НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА – децембар 2012. године

1. (5п) Дата је крива $\Gamma: \ -x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ и тачке $A(1 : -2 : 4)$ и $B(2 : 1 : 2)$. Одредити координате тачке C која је конјугована тачкама A и B у односу на криву Γ. Шта је пол праве AB?

   решење: Геометријско место тачака конјугованих тачки M у односу на криву Γ је полара тачке M, тј. права $pol(M) = GM$. Стога, тачка C се налази у пресеку правих $pol(A)$ и $pol(B)$:

$$C = pol(A) \times pol(B) = GA \times GB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ -\frac{47}{2} \\ -39 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 17 \\ -47 \\ -78 \end{pmatrix}$$

   Пол праве AB је тачка C јер су пол и полара дуални објекти!

2. (10п) У еуклидској равни дата је тачка T и праве p и q. У тачки T конструисати (анализа, конструкција, доказ, дискусија) тангенту на хиперболу чије су асимптоте p и q.

   решење:
   АНАЛИЗА: Нека је Γ тражена хипербола и праве p и q њене асимптоте. Означимо са t тангенту у тачки $T \in \Gamma$ на хиперболу. Пошто је хипербола централно симетрична крива у односу на тачку $\{O\} = p \cap q$, можемо да одредимо и тачку $T_1 \in \Gamma$ такву да је O средиште дужи TT_1.
   Праве p и q су тангенте на хиперболу у бесконачно далеким тачкама P_∞ и Q_∞ редом.
   Применимо Паскалову теорему на дегенерисани шестотеменик $P_\infty Q_\infty T T T_1 P_\infty$:

$$\left.\begin{array}{ccccc} P_\infty T_1 \cap TQ_\infty & = & p_1 \cap q_1 & = & \{M\} \\ P_\infty P_\infty \cap TT & = & p \cap t & = & \{N\} \\ P_\infty Q_\infty \cap TT_1 & = & u_\infty \cap TT_1 & = & \{L_\infty\} \end{array}\right\} \Longrightarrow M, N, L_\infty \in l, \ l \parallel TT_1$$

   КОНСТРУКЦИЈА:

   - $O: \ p \cap q = \{O\}$
   - $T_1: \ T_1 = S_O(T)$
   - $p_1: \ T_1 \in p_1, \ p_1 \parallel p$
   - $q_1: \ T \in q_1, \ q_1 \parallel q$
   - $M: \ p_1 \cap q_1 = \{M\}$
   - $l: \ M \in l, \ l \parallel TT_1$
   - $N: \ p \cap l = \{N\}$
   - $t: \ t = NT$

   ДОКАЗ: Према конструкцији $T \in t$.
   Према конструкцији је $MN \parallel TT_1$, тј. тачке M, N и L_∞ (бесконачно далека тачка праве TT_1) су колинеарне. Према конструкцији и обрнутом смеру Паскалове теореме шестотеменик $P_\infty Q_\infty T T T_1 P_\infty$ је уписан у криву Γ'. Ово значи да $T, T_1 \in \Gamma'$, а праве p, q, t су тангенте на Γ'.
   Према услову задатка, крива Γ садржи тачку T и њене асимптоте су праве p и q. Како је крива 2. реда јединствено одређена са 5 елемената (тачка + две тангенте у двема тачкама), то је $\Gamma \equiv \Gamma'$, тј. права t је тангента на криву Γ.
   ДИСКУСИЈА: Ако су праве p и q паралелне или тачка T припада једној од њих, решење не постоји.

3. (5п) Методом одстојања нормалног пројектовања дата је раван $\beta(b, B', OB_0)$ и тачка $A(A', OA_0)$ која јој не припада. Конструисати траг равни α која садржи тачку A и паралелна је равни β.

   решење:

   - Конструишемо линију пада равни β такву да њена пројекција p' садржи тачку A'.
   - Одредимо на правој p тачку C такву да је на истом растојању од пројекцијске равни као и тачка B ($OB_0 = OC_0$). Њена пројекција је $\{C'\} = s'_\beta \cap p'$, где је s'_β пројекција нивоске линије равни β кроз тачку B.
   - Оборимо праву p.
   - Пошто су равни α и β паралелне, њихове линије пада q и p су такође паралелне праве. Како $A' \in p'$, пројекција линије пада равни α се поклапа са пројекцијом линије пада равни β : $q' \equiv p'$.
   - Оборени положај праве q је права $[q]$ таква да $[A] \in [q]$, $[p] \parallel [q]$.
   - Траг праве q је тачка пресека пројекције и обореног положаја те праве: $\{Q\} = q' \cap [q]$.
   - Траг равни α је права која садржи тачку Q и паралелна је трагу равни β (правој b).

4. (10п) Методом трагова и недогледа централног пројектовања дата је раван $\alpha(a, a^c_\infty)$ која са пројекцијском равни гради угао $\frac{\pi}{6}$ и тачка V на носиоцу $p(P, P^c_\infty)$, $V \notin \alpha$. Конструисати пројекцију праве купе чија основа припада равни α, а врх јој је тачка V. Полупречник основе је два пута већи од висине купе.

решење: Конструишемо прво раван α која задовољава услове задатка:

- Конструишемо круг одстојања $k(G, r)$.
- Произвољно задамо траг a равни α.
- Конструишемо троугао $G[O]M^c_\infty$ такав да је $G[O] \parallel a$, $[O] \in k$, а $\measuredangle(M^c_\infty G[O]) = \frac{\pi}{2}$, $\measuredangle([O]M^c_\infty G) = \frac{\pi}{6}$.
- Конструишемо недоглед равни је права $\alpha : a^c_\infty \parallel a$, $M^c_\infty \in a^c_\infty$.

Задамо и тачку V на носиоцу $p(P, P^c_\infty)$. Праву p задајемо произвољно уз један услов $P \notin a$, $P^c_\infty \notin a^c_\infty$ (јер $V \notin \alpha$).
Конструишемо нормалу из V на α. Ово је права којој припада висина купе.

- Конструишемо недоглед нормале N^c_∞ : $N^c_\infty \in GM^c_\infty, M^c_\infty[O] \perp N^c_\infty[O]$.
- Конструишемо траг нормале n. То је тачка N која се налази у пресеку праве VN^c_∞ и праве кроз тачку P паралелне правој $N^c_\infty P^c_\infty$. (Примедба: Раван $\gamma(NP, N^c_\infty P^c_\infty)$ је раван која садржи праве n и p које се секу у тачки V.)
- Одредимо продор праве n кроз раван α. Пројекција тачке продора S^c је тачка коју добијамо као пресек праве $n^c = NN^c_\infty$ и праве $r^c = RR^c_\infty, (\{R\} = a \cap NP, \{R^c_\infty\} = a^c_\infty \cap N^c_\infty P^c_\infty)$.
- Оборимо нормалу n. Конструишемо тачку $\{O\} : \{O\} \in k, G\{O\} \perp n^c$. Оборени положај $\{n\}$ је права кроз тачку N таква да је $\{n\} \parallel \{O\}N^c_\infty$.
- Одредимо оборене положаје врха купе V и центра основе S при обарању нормале n :

  $$\{V\} = \{n\} \cap \{O\}V^c, \qquad \{S\} = \{n\} \cap \{O\}S^c.$$

  Дужина дужи $\{V\}\{S\}$ је висина купе h.

Оборимо раван α како бисмо конструисали основу купе.

- Конструишемо тачку (O) : $(O) \in GM^c_\infty$, $(O)M^c_\infty = M^c_\infty[O]$.
- Конструишемо пројекцију линије пада равни α кроз тачку $S : m^c = MM^c_\infty$, где је $\{M\} = S^c M^c_\infty \cap a$.
- Оборени положај (S) тачке S при обарању равни α добијамо у пресеку праве кроз тачку M нормалне на траг a равни α (оборени положај (m) линије пада равни α кроз тачку S) и праве $(O)S^c$.
- Конструишемо круг l са центром у тачки (S) полупречника $2h$.
- Конструишемо пројекцију круга l.

  $l \cap (m) = \{(A), (B)\}$
  $\{A^c\} = m^c \cap (O)(A)$, $\{B^c\} = m^c \cap (O)(B)$
  $\{E^c\}$ – средиште дужи $A^c B^c$
  $(E) = (m) \cap (O)E^c$
  $(C), (D)$: $(C), (D) \in l$, $(C)(D) \parallel a$, $(E) \in (C)(D)$
  $C^c, D^c : C^c D^c \parallel a$, $E^c \in C^c D^c$, $\{C^c\} \in (O)(C)$, $\{D^c\} \in (O)(D)$
  Пројекција је елипса чији су конјуговани дијеметри $A^c B^c$ и $C^c D^c$.

Остаје још само повући тангенте из V^c на конструисану елипсу и одредити видљивост.