 Osnovni zadaci

1. Data je prava p projekcijama svojih tačaka $M(M', OM_0)$ i $N(N', ON_0)$. Konstruisati: a) trag prave p ; b) pravu veličinu duži MN ; c) nagibni ugao prave p .
2. Date su tačke $A(A', OA_0)$, $B(B', OB_0)$ i $C(C', OC_0)$. Konstruisati a) trag a ravni $\alpha = (ABC)$ b) težište $T = (T', OT_0)$ trougla ABC ; c) centar $S = (S', OS_0)$ opisanog kruga trougla ABC .
3. Data je ravan $\alpha(a, A', OA_0)$, tačka S koja joj pripada i duž d . Nacrtati projekciju kruga k koji pripada ravni α , ima centar S , a poluprečnik mu je podudaran duži d .
4. Odrediti projekciju kruga čiji je centar data tačka $S(S', OS_0)$, a koji dodiruje datu pravu $p(P, Q', OQ_0)$.
5. Odrediti presek ravni $\alpha(a, A', OA_0)$ i $\beta(b, B', OB_0)$ ako važi:
i) $a \cap b = \{P\}$; ii) $a \parallel b$.
6. Odrediti prodor prave $p(P, A', OA_0)$ kroz ravan $\tau(t, M', OM_0)$.
7. Date su ravan $\tau(t, K', OK_0)$ i tačka $M(M', OM_0)$ koja joj ne pripada. a) Konstruisati normalu n iz tačke M na ravan τ . b) Odrediti tačku N simetričnu tački M u odnosu na τ .
8. Date su prava $n(N, S', OS_0)$ i tačka $K(K', OK_0)$. a) Konstruisati ravan τ koja sadrži tačku K i normalna je na pravu n . b) Odrediti udaljenost tačke K od prave n .
9. Data je ravan $\alpha(a, A', OA_0)$ i tačka $M(M', OM_0)$ koja joj ne pripada. Konstruisati trag ravni β koja sadrži tačku M i paralelna je sa α .

4.2 Složeniji zadaci

1. Metodod odstojanja data je ravan $\tau(t, S', OS_0)$. Konstruisati projekciju pravilne četvorostrane piramide $ABCDV$, čija osnova $ABCD$ ima središte S i pripada ravni τ . Visina piramide je podudarna datoj duži h .
2. Metodod odstojanja data je ravan $\tau(t, L', OL_0)$ i tačka $E(E', OE_0)$ koja joj ne pripada. Konstruisati projekciju pravilnog oktaedra $ABCDEF$, čije je teme data tačka E , dijagonalni presek $ABCD$ pripada ravni τ , a ivica AB gradi ugao od $\frac{\pi}{6}$ tragom t ravni τ .
3. Metodod odstojanja data je prava $s(S, R', OR_0)$ i tačka $A(A', OA_0)$ koja joj ne pripada. Konstruisati projekciju valjka kome je osa prava s , tačka A pripada kružnici jedne osnove, a visina valjka je jednaka prečniku osnove. Odrediti zatim presek valjka i ravni β koja je paralelna ravni slike, a visinu valjka deli u odnosu 1 : 3.
4. Metodod odstojanja data je prava $p(P, Q', OQ_0)$ i tačka $C(C', OC_0)$. Konstruisati projekciju tetraedra $ABCD$ čije teme C je data tačka, a ivica AB pripada datoj pravoj p . Konstruisati zatim prodor prave a i tetraedra, ako prava a sadrži središte tetraedra i paralelna je ivici BD .
5. Metodod odstojanja data je ravan $\tau(t, M(M', OM_0))$ i tačka $A_1(A'_1, OA_{10})$. Konstruisati projekciju kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ čije je teme data tačka A_1 , pljosan $ABCD$ pripada ravni τ , a ivica AB gradi ugao od $\frac{\pi}{3}$ sa tragom t ravni τ .
6. Metodod odstojanja data je ravan $\tau(t, M(M', OM_0))$ i tačka $V(V', OV_0) \notin \tau$ Odrediti projekciju kupe kojoj je vrh data tačka V , osnova pripada ravni τ , a visina kupe je duplo veća od prečnika osnove.

7. Date su mimoilazne prave $p(P, A', OA_0)$ i $q(Q', B, OB_0)$. Odrediti zajedničku normalu n i rastojanje između pravih p i q .
8. Data je tačka $A(A', OA_0)$ i prava $p(P, N', ON_0)$ koja ne sadrži tačku A . Konstruisati projekciju pravilnog oktadera $ABCDEF$ ako je teme A data tačka, a ivica BC pripada pravoj p .
9. Data je ravan $\tau(t, M', OM_0)$ i tačka $S(S', OS_0)$ van ravni τ . Predstaviti normalnu projekciju pravog valjka ako je tačka S središte osnove, τ tangentna ravan valjka i izvodnice valjka grade ugao od $\frac{\pi}{6}$ sa tragom t ravni τ . Visina valjka je jednaka $3r$, gde je r poluprečnik osnove.
10. Metodom odstojanja normalnog projektovanja data je tačka $A(A', OA_0)$ i ravan $\tau(t, M', OM_0)$. Konstruisati projekciju kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ako je teme A data tačka, dijagonalni presek $BDD_1 B_1$ pripada ravni τ , a prava BD sadrži M .
11. Data je tačka $A(A', OA_0)$ i ravan $\tau(t, M', OM_0)$. Konstruisati projekciju tetraedra $ABCD$ kome je teme A data tačka, pljosan BCD pripada ravni τ , a ivica BC zaklapa ugao od $\frac{\pi}{6}$ sa tragom t ravni τ .
12. Data je tačka $S(S', OS_0)$ i prava $p(P, A', OA_0)$. Konstruisati projekciju prave kupe kojoj je središte osnove tačka S , jedna izvodnica kupe pripada pravoj p , a ugao između visine kupe i izvodnice jednak $\frac{\pi}{6}$. Konstruisati zatim prodorne tačke prave r koja sadrži središte visine kupe i tačku P i kupe.

5 Metoda tragova i nedogleda centralnog projektovanja

5.1 Osnovni zadaci

1. Data je prava $p(P, P_\infty^c)$ i tačka $N(N^c)$ na nosiocu $q(Q, Q_\infty^c)$. Konstruisati trag i nedogled ravni koja sadrži tačku N i pravu p .
2. Data je prava $p(P, P_\infty^c)$ i tačka $N(N^c)$ na nosiocu $\tau(t, t_\infty^c)$. Konstruisati trag i nedogled ravni koja sadrži tačku N i pravu p . (Uputstvo: odrediti presek K prave p i ravni τ . Ravan koja sadrži prave p i NK je tražena ravan.)
3. Date su tačka $M(M^c)$ na nosiocu $p(P, P_\infty^c)$ i tačka $N(N^c)$ na nosiocu $q(Q, Q_\infty^c)$. Konstruisati trag i nedogled prave $l = MN$.
4. Date su ravni $\alpha(a, a_\infty^c)$ i $\beta(b, b_\infty^c)$. Konstruisati trag i nedogled prave $p = \alpha \cap \beta$ ako važi:
i) $a \cap b = \{P\}$ ii) $a \parallel b$.
5. Odrediti projekciju prodora prave $p(P, P_\infty^c)$ kroz ravan $\alpha(a, a_\infty^c)$.
6. Data je tačka $A(A^c)$ na nosiocu $p(P, P_\infty^c)$ i ravan $\tau(t, t_\infty^c)$. Konstruisati trag i nedogled prave n koja sadrži A i upravna je na ravan τ .
7. Data je tačka $A(A^c)$ na nosiocu $p(P, P_\infty^c)$ i prava $n(N, N_\infty^c)$. Konstruisati trag i nedoglednicu ravni τ koja sadrži A i upravna je na pravu n .
8. Konstruisati trag i nedoglednicu ravni α koja sadrži datu pravu $a(A, A_\infty^c)$ i normalna je na datu ravan $\tau(t, t_\infty^c)$.
9. Data je tačka $S(S^c)$ u ravni $\alpha(a, a_\infty^c)$. Odrediti centralnu projekciju kruga koji pripada ravni α , centar mu je data tačka S , a poluprečnik kruga je podudaran datoj duži d .
10. Date su tačke $M(M^c)$ i $N(N^c)$ na pravoj $p(P, P_\infty^c)$. Odrediti rastojanje tačaka M i N .

5.2 Složeniji zadaci

1. Metodom tragova i nedogleda data je ravan $\tau(t, t_\infty^c)$ i tačka $S(S^c)$ koja joj pripada. Konstruisati projekciju pravilne četvorostrane piramide $ABCDV$, čija osnova $ABCD$ ima središte S i pripada ravni τ . Visina piramide je podudarna datoj duži h .
2. Metodom tragova i nedogleda data je ravan $\tau(t, t_\infty^c)$ i tačka $E(E^c)$ na nosiocu $p(P, P_\infty^c)$ koja joj ne pripada. Konstruisati projekciju pravilnog oktaedra $ABCDEF$, čije je teme data tačka E , dijagonalni presek $ABCD$ pripada ravni τ , a ivica AB gradi ugao od $\frac{\pi}{6}$ tragom t ravni τ .
3. Metodom tragova i nedogleda data je ravan $\tau(t, t_\infty^c)$ i u njoj tačka $S(S^c)$. Konstruisati projekciju valjka kome je osnova krug sa centrom S u ravni τ , a visina valjka je proizvoljna.
4. Metodom tragova i nedogleda data je prava $p(P, P_\infty^c)$ i tačka $C(C^c)$ na nosiocu $q(Q, Q_\infty^c)$. Konstruisati projekciju tetraedra $ABCD$ čije teme C je data tačka, a ivica AB pripada datoj pravoj p .
5. Metodom tragova i nedogleda data je ravan $\tau(t, t_\infty^c)$ i tačka $A_1(A_1^c)$ na nosiocu $q(Q, Q_\infty^c)$. Konstruisati projekciju kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ čije je teme data tačka A_1 , pljosan $ABCD$ pripada ravni τ , a ivica AB gradi ugao od $\frac{\pi}{3}$ sa tragom t ravni τ .
(rešenje: .dwf)

6. Metodom tragova i nedogleda data je ravan $\tau(t, t_\infty^c)$ i tačka $V(V^c) \notin \tau$ na nosiocu $q(Q, Q_\infty^c)$. Odrediti projekciju kupe kojoj je vrh data tačka V , osnova pripada ravni τ , a visina kupe je duplo veća od prečnika osnove.
(rešenje: .dwf)
7. Date su mimoilazne prave $p(P, P_\infty^c)$ i $q(Q, Q_\infty^c)$. Odrediti zajedničku normalu n i rastojanje između pravih p i q .
8. Data je tačka $A(A^c)$ na nosiocu $q(Q, Q_\infty^c)$ i prava $p(P, P_\infty^c)$, $A \notin p$. Konstruisati projekciju pravilnog oktadera $ABCDEF$ ako je teme A data tačka, a BC pripada pravoj p , ako
 - a) ABC je pljosan oktaedra b) $ABCD$ je dijagonalni presek oktaedra.
9. Metodom tragova i nedogleda data je prava $s(S, S_\infty^c)$ i tačka $A(A^c)$ na nosiocu $p(P, P_\infty^c)$. Konstruisati projekciju valjka kome je osa prava s , tačka A pripada kružnici jedne osnove, a visina valjka je jednaka prečniku osnove.
10. Metodom tragova i nedogleda normalnog projektovanja data je tačka $A(A^c)$ na nosiocu $q(Q, Q_\infty^c)$ i ravan $\tau(t, t_\infty^c)$. Konstruisati projekciju kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ako je teme A data tačka, dijagonalni presek $BDD_1 B_1$ pripada ravni τ .
11. Data je tačka $A(A^c)$ na nosiocu $q(Q, Q_\infty^c)$ i ravan $\tau(t, t_\infty^c)$. Konstruisati projekciju tetraedra $ABCD$ kome je teme A data tačka, pljosan BCD pripada ravni τ , a ivica BC zaklapa ugao od $\frac{\pi}{6}$ sa tragom t ravni τ .
12. Data je tačka $S(S^c)$ na nosiocu $q(Q, Q_\infty^c)$ i prava $p(P, P_\infty^c)$. Konstruisati projekciju prave kupe kojoj je središte osnove tačka S , jedna izvodnica kupe pripada pravoj p , a ugao između visine kupe i izvodnice jednak $\frac{\pi}{6}$. Predstaviti zatim prodorne tačke prave r koja sadrži središte visine kupe i tačku P i kupe.