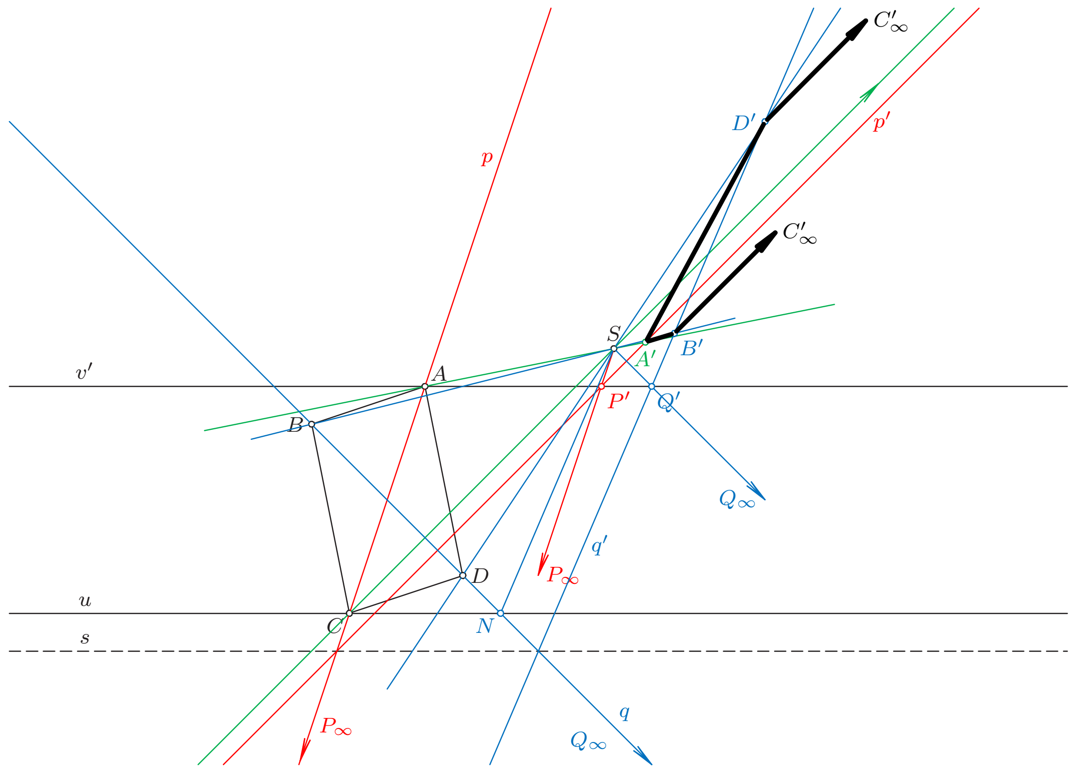
ГЕОМЕТРИЈА 4 – колоквијум, април 2013. године (1. група)

1. У равни су дате тачка S и праве u, v'. Одредити слику правоугаоника $ABCD$ при хомологији са центром S, противосом u и хоризонтом v' ако важи $A \in v', C \in u, BD \nparallel u$.

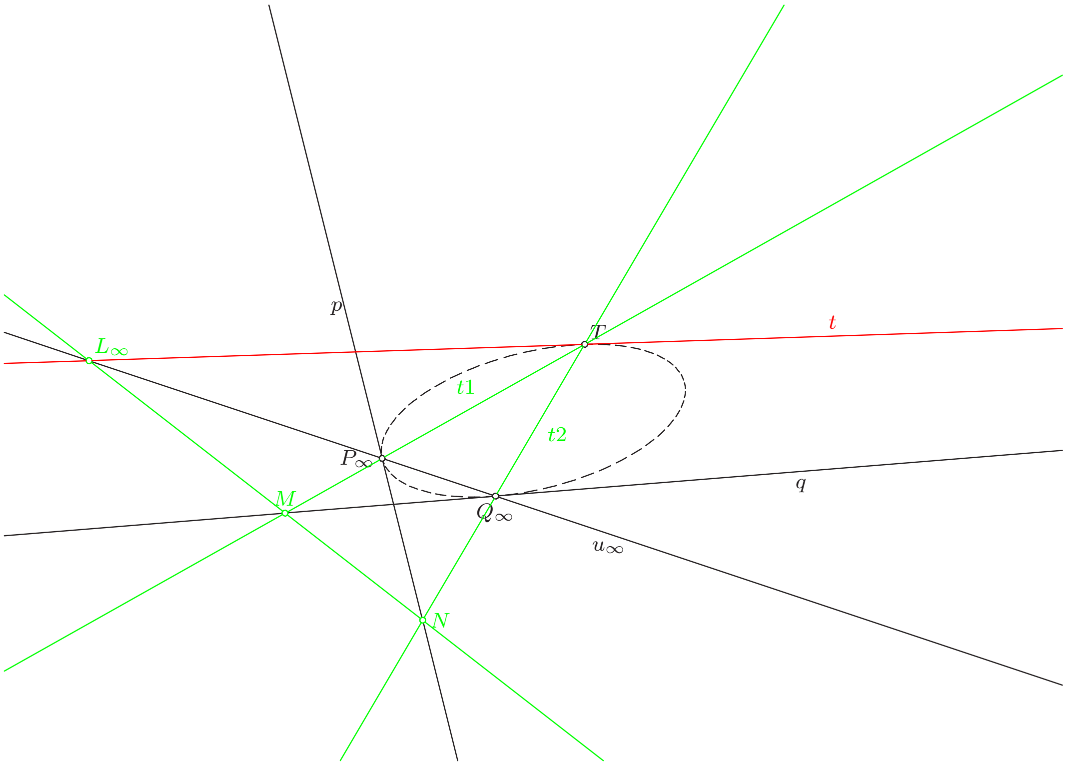
решење: Означимо са p праву AC. Нека је P' тачка на хоризонту таква да је $SP' \parallel p$. Слика p' праве p је права која садрзи тачку P' и паралелна је са SC. Тачка C припада противоси u, тако да је њена слика C'_∞ бесконачно далека тачка праве SC. Тачка A се слика у тачку A' : $SA \cap p' = \{A'\}$.
Примедба: Овде можемо конструисати осу s хомологије: $s \parallel u,\ p \cap p' \in s$.
Ако са q означимо праву BD, а са N њен пресек са противосом u, њена слика је права q' за коју важи $q' \parallel SN, Q' \in q'$, где је Q' слика бесконачно далеке тачке Q_∞ праве Q : $Q' \in v', SQ' \parallel q$. Тачке B' и D' добијамо у пресеку праве q' са правама SB и SD респективно.
Слика правоугаоника је изломљена линија $C'_\infty D'A'B'C'_\infty$, где је $C'_\infty D' \parallel C'_\infty B'$ (види слику).



2. Ако су праве p и q асимптоте хиперболе Γ, а T њена произвољна тачка, конструисати (анализа, конструкција) тангенту на хиперболу у тачки T.
решење:
АНАЛИЗА: Означимо са t тражену тангенту на хиперболу у тачки T. Праве p и q су тангенте на хиперболу Γ редом у тачкама P_∞ и Q_∞. Применимо Паскалову теорему на дегенерисани шестотеменик $P_\infty T Q_\infty Q_\infty P_\infty T$:

$$
\begin{array}{ccccccccl}
P_\infty P_\infty & \cap & TQ_\infty & = & p & \cap & t_2 & = & \{N\}, \quad T \in t_2 \parallel q \\
P_\infty T & \cap & Q_\infty Q_\infty & = & t_1 & \cap & q & = & \{M\}, \quad T \in t_1 \parallel p \\
TT & \cap & Q_\infty P_\infty & = & t & \cap & u_\infty & = & \{L_\infty\}
\end{array}
$$

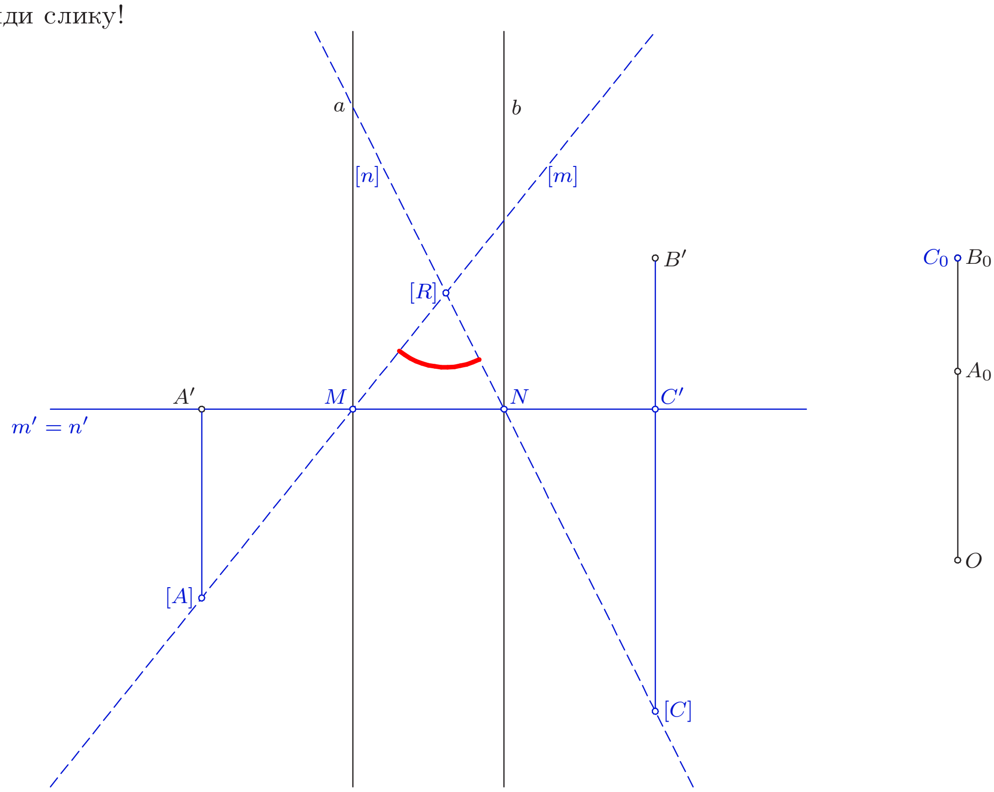
Тачке N, M, L_∞ су колинеарне, тј. $MN \parallel t$ (види слику.)



КОНСТРУКЦИЈА:

1) $t_1: \ T \in t_1 \parallel p$
2) $t_2: \ T \in t_2 \parallel q$
3) $M: \ t_1 \cap q = \{M\}$
4) $N: \ t_2 \cap p = \{N\}$
5) $t: \ T \in t \parallel MN$

3. Методом одстојања нормалног пројектовања дате су равни $\alpha(a, A', OA_0)$ и $\beta(b, B', OB_0)$ које се секу. Одредити угао између равни ако је $a \parallel b$.
решење: Види слику!



ГЕОМЕТРИЈА 4 – колоквијум, април 2013. године (2. група)

1. У равни су дате права s и тачке A, B, C. Одредити афину хомологију са осом s која $\triangle ABC$ слика у једнакостранични троугао.
решење: Нека је E средиште странице AB. Афина хомологија чува средишта дужи, па је E' средиште странице $A'B'$ траженог једнакостраничног троугла $A'B'C'$, али је уједно и подножје висине из темена C'. Нека је $\{X\} = AB \cap s$ и $\{Y\} = CE \cap s$. Имамо:

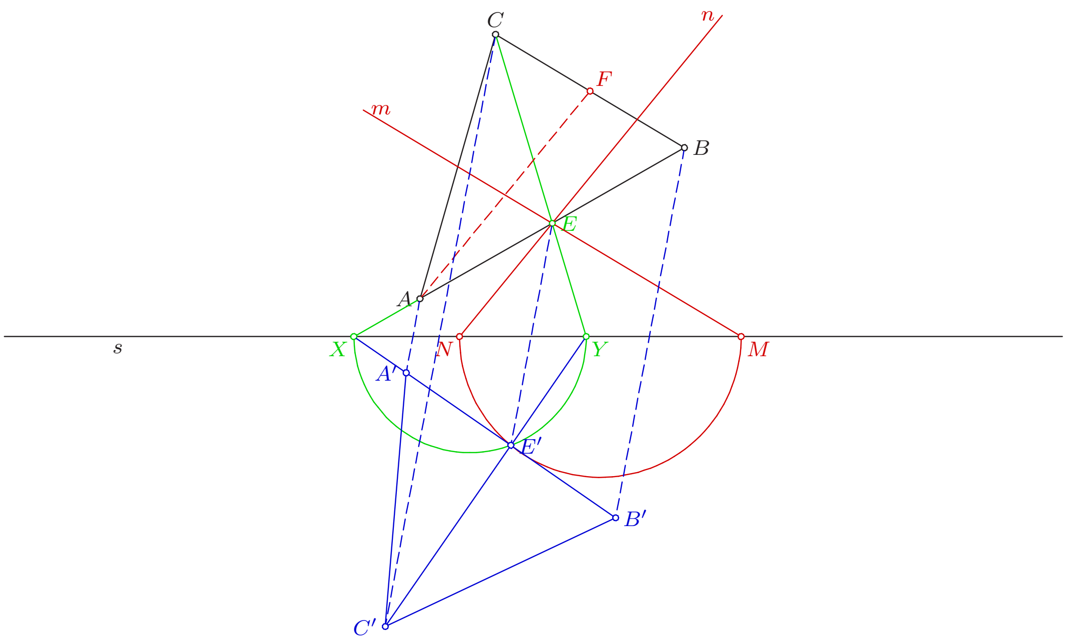
$$\left.\begin{array}{ccc} B, E, A, X & \longrightarrow & B', E', A', X \\ C, E, Y & \longrightarrow & C', E', Y \end{array}\right\} \Longrightarrow XE' \perp YE' \Longrightarrow E' \in k(XY)$$

Нека је F средиште странице BC и нека су праве $m: \ E' \in m \parallel BC, \ n: \ E' \in n \parallel AF$. Означимо тачке $\{M\} = m \cap s$ и $\{N\} = n \cap s$. Тежишна линија AF се слика у висину $A'F'$ траженог троугла, а афина хомологија чува паралеллност, па имамо:

$$\left.\begin{array}{ccc} m & \longrightarrow & m' \\ n & \longrightarrow & n' \\ m \cap n = E & \longrightarrow & E' = m' \cap n' \end{array}\right\} \Longrightarrow m' \perp n' \Longrightarrow E' \in k(MN)$$

Из претходног следи да је пар одговарајућих тачака EE', где је $\{E'\} = k(XY) \cap k(MN)$, зрак афиности траженог пресликавања. Слику троугла конструишемо на следећи начин:

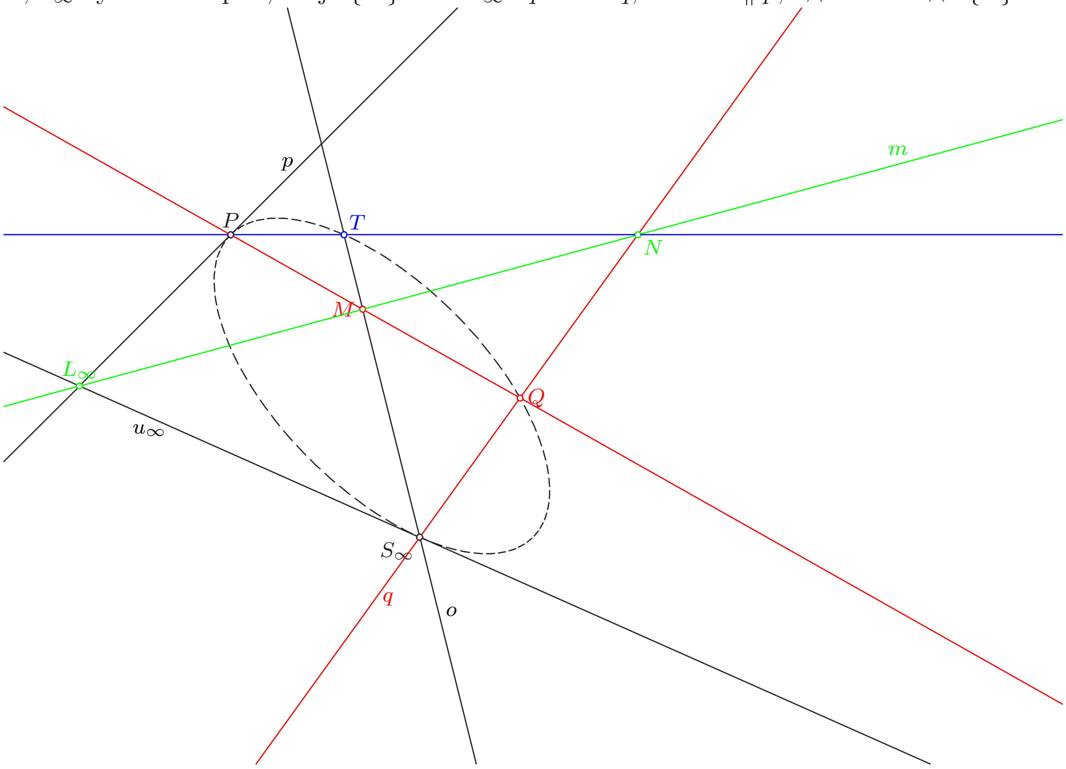
$$\begin{array}{ll} \{A'\} = a \cap XE', & A' \in a \parallel EE' \\ \{B'\} = b \cap XE', & B' \in b \parallel EE' \\ \{C'\} = c \cap YE', & C' \in c \parallel EE' \end{array}$$



2. У равни су дате праве o, p и тачка $P \in p$. Конструисати (анализа, конструкција) теме параболе Γ ако је права o њена оса, а p њена тангента у тачки P.
решење:
АНАЛИЗА: Парабола је крива другог реда коју бесконачно далека права u_∞ тангира у бесконачно далекој тачки S_∞ њене осе. Како је оса параболе o и њена оса симетрије, можемо да одредимо тачку $Q \in \Gamma$ која је симетрична тачки P у односу на праву o.
Означимо са T тражено теме параболе и применимо Паскалову теорему на дегенерисани шестотеменик $PQS_\infty S_\infty TP$:

$$\begin{array}{ccccccccl} PT & \cap & QS_\infty & = & PT & \cap & q & = & \{N\}, \quad Q \in q \parallel o \\ PP & \cap & S_\infty S_\infty & = & p & \cap & u_\infty & = & \{L_\infty\} \\ QP & \cap & S_\infty T & = & QP & \cap & o & = & \{M\} \end{array}$$

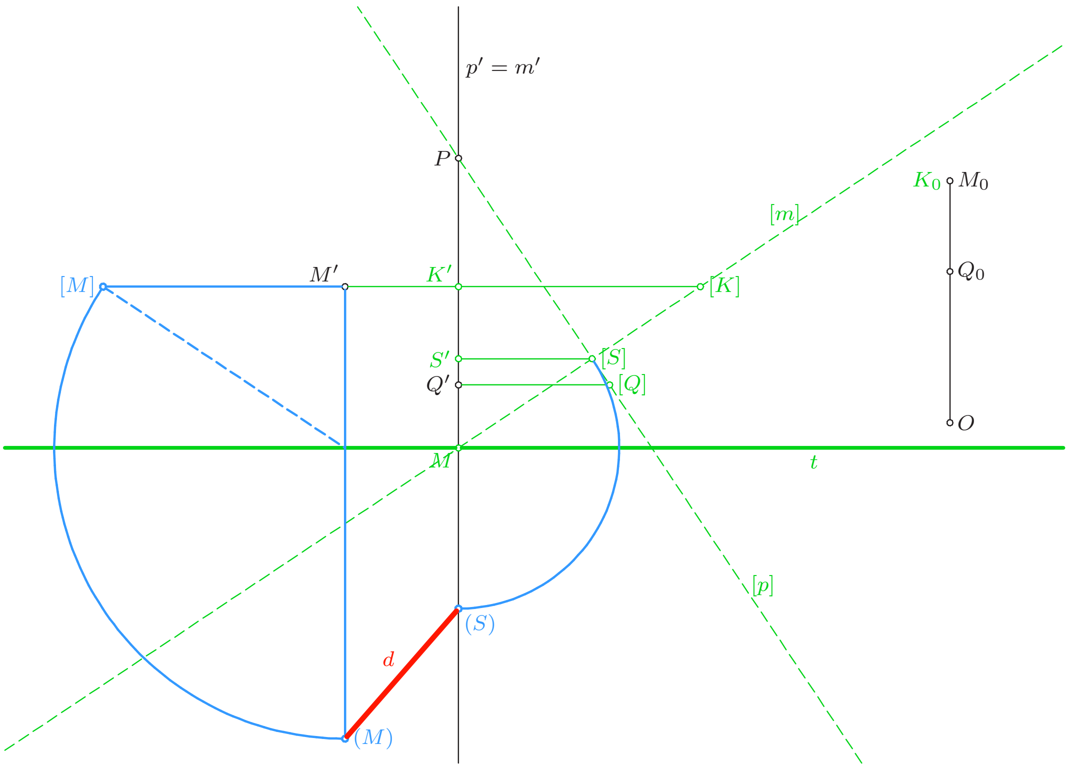
Тачке M, N, L_∞ су колинеарне, па је $\{N\} = ML_\infty \cap q = m \cap q,\ M \in m \parallel p$, одакле следи $\{T\} = o \cap PN$.



КОНСТРУКЦИЈА:

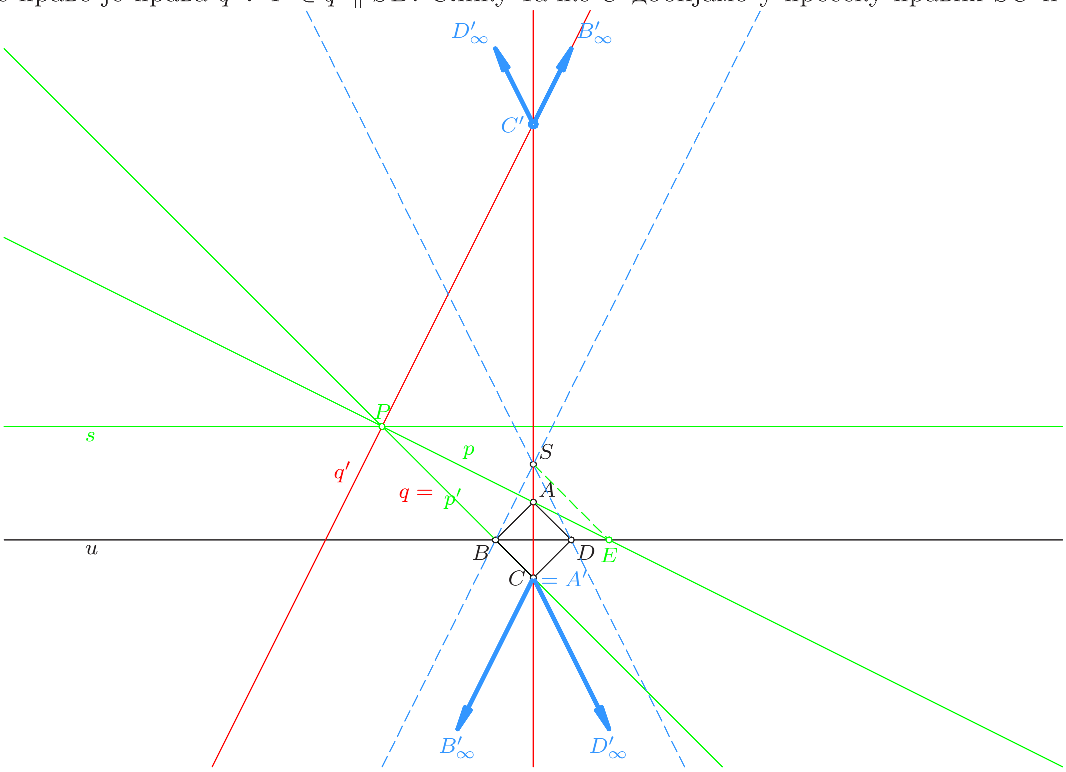
1) $Q: \ Q = \mathcal{S}_o(P)$
2) $q: \ Q \in q \parallel o$
3) $M: \ QP \cap o = \{M\}$
4) $m: \ M \in m \parallel p$
5) $N: \ m \cap q = \{N\}$
6) $T: \ o \cap PN = \{T\}$

3. Методом одстојања нормалног пројектовања дате су права $p(P, Q', OQ_0)$ и тачка $M(M', OM_0)$. Конструисти раван τ која садржи тачку M и нормална је на праву p, а затим одредити удаљеност тачке M од праве p.
решење: Види слику!



ГЕОМЕТРИЈА 4 – колоквијум, април 2013. године (3. група)

1. У равни је дат квадрат $ABCD$ и тачка S таква да је $SA \cong \frac{1}{2}AC$ и $\mathcal{B}(S,A,C)$. Одредити слику квадрата $ABCD$ при хомологији са центром S и противосом BD која тачку A слика у тачку C.
решење: Тачке B и D припадају противоси, па се сликају у бесконачно далеке тачке правих SB и SD респективно.
Нека је $E \in BD$ тачка таква да је $SE \parallel BC$. Означимо са p праву AE. Слика праве p је права p' која садржи тачку C (јер $A \longrightarrow C$) и паралелна је са SE ($E \in u$). Тачка $\{P\} = p \cap p'$ је фиксна, тако да можемо конструисати осу пресликавања $s: \ P \in s \parallel u$.
Из начина на који смо изабрали тачку E следи да су тачке P, B, C колинеане, тј. $P, B, C \in q$. Слика ове праве је права $q': \ P \in q' \parallel SB$. Слику тачке C добијамо у пресеку правих SC и q'.



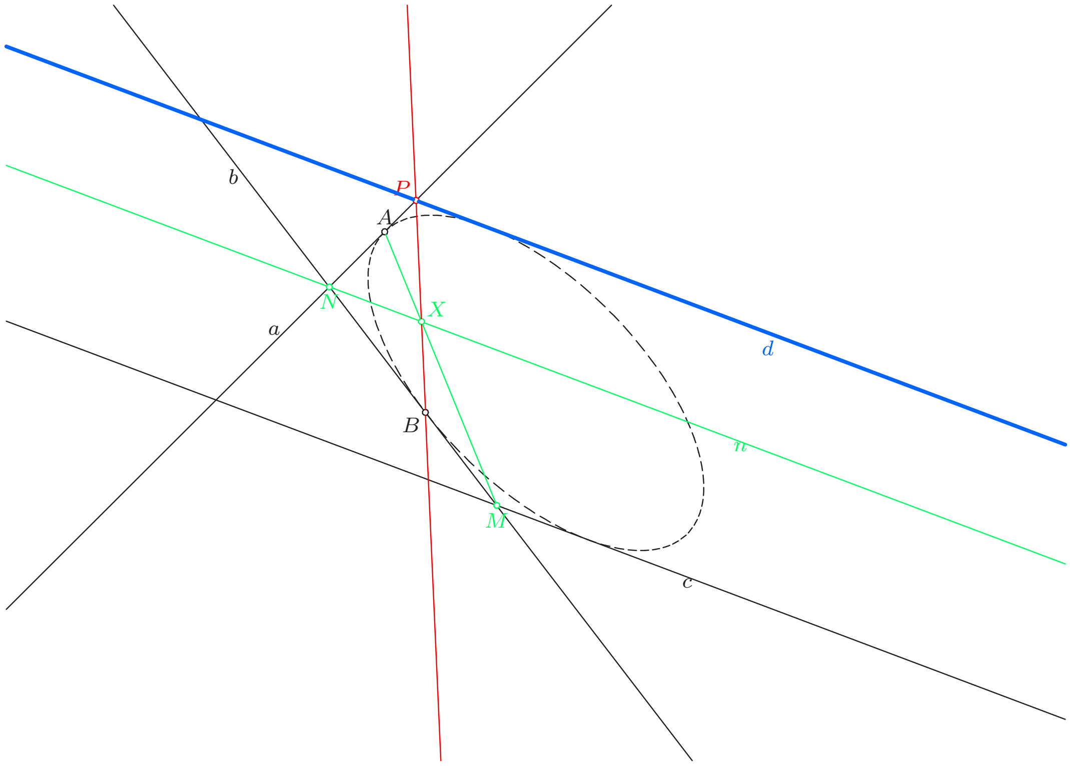
2. Дате су тангенте a, b, c и додирне тачке $A \in a, B \in b$ криве другог реда Γ. Конструисати (анализа, конструкција) тангенту d на криву Γ такву да је $d \parallel c$.
решење:
АНАЛИЗА: Применимо Брианшонову теорему на дегенерисани шестостраник $acbbad$:

$$\left.\begin{array}{rcl}(a\cap a)(b\cap c) &=& AM\\(a\cap d)(b\cap b) &=& PB\\(c\cap d)(b\cap a) &=& L_\infty N\end{array}\right\} \Longrightarrow AM\cap PB\cap L_\infty N = \{X\} \Longrightarrow AM\cap L_\infty N = \{X\}, X\in PB \Longrightarrow \{P\} = BX\cap a$$

Одавде следи да је $d = PL_\infty$, тј. $P \in d \parallel c$.

КОНСТРУКЦИЈА:

1) $M: \ b \cap c = \{M\}$
2) $N: \ b \cap a = \{N\}$
3) $n: \ N \in n \parallel c$
4) $X: \ n \cap AM = \{X\}$
5) $P: \ BX \cap a = \{P\}$
6) $d: \ P \in d \parallel c$



3. Методом одстојања нормалног пројектовања дата је дуж AB : $A(A', OA_0), B(B', OB_0)$. Одредити симетралну раван α дужи AB, а затим конструисати раван β која садржи тачку B и паралелна је равни α.
решење: Види слику!