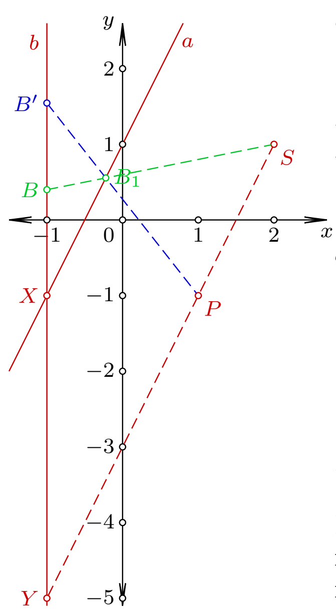
НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА – март, 2014. године

1. (10п) У афиној равни дате су праве $a: y = 2x+1,\ b: x = -1$ и тачке $S(2,1),\ P(1,-1)$. Одредити формуле композиције $f = f_2 \circ f_1$ перспективних пресликавања $f_1:\ b \overset{S}{\underset{\wedge}{}} a,\ f_2: a \overset{P}{\underset{\wedge}{}} b$ у хомогеним координатама праве b, а затим одредити фиксне тачке пресликавања f. Да ли је пресликавање инволуција?

   решење: Пресликавање f је пројективно пресликавање праве b на саму себе, представљено као композиција два перспективна пресликавања.



Све тачке праве b су облика $B(1:\beta:-1),\ \beta \in \mathbb{R}$. Тачка B се пресликавањем f_1 слика у тачку $B_1:\quad \{B_1\} = SB \cap a$. Затим се тачка B_1, пресликавањем f_2 слика у тачку B': $\{B'\} = PB_1 \cap b$.

Ако изаберемо $B(1:0:-1)$, тада је $B_1(-2:1:5)$ и $B'(-7:5:7)$.

Фиксне тачке су $a \cap b, SP \cap b$.

$$a \cap b: \quad \left.\begin{array}{rrrrrrl} a: & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ b: & x_1 & & & + & x_3 & = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \{X\} = (1:1:-1)$$

$$SP = S \times P = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [2:-1:-3]$$

$$SP \cap b: \quad \left.\begin{array}{rrrrrrl} SP: & 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = 0 \\ b: & x_1 & & & + & x_3 & = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \{Y\} = (1:5:-1)$$

На правој b уведемо координатни систем $(y_1:y_2)$ тако што фиксирамо $x_3 = -x_1$. Координате тачака у овом новом координатном систему су:

$$\begin{array}{rclcrcl} \overline{X} & = & (1:1) & \qquad & \overline{B} & = & (1:0) \\ \overline{Y} & = & (1:5) & & \overline{B'} & = & \left(1:-\frac{5}{7}\right). \end{array}$$

Матрица траженог пресликавања

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

добија се решавањем система једначина:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 \overline{X} & = & T\overline{X} \\ \lambda_2 \overline{Y} & = & T\overline{Y} \\ \lambda_3 \overline{B'} & = & T\overline{B}. \end{array}$$

Резултат је

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & 13 \end{pmatrix},$$

па је тражено пресликавање

$$\begin{array}{rcrcr} \lambda y_1' & = & 7y_1 & + & y_2 \\ \lambda y_2' & = & -5y_1 & + & 13y_2 \end{array}$$

у односу на координате (y_1, y_2) уведене на пројективној правој b.

Како је $T^2 \neq \lambda Id$, пресликавање није инволуција.

2. (5п) У равни је дат троугао $\triangle ABC$ и праве s и p. Одредити афино пресликавањее са осом s и зрацима афиности паралелним правој p које $\triangle ABC$ слика у једнакокраки троугао са основицом AC.

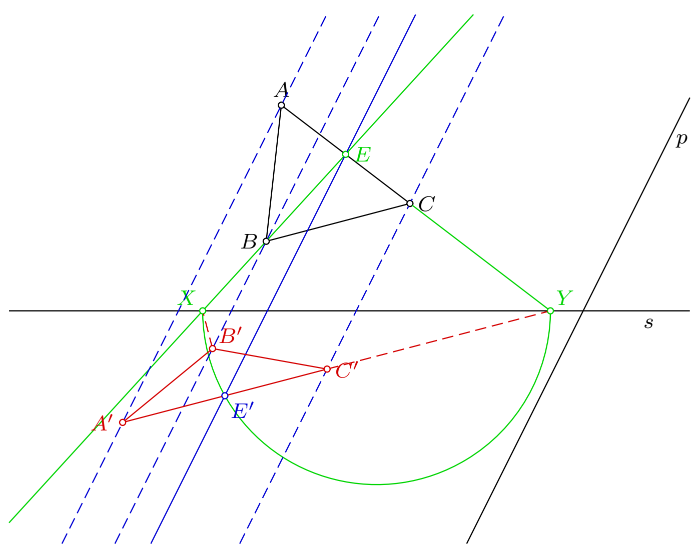
   решење: Како је $\triangle A'B'C'$ једнакокраки, то се висина из темена B' поклапа са тежишном дужи која одговара том темену. Афино пресликавање чува средишта дужи, тако да се средиште E дужи AC слика у средиште E' дужи $A'C'$ за које истовремено важи $B'E' \perp A'C'$.

   Означимо са X пресек праве BE са осом s.

   Тачке A, E, C су колинеарне, па су и њихове слике колинеарне тачке. Нека је $\{Y\} = AC \cap s$. Тада $Y \in A'C'$.

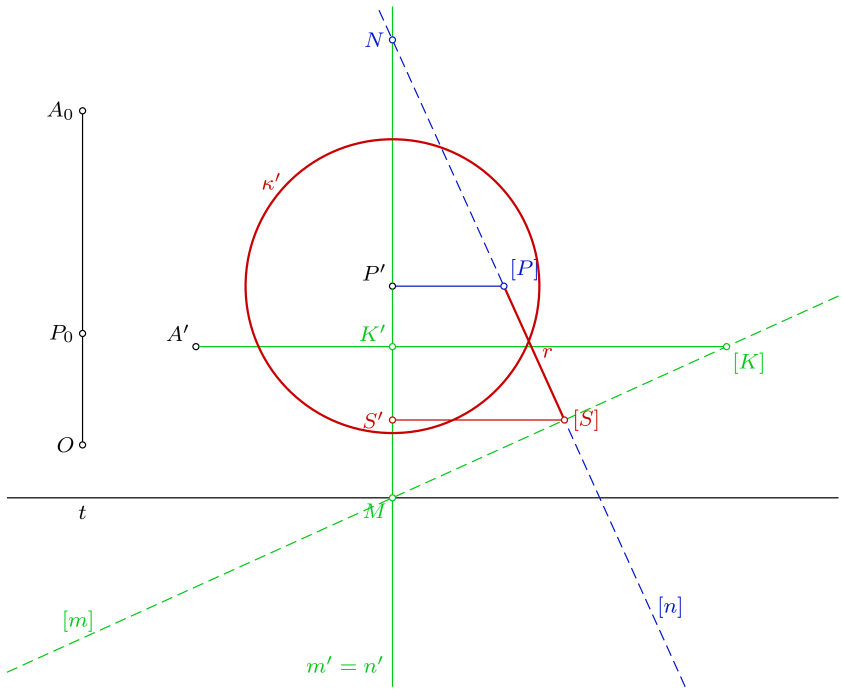
   Из услова $B'E' \perp A'C'$ добијамо да тачка E' мора припадати кругу над пречником XY. Дакле, $\{E'\} = \kappa(XY) \cap e$, где је $e : E \in e, e \parallel p$. У општем случају постоје две пресечне тачке – бирамо ону која је са супротне стране праве s у односу на тачку E.

   Пресликавање је јединствено одређено осом s, зраком афиности p и одговарајућим паром тачака E, E' (погледати слику).



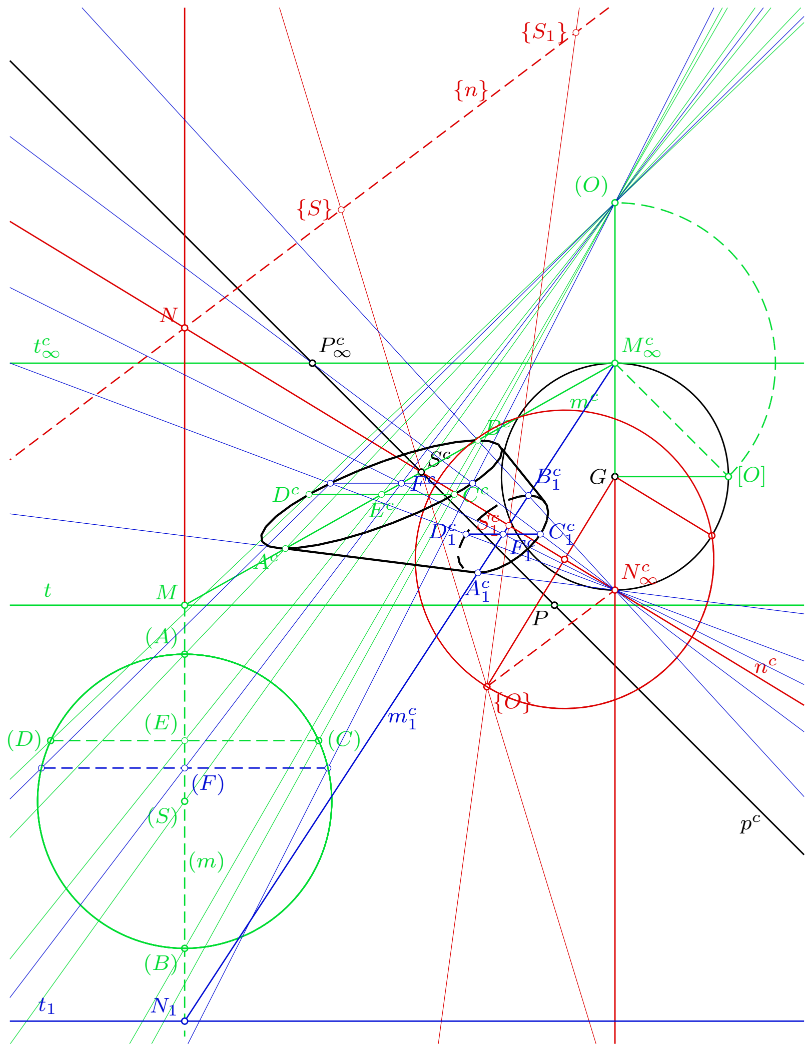
3. (5п) Методом одстојања нормалног пројектовања дата је раван $\tau(t, A', OA_0)$ и тачка $P(P', OP_0)$ која јој не припада. Конструисати пројекцију сфере са центром у тачки P којој је τ тангентна раван.

   решење: Погледати слику!



4. (10п) Методом трагова и недогледа централног пројектовања дата је тачка S на носиоцу $p(P, P^c_\infty)$. Конструисати траг и недогледницу равни τ која садржи праву p, а са равни слике гради угао $\frac{\pi}{4}$. Представити затим пројекцију правог ваљка, чија основа припада равни τ, центар основе је дата тачка S, а пречник основе и висина ваљка су подударне датој дужи d.

   решење: Погледати слику!



$\{S_1\}$
$\{n\}$
(O)
$\{S\}$
N
P^c_∞
t^c_∞
M^c_∞
m^c
B^c
S^c
B^c_1
G
$[O]$
D^c
F^c
C^c
E^c
S^c_1
D^c_1
C^c_1
F^c_1
A^c
N^c_∞
A^c_1
t
M
P
(A)
n^c
$\{O\}$
m^c_1
(E)
(D)
(C)
(F)
(S)
(m)
p^c
(B)
N_1
t_1