

# Osnovni zadaci za kurs Nacrtna geometrija (stari statut)

23. oktobar 2014

## ANALITIČKI PRISTUP

1. Tačke  $0$ ,  $\infty$  i  $1$  afinog sistema koordinata uzete su redom za bazne tačke  $A_1(1 : 0)$ ,  $A_2(0 : 1)$  i jedinicu  $B(1 : 1)$  novog homogenog sistema koordinata. Naći vezu između afine koordinate i novih homogenih koordinata.
2. Tačke  $A_1(2 : 1)$ ,  $A_2(3 : 1)$  i  $B(4 : 1)$  date koordinatama  $(x_1 : x_2)$  odabrane su redom za bazne tačke i jedinicu novog sistema homogenih koordinata  $(x'_1 : x'_2)$ . Odrediti vezu između starog i novog sistema koordinata.
3. Date su tačke  $A(0 : 1)$ ,  $B(1 : 0)$ ,  $C(1 : 1)$  i  $D(3 : 2)$ . Odrediti dvorazmeru  $(ABCD)$ .
4. Na projektivnoj pravoj date su tačke  $A(1 : 0)$ ,  $B(2 : 1)$  i  $C(4 : 1)$ . Odrediti koordinate tačke  $X$  za koju važi  $\mathcal{H}(A, X; B, C)$ .
5. Odrediti formule projektivne transformacije koja tačke  $A(0 : 1)$ ,  $B(1 : 0)$  i  $C(1 : 1)$  prevodi redom u tačke  $A'(1 : -1)$ ,  $B'(1 : 1)$  i  $C'(1 : 3)$ .
6. Data je transformacije  $\lambda x'_1 = 2x_1 - x_2$ ,  $\lambda x'_2 = x_1 + 4x_2$ . Naći fiksne tačke transformacije.
7. Involicija projektivne prave zadata je parovima odgovarajućih tačaka  $A(1 : 2)$  i  $A'(1 : 0)$ , odnosno  $B(2 : 3)$  i  $B'(8 : 1)$ . Odrediti tu involuciju, njene invarijantne tačke i ispitati čuva li orijentaciju.
8. Naći jednačinu prave koja sadrži tačke  $A(2 : 5 : 2)$  i  $B(8 : 1 : -1)$ . Dokazati da tačka  $C(-4 : 9 : 5)$  pripada pravoj  $AB$  i odrediti tačku  $D$  takvu da važi  $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ .
9. U projektivnoj ravni date su koordinate novih baznih tačaka i jedinice u odnosu na stari projektivni sistem  $A_1(4 : 1 : 1)$ ,  $A_2(4 : 4 : 1)$ ,  $A_3(0 : 4 : 1)$  i  $B(2 : 1 : 1)$ . Naći formule transformacije koordinata iz starih u nove.
10. Naći fiksne tačke i fiksne prave preslikavanja  $\lambda x'_1 = 4x_1 - x_2$ ,  $\lambda x'_2 = 6x_1 - 3x_2$ ,  $\lambda x'_3 = x_1 - x_2 - x_3$ .
11. Preslikavanje je zadato formulama  $\lambda x'_1 = x_2 + x_3$ ,  $\lambda x'_2 = x_1 + x_3$ ,  $\lambda x'_3 = x_1 + x_2$ . Dokazati da je ono hiperbolička homologija i odrediti mu centar i osu.
12. Na pravoj  $p : 2x_1 - x_2 - 9x_3 = 0$  naći tačku  $X$  konjugovanu tački  $A(-1 : 2 : 1)$  u odnosu na krivu  $\Gamma : x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$ .

13. Data je kriva  $\Gamma : 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$ .
- Naći jednačinu polare tačke  $A(1 : 0 : 1)$ .
  - Naći, ako postoje, tangente iz tačke  $A$  na krivu  $\Gamma$ .
  - Naći pol prave  $q : x_3 = 0$ .
14. Naći jednačine tangenti iz tačke  $B(3 : -2 : 2)$  na krivu  $\Gamma : 3x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$ .
15. Naći projektivno preslikavanje proširene afine ravni koje slika:
- krug  $x^2 + y^2 = 1$  u hiperbolu  $x^2 - y^2 = 1$ ;
  - krug  $x^2 + y^2 = 1$  u parabolu  $y = x^2$ .

## SINTETIČKI PRISTUP

- Neka su  $A, B, C$  tri razne tačke prave  $p$  i  $A', B', C'$  tri razne tačke prave  $p' \neq p$ . Odrediti sliku proizvoljne tačke  $D$  pri projektivnom preslikavanju  $f : p \bar{\wedge} p'$  koje slika tačke  $A, B, C$  redom na tačke  $A', B', C'$ .
- Dokazati da su osa, protivosa i protivosa inverznog preslikavanja međusobno paralelne prave.
- Dokazati da je perspektivno kolinearno preslikavanje određeno sa:
  - centrom  $S$ , osom  $s$  i slikom  $A'$  tačke  $A$
  - centrom  $S$ , osom  $s$  i protivosom  $u$
  - centrom  $S$ , osom  $s$  i protivosom  $v'$  inverzne homologije.
- Data je tačka  $S$ , prava  $s$  i četvorougao  $ABCD$ . Odrediti perspektivno preslikavanje čiji je centar tačka  $S$ , osa prava  $s$  i koji preslikava četvorougao  $ABCD$  u četvorougao čije su dijagonale normalne.
- Date su prave  $p, s$  i duž  $AB$ . Odrediti perspektivno afino preslikavanje čija je osa  $s$ , zruci afinosti su paralelni sa  $p$ , a slika duži  $AB$  ima datu dužinu  $d$ .
- Date su tačke  $A, B, C, D, E$  nedegenerisane krive II reda  $\Gamma$  i prava  $p \ni A$ . Konstruisati drugu presečnu tačku prave  $p$  i krive  $\Gamma$ .
- Date su tačke  $A, B, C, D$  i tangenta  $a$  u tački  $A$  nedegenerisane krive II reda  $\Gamma$ . Konstruisati tangentu  $c$  u tački  $C$  na  $\Gamma$ .
- Date su tačke  $A, B, C$  i pravac  $o'$  ose parabole, kao i prava  $p \ni A$ . Konstruisati drugu presečnu tačku prave  $p$  i parabole.
- Date su asimptota  $q$  hiperbole, pravac asimptote  $p$ , tangenta  $t$  i njena dodirna tačka  $T$ . Konstruisati asimptotu  $p$ .

## METODA Odstojanja normalnog projektovanja

- Data je prava  $p$  projekcijama svojih tačaka  $M(M', OM_0)$  i  $N(N', ON_0)$ . Konstruisati: a) trag prave  $p$ ; b) pravu veličinu duži  $MN$ ; c) nagibni ugao prave  $p$ .

2. Date su tačke  $A(A', OA_0)$ ,  $B(B', OB_0)$  i  $C(C', OC_0)$ . Konstruisati a) trag  $a$  ravni  $\alpha = (ABC)$  b) težište  $T = (T', OT_0)$  trougla  $ABC$ ; c) centar  $S = (S', OS_0)$  opisanog kruga trougla  $ABC$ .
3. Data je ravan  $\alpha(a, A', OA_0)$ , tačka  $S$  koja joj pripada i duž  $d$ . Nacrtati projekciju kruga  $k$  koji pripada ravni  $\alpha$ , ima centar  $S$ , a poluprečnik mu je podudaran duži  $d$ .
4. Odrediti projekciju kruga čiji je centar data tačka  $S(S', OS_0)$ , a koji dodiruje datu pravu  $p(P, Q', OQ_0)$ .
5. Data je ravan  $\alpha(a, A', OA_0)$  koja sa projekcijskom ravni gradi ugao od  $\frac{\pi}{6}$ . Konstruisati zatim projekciju kvadrata  $ABCD$  koji pripada ravni  $\alpha$  i čija je ivica  $AB$  podudarna datoj duži  $d$ .
6. Odrediti presek ravni  $\alpha(a, A', OA_0)$  i  $\beta(b, B', OB_0)$  ako važi:
  - i)  $a \cap b = \{P\}$ ;    ii)  $a \parallel b$ .
7. Odrediti prodor prave  $p(P, A', OA_0)$  kroz ravan  $\tau(t, M', OM_0)$ .
8. Date su ravan  $\tau(t, K', OK_0)$  i tačka  $M(M', OM_0)$  koja joj ne pripada. a) Konstruisati normalu  $n$  iz tačke  $M$  na ravan  $\tau$ . b) Odrediti tačku  $N$  simetričnu tački  $M$  u odnosu na  $\tau$ .
9. Date su prava  $n(N, S', OS_0)$  i tačka  $K(K', OK_0)$ . a) Konstruisati ravan  $\tau$  koja sadrži tačku  $K$  i normalna je na pravu  $n$ . b) Odrediti udaljenost tačke  $K$  od prave  $n$ .

**Uputstvo:** a) radjeno na predavanjima.

b) Ako je  $\{M\} = n \cap \tau$  tada je tražena udaljenost  $d(K, n) = KM = [K][M]$ . **Primetimo da je prava  $KM$  normala iz tačke  $K$  na pravu  $n$ .**

10. Data je ravan  $\alpha(a, A', OA_0)$  i tačka  $M(M', OM_0)$  koja joj ne pripada. Konstruisati trag ravni  $\beta$  koja sadrži tačku  $M$  i paralelna je sa  $\alpha$ .

## METODA TRAGA I NEDOGLEDA CENTRALOG PROJEKTOVANJA

1. Date su tačka  $M$  na nosiocu  $p(P, P_\infty^c)$  i tačka  $N$  na nosiocu  $q(Q, Q_\infty^c)$ . Konstruisati trag i nedogled prave  $l = MN$ .
2. Date su ravni  $\alpha(a, a_\infty^c)$  i  $\beta(b, b_\infty^c)$ . Konstruisati trag i nedogled prave  $p = \alpha \cap \beta$  ako važi:
  - i)  $a \cap b = \{P\}$       ii)  $a \parallel b$ .
3. Odrediti projekciju prodora prave  $p(P, P_\infty^c)$  kroz ravan  $\alpha(a, a_\infty^c)$ .
4. Data je prava  $m(M, M_\infty^c)$  i tačka  $T$  na nosiocu  $q(Q, Q_\infty^c)$ . Konstruisati trag i nedogled ravni koja sadrži tačku  $T$  i pravu  $m$ .
5. Data je ravan  $\alpha(a, a_\infty^c)$  i tačka  $B$  koja joj pripada svojom projekcijom  $B^c$ . Konstruisati trag i nedogled prave  $q$  koja pripada ravni  $\alpha$ , sadrži tačku  $B$ , a sa projekcijskom ravni  $\pi$  gradi ugao od  $\frac{\pi}{4}$ .
6. Data je prava  $p(P, P_\infty^c)$ . Konstruisati trag i nedoglednicu ravni  $\alpha$  koja sadrži pravu  $p$ , a sa projekcijskom ravni  $\pi$  gradi ugao od  $\frac{\pi}{6}$ .

7. Data je ravan  $\alpha(a, a_\infty^c)$  i tačka  $M$  na nosiocu  $p(P, P_\infty^c)$ . Konstruisati trag i nedogled ravni  $\beta$  koja sadrži tačku  $M$  i paralelna je sa  $\alpha$ .
8. Data je tačka  $A$  na nosiocu  $p(P, P_\infty^c)$  i ravan  $\tau(t, t_\infty^c)$ . Konstruisati trag i nedogled prave  $n$  koja sadrži  $A$  i upravna je na ravan  $\tau$ . Konstruisati zatim tačku  $A_1$  koja je simetrična tački  $A$  u odnosu na ravan  $\tau$ .
9. Data je tačka  $A$  na nosiocu  $p(P, P_\infty^c)$  i prava  $n(N, N_\infty^c)$ . Konstruisati trag i nedoglednicu ravni  $\tau$  koja sadrži  $A$  i upravna je na pravu  $n$ .
10. Konstruisati trag i nedoglednicu ravni  $\alpha$  koja sadrži datu pravu  $a(A, A_\infty^c)$  i normalna je na datu ravan  $\tau(t, t_\infty^c)$ .
11. Data je ravan  $\alpha(a, a_\infty^c)$  i u njoj tačka  $A$ . Konstruisati centralnu projekciju kvadrata  $ABCD$  koji pripada ravni  $\alpha$ , ivica mu je podudarna datoj duži  $d$ , a ivica  $AB$  gradi ugao od  $\frac{\pi}{6}$  sa ravni  $\pi$ .
12. Data je tačka  $S$  u ravni  $\alpha(a, a_\infty^c)$ . Odrediti centralnu projekciju kruga koji pripada ravni  $\alpha$ , centar mu je data tačka  $S$ , a poluprečnik kruga je podudaran datoj duži  $d$ .