PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

oktobar 2010. godine

ANALITIČKI PRISTUP

Homogene koordinate i dvorazmera

1. Tačke 0, ∞ i 1 afinog sistema koordinata uzete su redom za bazne tačke $A_1(1:0)$, $A_2(0:1)$ i jedinicu $B(1:1)$ novog homogenog sistema koordinata. Naći vezu izmedju afine koordinate i novih homogenih koordinata.

2. Tačke $A_1(2:1)$, $A_2(3:1)$ i $B(4:1)$ date koordinatama $(x_1:x_2)$ odabrane su redom za bazne tačke i jedinicu novog sistema homogenih koordinata $(x_1':x_2')$. Odrediti vezu izmedju starog i novog sistema koordinata.

3. Date su tačke $A(0:1)$, $B(1:0)$, $C(1:1)$ i $D(3:2)$. Odrediti dvorazmeru $(ABCD)$.

4. Na projektivnoj pravoj date du tačke $A(1:0)$, $B(2:1)$ i $C(4:1)$. Odrediti koordinate tačke X za koju važi $\mathcal{H}(A,X;B,C)$.

5. Na dopunjenoj afinoj pravoj date su tačke $A(\infty)=(1:0)$, $B(b)=(b:1)$ i $C(c)=(c:1)$. Dokazati da je tačka X za koju važi $\mathcal{H}(A,X;B,C)$ središte duži BC.

6. Na afinoj pravoj su uvedene projektivne koordinate. Odrediti afini smisao dvorazmere $(ABCD)$ tačaka $A(x_1)=(x_1:1)$, $B(x_2)=(x_2:1)$, $C(x_3)=(x_3:1)$ i $D(x_4)=D(x_4:1)$.

7. (*Aksioma razdvojenosti parova tačaka*) Dokazati da za različite tačke A,B,C,D projektivne prave važi tačno jedna od relacija $A,B\div C,D$, $A,C\div B,D$, $A,D\div B,C$.

Transformacije projektivne prave

1. Odrediti formule projektivne transformacije koja tačke $A(0:1)$, $B(1:0)$ i $C(1:1)$ prevodi redom u tačke $A'(1:-1)$, $B'(1:1)$ i $C'(1:3)$.

2. Data je transformacije $\lambda x_1'=2x_1-x_2$, $\lambda x_2'=x_1+4x_2$. Naći:
   a) fiksne tačke transformacije
   b) afini zapis preslikavanja
   c) zapis preslikavanja u nekoj novoj bazi u kojoj je fiksna tačka beskonačno daleka.

3. Za preslikavanje $\lambda x_1'=2x_1+3x_2$, $\lambda x_2'=3x_1+2x_2$. Naći:
   a) fiksne tačke
   b) novi projektivni koordinatni sistem u čijim je afinim koordinatama preslikavanje homotetija.

4. Odrediti neophodne i dovoljne uslove da transformacija projektivne prave bude eliptička, parabolička, odnosno hiperbolička.

5. Dokazati da postoji jedinstveno parabolično preslikavanje f kome je data tačka A fiksna, a pri tome je $f(M) = M' \neq A$. Neka je $M'' = f(M')$, dokazati da važi $\mathcal{H}(M'', M; M', A)$.

6. Dokazati da je transformacija projektivne prave koja različite tačke A, B i C prevodi redom u tačke B, C i A eliptička.

7. Dokazati da eliptička i parabolička transformacija ne menjaju orijentaciju.

8. Dokazati da je trasformacija f projektivne prave za koju postoji par tačaka A i A' takav da važi $A' = f(A)$ i $A = f(A')$ involucija.

9. Involucija projektivne prave zadata je parovima odgovarajućih tačaka $A(1:2)$ i $A'(1:0)$, odnosno $B(2:3)$ i $B'(8:1)$. Odrediti tu involuciju, njene invarijantne tačke i ispitati čuva li orijentaciju.

Projektivna ravan. Transformacije projektivne ravni

1. Naći jednačinu prave koja sadrži tačke $A(2:5:2)$ i $B(8:1:-1)$. Dokazati da tačka $C(-4:9:5)$ pripada pravoj AB i odrediti tačku D takvu da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

2. U projektivnoj ravni date su koordinate novih baznih tačaka i jedinice u odnosu na stari projektivni sistem $A_1(4:1:1)$, $A_2(4:4:1)$, $A_3(0:4:1)$ i $B(2:1:1)$. Naći formule transformacije koordinata iz starih u nove.

3. Naći fiksne tačke i fiksne prave preslikavanja $\lambda x_1' = 4x_1 - x_2$, $\lambda x_2' = 6x_1 - 3x_2$, $\lambda x_3' = x_1 - x_2 - x_3$.

4. Preslikavanje je zadato formulama $\lambda x_1' = x_2 + x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = x_1 + x_2$. Dokazati da je ono hiperbolička homologija i odrediti mu centar i osu. Izabrati koordinatni sistem u čijim je afinim koordinatama preslikavanje homotetija.

5. Naći projektivno preslikavanje proširene afine ravni koje prave $a: \ x = 0$, $b: \ y = 0$ i $c: \ y = 1 - x$ preslikava redom na prave b, c, a, a težište trougla kome stranice pripadaju tim pravama preslikava u presek pravih $x - y = 0$ i $x - y = 2$. Koja prava se preslikava u beskonačno daleku? Šta je slika kruga opisanog oko tog trougla?

Krive II reda

1. Dokazati sledeća tvrdjenja:
   a) Definicija polariteta je geometrijska, tj. ne zavisi od izbora koordinata.
   b) Pri promeni koordinata $\Lambda X = TX'$ matrica G krive II reda menja se u $G' = T^T G T$.
   c) Polara je GMT konjugovanih sa polom u odnosu na krivu Γ.

2. Na pravoj $p: \ 2x_1 - x_2 - 9x_3 = 0$ naći tačku X konjugovanu tački $A(-1:2:1)$ u odnosu na krivu $\Gamma: \ x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$.

3. Data je kriva $\Gamma: \ 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$.
   a) Naći jednačinu polare tačke $A(1:0:1)$.
   b) Naći, ako postoje, tangente iz tačke A na krivu Γ.
   c) Naći pol prave $q: \ x_3 = 0$.

4. Naći jednačine tangenti iz tačke $B(3:-2:2)$ na krivu $\Gamma: 3x_1^2+x_2^2-5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3=0$.

5. U afinoj projektivnoj ravni dat je krug $x^2+y^2=1$. Naći njegovu jednačinu u sistemu koordinata čije su bazne tačke i jedinica $A_1(1,0)$, $A_2(0,1)$, $A_3(-1,0)$, $B(0,-1)$. Koju krivu predstavlja u ovom sistemu?

6. Naći jednačinu krive II reda koja dodiruje beskonačno daleku pravu i Ox osu u tački $(3,0)$, a Oy osu u tački $(0,2)$.

7. Ako temena četvorotemenika $ABCD$ pripadaju krivoj II reda, tada polara njegove dijagonalne tačke sadrži preostale dve dijagonalne tačke.

Razni zadaci

1. Ako su A, A' i B, B' odgovarajuće tačke hiperboličke (eliptičke) involucije, dokazati da $A, A' \dot{-} B, B'$ $(A, A' \div B, B')$.

2. (*jun 2004.*) Neka je f projektivno preslikavanje prave p na sebe samu i $A_0 \in p$. Ukoliko važi $A_{n+1} := f(A_n)$ i $A_6 = A_0$, odrediti (ako postoji) dvorazmeru $(A_1A_2A_4A_5)$.

3. (*januar 2000.*) Dato je projektivno preslikavanje formulama $\lambda x_1' = x_1 + x_2 + 3x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + 5x_2 + x_3$, $\lambda x_3' = 3x_1 + x_2 + x_3$. Odrediti njegove fiksne tačke i fiksne prave, kao i sve krive II reda invarijantne pri tom preslikavanju.

4. (*oktobar 2000.*) Odrediti formule involucije na projektivnoj pravoj kojoj su odgovarajuće tačke $A(-1:1)$, $A'(8:5)$, $B(1:1)$, $B'(2:1)$. Da li je involucija eliptička ili hiperbolička? Čuva li orijentaciju?

5. (*decembar 2003.*) U projektivnoj ravni zadata je kriva $\Gamma:\ x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3+2x_2x_3=0$ i tačka $A(1:2:1)$.
   a) Odrediti tangente iz tačke A na krivu Γ.
   b) Neka su T_1 i T_2 dodirne tačke tangenti iz A na krivu Γ.
   c) Odrediti još neku krivu II reda koja sadrži tačke T_1 i T_2 i ima za tangente prave AT_1 i AT_2.

6. (*oktobar 2009.*) A, B i C su tačke projektivne prave p. Neka su D, E i F tačke definisane sa $(ABCD) = 2$, $(ABCE) = 3$, $(ADEF) = -2$. Projektivno preslikavanje $f:\ p \barwedge p$ definisano je sa $f(A) = D$, $f(B) = E$, $f(C) = F$. Ako je $G = f(D)$, izračunati dvorazmeru $(ABCG)$.

7. (*septembar 2010.*) U projektivnoj ravni preslikavanje f je zadato formulama: $\lambda x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$. Odrediti sve fiksne prave preslikavanja f, a zatim odrediti fiksnu pravu p koja sadrzhi tačku $P(1:-5:3)$.

SINTETIČKI PRISTUP

Projektivna preslikavanja jednodimenzionih mnogostrukosti

1. Projektivno preslikavanje $f : \omega \barwedge \omega'$ jednodimenzionih mnogostrukosti je perspektivno ako i samo ako je zajednički element tih mnogostrukosti fiksan.

2. Neka su A, B, C tri razne tačke prave p i A', B', C' tri razne tačke prave $p' \neq p$. Odrediti sliku proizvoljne tačke D pri projektivnom preslikavanju $f : p \barwedge p'$ koje slika tačke A, B, C redom na tačke A', B', C'. Šta se dešava u slučaju $p = p'$?

3. (*Papasova teorema*) Ako su tačke A, B, C kolinearne i tačke A', B', C' kolinearne, tada su i tačke $X = BC' \times B'C, Y = AC' \times A'C, Z = AB' \times A'B$ kolinearne.

4. Neka je $f : p \barwedge p$ projektivno preslikavanje i $f(M) = M$. Dokazati da je f paraboličko ako i samo ako za svaku tačku $A \in p \setminus \{M\}$ važi $\mathcal{H}(M, f(A); A, f(f(A)))$.

5. Dokazati da parabolička projektivna preslikavanja na pravoj p koja fiksiraju tačku M medjusobno komutiraju.

Projektivna preslikavanja dvodimenzionih mnogostrukosti

Homologije

1. Dokazati da su osa, protivosa i protivosa inverznog preslikavanja medjusobno paralelne prave.

2. Dokazati da je perspektivno kolinearno preslikavanje odredjeno sa:
   a) centrom S, osom s i slikom A' tačke A
   b) centrom S, osom s i protivosom u
   c) centrom S, osom s i protivosom u' inverzne homologije.

3. Data je tačka S, prava s i četvorougao $ABCD$. Odrediti perspektivno preslikavanje čiji je centar tačka S, osa prava s i koji preslikava četvorougao $ABCD$ u četvorougao čije su dijagonale normalne.

4. (*novembar 2004.*) U ravni je dat četvorougao $ABCD$ koji nije trapez. Odrediti sva perspektivno kolinearna preslikavanja ravni koja imaju A i B za fiksne tačke, dok četvorougao $ABCD$ prevode u paralelogram.

5. (*februar 2005.*) U ravni su date tačke A, B, C, D, E takve da nikoje tri nisu kolinearne i nikoje tri prave odredjene njima nisu paralelne. Perspektivno kolinearno preslikavanje sa fiksnim tačkama A, B i E preslikava četvorougao $ABCD$ u trapez koji za osnovicu ima sliku duži BC. Konstruisati sliku četvorougla $ABCD$ pri tom preslikavanju. Razmotriti sve moguće slučajeve.

Perspektivno afina preslikavanja

6. Date su prave p, s i duž AB. Odrediti perspektivno afino preslikavanje čija je osa s, zraci afinosti su paraleni sa p, a slika duži AB ima datu dužinu d.

7. (*decembar 2004.*) U ravni je data prava s i tačke A, B, C i D'. Perspektivnim afinim preslikavanjem sa osom s trougao ABC se slika na jednakokraki trougao $A'B'C'$ sa osnovicom $B'C'$, tako da D' leži na pravoj $B'C'$. Konstruisati $\triangle A'B'C'$. (Rešavati samo opšti slučaj)

8. (*septembar 2004.*) Data je prava s i četvorougao $ABCD$. Odrediti perspektivno afino preslikavanje koje ima osu s i koje dati četvorougao preslikava u kvadrat.

Dezagrova teorema

1. Date su nekolinearne tačke A, B, C i prava p, $C \in p$. Neka su P i Q proizvoljne tačke prave p i neka je $AP \cap BC = M$, $AQ \cap BC = N$, $BP \cap AC = U$, $BQ \cap AC = V$. Dokazati da su prave AB, MU, NV konkurentne.

2. U proizvoljan četvorougao upisan je trapez čije su osnove paralelne jednoj dijagonali četvorougla. Dokazati da se bočne strane trapeza seku na drugoj dijagonali četvorougla.

3. U ravni su date konkurentne prave a, b, c i tačke P, Q, R koje im ne pripadaju. Odrediti tačke $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ takve da važi $P \in BC$, $Q \in AC$, $R \in AB$.

4. Tri trotemenika imaju isti centar perspektive. Dokazati da se njihove ose perspektive seku u jednoj tački.

5. Data je prava c i tačke A i B koje joj ne pripadaju. Konstruisati presečnu tačku pravih c i AB bez konstrukcije prave AB.

Krive II reda

1. Kroz tačku D stranice BC trotemenika ABC prolazi prava p koja seče stranice AB i CA redom u tačkama B' i C'. Prave BC' i CB' se seku u tački M. Šta je geometrijsko mesto tačaka M kada prava p opisuje pramen sa središtem D?

2. Na nedegenerisanoj krivoj II rede Γ date su različite tačke A, B, C. Neka je a tangenta na Γ u tački A i $D \neq A$ proizvoljna tačka prave A. Ako je $X \in \Gamma$, $Y = BX \cap AC$, $M = AX \cap DY$, šta je geometrijsko mesto tačaka M kada se tačka X kreće po Γ?

3. Date su tačke A, B, C, D, E nedegenerisane krive II reda Γ i prava $p \ni A$. Konstruisati drugu presečnu tačku prave p i krive Γ.

4. Date su tačke A, B, C, D i tangenta a u tački A nedegenerisane krive II reda Γ. Konstruisati tangentu c u tački C na Γ.

5. Date su tangente a, b, c i dodirne tačke $A \in a$, $B \in b$ krive II reda Γ. Za datu tačku $R \in c$ odrediti $AR \cap \Gamma$.

6. Date su tačke A, B, C i pravac o' ose parabole, kao i prava $p \ni A$. Konstruisati drugu presečnu tačku prave p i parabole.

7. (*oktobar 2004.*) Date su tačke A i B i prave a, b, p. Konstruisati centar hiperbole ako je a tangenta u A, b tangenta u B i p asimptota hiperbole.

8. Date su asimptota q hiperbole, pravac asimptote p, tangenta t, njena dodirna tačka T i tačka X na asimptoti q. Odrediti drugu tangentu hiperbole kroz tačku X.

9. Dokazati da središta tetiva elipse i hiperbole koje su paralelne jednom dijametru te krive pripadaju njemu konjugovanom dijametru. Šta je u slučaju parabole?

10. Data je veća osa PQ i dijametar MN elipse. Konstruisati manju osu elipse.

11. Date su duži AB i CD koje se polove. Konstruisati glavne ose elipse čiji su konjugovani dijametri date duži.

Razni zadaci

1. Date su tri konkurentne prave p, q, r i tačke R_1, R_2, R_3 na pravoj r. Ako su f_1, f_2, f_3 perspektivna preslikavanja prave p na pravu q sa centrima R_1, R_2, R_3, dokazati da važi $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$.

2. Dokazati da je svaka involucija f projektivne ravni homologija. Dokazati da postoji kriva drugog reda invarijantna pri involuciji f.

3. Data je elipsa parom konjugovanih dijametara AB i CD. Odrediti bar jedno perspektivno afino preslikavanje koje elipsu preslikava u krug.

4. U ravni je data prava s i četvorougao $ABCD$. Odrediti elaciju sa osom s koja dati četvorougao preslikava na deltoid.

5. Date su prave a i a' koje se seku u tački S van crteža i tačka P van pravih a i a'. Konstruisati pravu PS.

6. (*kolokvijum 2004.*) U ravni su date tačke A i O, kao i prave a i p. Ako je A dodirna tačka tangente a na hiperbolu, O centar te hiperbole, a p jedna njena asimptota, odrediti drugu njenu asimptotu.

7. (*januar 2005.*) U euklidskoj ravni date su različite prave a i t, kao i tačke $T, M \in t$. Ako je T teme parabole i ako su a i t njene tangente, konstruisati drugu tangentu iz tačke M na tu parabolu.

8. (*septembar 2010.*) U euklidskoj ravni date su tačke M, N, T i prave p i m. Ako je Γ hiperbola sa asimptotom p i tangentom m takva da $M, T \in m$, $M, N \in \Gamma$, konstruisati drugu tangentu iz tačke T na hiperbolu Γ.