УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

# Математика 1 – физичка хемија

## Вектори

Тијана Шукиловић

29. oktobar 2015

# Дефиниција вектора

**Дефиниција 1.1**

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти

# Дефиниција вектора

## Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац,

# Дефиниција вектора

## Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац, смер

# Дефиниција вектора

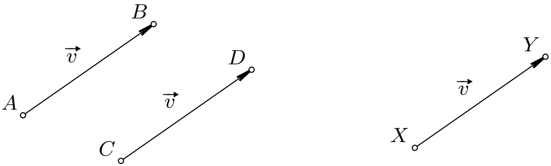
## Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац, смер и интентзитет.

# Дефиниција вектора

**Дефиниција 1.1**

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац, смер и интентзитет.




Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

# Основни појмови и ознаке

- вектор представник

# Основни појмови и ознаке

- вектор представник
- нула вектор $\overrightarrow{0}$

# Основни појмови и ознаке

- вектор представник
- нула вектор $\overrightarrow{0}$
- супротан вектор

# Основни појмови и ознаке

- вектор представник
- нула вектор $\overrightarrow{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори

# Основни појмови и ознаке

- вектор представник
- нула вектор $\overrightarrow{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори
- копланарни вектори

# Основни појмови и ознаке

- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори
- копланарни вектори
- скуп свих вектора $\mathbb{V}$, односно $\mathbb{V}^n$

# Операције са векторима

## Дефиниција 1.2 (Сабирање вектора)

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{BC} : \quad \vec{u} + \vec{v} := \overrightarrow{AC}.$$

# Операције са векторима

## Дефиниција 1.2 (Сабирање вектора)

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{BC} : \quad \vec{u} + \vec{v} := \overrightarrow{AC}.$$

## Дефиниција 1.3 (Множење вектора скаларом)

$$\vec{u} \in \mathbb{V}, \ \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : \quad \alpha \, \vec{u} := \vec{v},$$

где је $\vec{v}$ вектор који има:

- Правац: Исти као вектор $\vec{u}$;
- Интензитет: $|\vec{u}| = |\alpha| \, |\vec{v}|$;
- Смер: Исти као $\vec{u}$ за $\alpha > 0$, односно супротан смеру вектора $\vec{u}$ за $\alpha < 0$.

# Операције са векторима

### Дефиниција 1.4 (Разлика вектора)

$$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-1)\vec{v}.$$

# Операције са векторима

## Дефиниција 1.4 (Разлика вектора)

$$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-1)\vec{v}.$$

## Дефиниција 1.5 (Линеарна комбинација вектора)

$$\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k} \in \mathbb{V},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \quad \vec{v} := \alpha_1\vec{v_1} + \ldots + \alpha_k\vec{v_k}.$$

# Операције са векторима

## Дефиниција 1.4 (Разлика вектора)

$$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-1)\vec{v}.$$

## Дефиниција 1.5 (Линеарна комбинација вектора)

$$\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k} \in \mathbb{V},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}: \quad \vec{v} := \alpha_1\vec{v_1} + \ldots + \alpha_k\vec{v_k}.$$

## Дефиниција 1.6 (Јединични вектор)

$$\vec{u} \in \mathbb{V},\ |\vec{u}| \neq 0: \quad \vec{v} := \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}.$$

# Векторски простор

### Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

# Векторски простор

### Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

# Векторски простор

## Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

(C3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, супротни елемент

# Векторски простор

## Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w},$ асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u},$ неутрални елемент

(C3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0},$ супротни елемент

(C4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u},$ комутативност

# Векторски простор

## Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

(C3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, супротни елемент

(C4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, комутативност

(M1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, дистрибутивност сабирања вектора

# Векторски простор

## Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(С1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(С2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

(С3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, супротни елемент

(С4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, комутативност

(М1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, дистрибутивност сабирања вектора

(М2) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$, асоцијативност скаларног множења

# Векторски простор

## Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

(C3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, супротни елемент

(C4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, комутативност

(M1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, дистрибутивност сабирања вектора

(M2) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$, асоцијативност скаларног множења

(M3) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$, дистрибутивност сабирања скалара

# Векторски простор

## Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

(C3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, супротни елемент

(C4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, комутативност

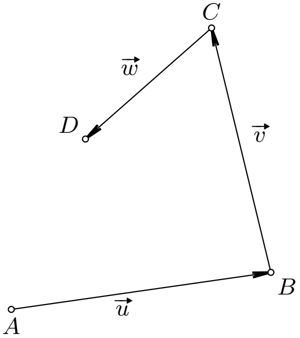
(M1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, дистрибутивност сабирања вектора

(M2) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$, асоцијативност скаларног множења

(M3) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$, дистрибутивност сабирања скалара

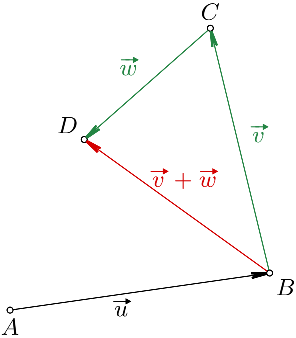
(M4) $1\vec{u} = \vec{u}$. јединични елемент

# Доказ (С1)



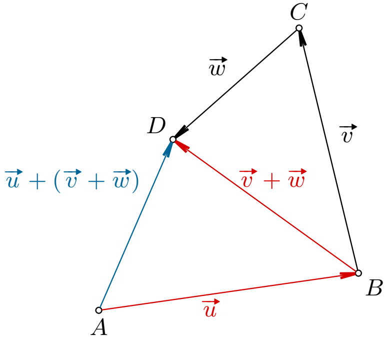

Слика 2: Асоцијативност сабирања вектора

# Доказ (С1)



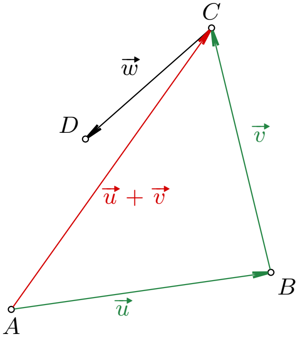

Слика 2: Асоцијативност сабирања вектора

# Доказ (C1)



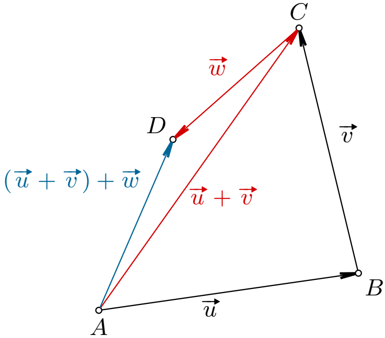

Слика 2: Асоцијативност сабирања вектора

# Доказ (C1)




Слика 2: Асоцијативност сабирања вектора

# Доказ (C1)




Слика 2: Асоцијативност сабирања вектора

# Линеарна зависност и независност вектора

## Дефиниција 1.7

Вектори $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ су линеарно независни ако релација:

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \cdots + \alpha_n \vec{v_n} = \vec{0}$$

важи само за $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

# Линеарна зависност и независност вектора

## Дефиниција 1.7

Вектори $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ су линеарно независни ако релација:

$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$$

важи само за $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
У супротном, ако постоји и $n$-торка $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ у којој је бар један од бројева $\alpha_i$ различит од нуле, вектори се називају линеарно зависним.

# Линеарна зависност и независност вектора

## Теорема 1.2

Ненула вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

# Линеарна зависност и независност вектора

### Теорема 1.2

Ненула вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

### Теорема 1.3

У равни постоје два линеарно независна вектора, а свака три вектора равни су линеарно зависна.

# Линеарна зависност и независност вектора

## Теорема 1.2

Ненула вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

## Теорема 1.3

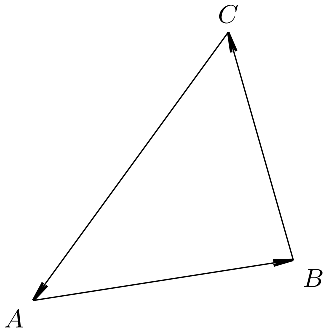
У равни постоје два линеарно независна вектора, а свака три вектора равни су линеарно зависна.

## Теорема 1.4

У простору постоје три линеарно независна вектора, а свака четири вектора су линеарно зависна.

# Примери

## Пример 1

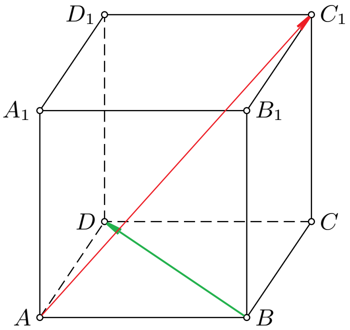



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

Слика 3: Вектори одређени страницама троугла су линеарно зависни

# Примери

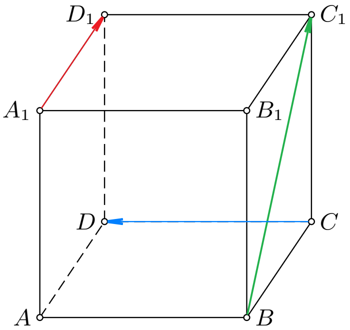
## Пример 2




Слика 4: Да ли су вектори $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BD}$ колинеарни?

# Примери

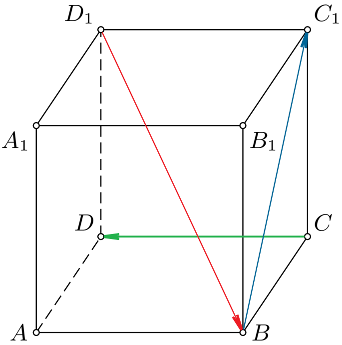
## Пример 2




Слика 4: Да ли су вектори $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{CD}$ копланарни?

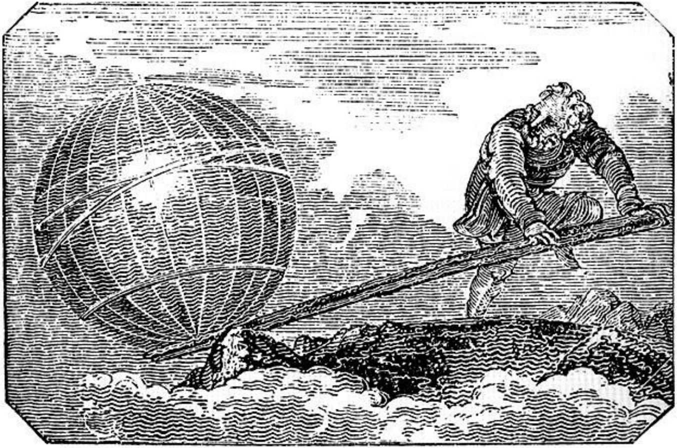
# Примери

## Пример 2



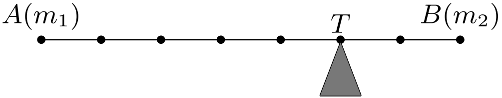

Слика 4: Да ли су вектори $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ копланарни?

# Архимедов закон полуге



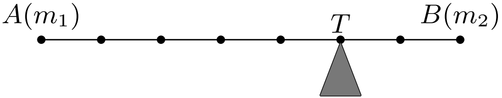
# Центар маса тачака

$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0}$$



# Центар маса тачака

$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1 \quad \iff \quad m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0}$$




$O$ – произвољна тачка

Центар маса тачака $A(m_1)$ и $B(m_2)$:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}\right)$$

# Тежиште троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$

# Тежиште троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- $A_1$ – центар маса тачака $B, C$:
  $AA_1$ – тежишна дуж (из $A$)

# Тежиште троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- $A_1$ – центар маса тачака $B, C$:
  $AA_1$ – тежишна дуж (из $A$)
- $T$ – центар маса тачака $A, B, C$:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

# Тежиште троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- $A_1$ – центар маса тачака $B, C$:
  $AA_1$ – тежишна дуж (из $A$)
- $T$ – центар маса тачака $A, B, C$:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

**Теорема 1.5**

Тежишне дужи се секу у центру маса.

# Тежиште троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- $A_1$ – центар маса тачака $B, C$:
  $AA_1$ – тежишна дуж (из $A$)
- $T$ – центар маса тачака $A, B, C$:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

### Теорема 1.5

Тежишне дужи се секу у центру маса.

За $m_1 = m_2 = m_3 = m$: центар маса = тежиште троугла!

# База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.

# База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

# База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

**Последица 2.1**

Димензија векторског простора вектора равни $\mathbb{V}^2$ је два.

# База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

## Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни $\mathbb{V}^2$ је два. Сваки вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ може да се напише у облику:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2},$$

где је $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ база векторског простора $\mathbb{V}^2$.

# Координате вектора

- База $e = (e_1, e_2)$ векторског простора $\mathbb{V}^2$.
- Координате вектора $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ у бази $e$:

$$[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

# Координате вектора

- База $e = (e_1, e_2)$ векторског простора $\mathbb{V}^2$.
- Координате вектора $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ у бази $e$:

$$[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- База $e = (e_1, e_2, e_3)$ векторског простора $\mathbb{V}^3$.
- Координате вектора $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ у бази $e$:

$$[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

# Координате тачке

- База $e = (e_1, \dots, e_n)$ векторског простора $\mathbb{V}$.
- Фиксирана тачка $O \in \mathbb{E}$ назива се координатни почетак.
- $O_e$ се назива координатним системом или репером простора $\mathbb{E}$.

# Координате тачке

- База $e = (e_1, \dots, e_n)$ векторског простора $\mathbb{V}$.
- Фиксирана тачка $O \in \mathbb{E}$ назива се координатни почетак.
- $O_e$ се назива координатним системом или репером простора $\mathbb{E}$.

## Дефиниција 2.1

Координате тачке $X \in \mathbb{E}$ у реперу $Oe$ дефинишемо као координате вектора $\overrightarrow{OX}$ у бази $e$:

$$[X]_{Oe} := [\overrightarrow{OX}]_e.$$

# Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора $\overrightarrow{MN}$ добијају „одузимањем координате тачке $M$ од координата тачке $N$."

# Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора $\overrightarrow{MN}$ добијају „одузимањем координате тачке $M$ од координата тачке $N$."

Коректност:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{MN}]_e &= [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e \\ &= [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e \\ &= [N]_{Oe} - [M]_{Oe}. \end{aligned}$$

# Матрице

$$M_{mn}(\mathbb{R}) = \left\{ A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

- Сабирање:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \quad A, B \in M_{mn}.$$

- Множење скаларом:

$$\lambda A = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda \cdot a_{ij}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, A \in M_{mn}.$$

**Теорема 2.1**

Скуп $M_{mn}(\mathbb{R})$ свих реалних матрица димензија $m \times n$ у односу на сабирање матрица и множење матрица скаларом чини векторски простор.

# Транспоновање матрице

Транспоновање = замена места врстама и колонама.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{R})$$

$$A^T = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{nm}(\mathbb{R})$$

# Множење матрица

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{nk}(\mathbb{R}) \implies A \cdot B \in M_{mk}(\mathbb{R}):$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \ldots + a_{1n}b_{n2} & \ldots \\ a_{21}b_{11} + \ldots + a_{2n}b_{n1} & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

# Множење матрица

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{nk}(\mathbb{R}) \implies A \cdot B \in M_{mk}(\mathbb{R}):$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \ldots + a_{1n}b_{n2} & \ldots \\ a_{21}b_{11} + \ldots + a_{2n}b_{n1} & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

# Множење матрица

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{nk}(\mathbb{R}) \implies A \cdot B \in M_{mk}(\mathbb{R}):$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \ldots + a_{1n}b_{n2} & \ldots \\ a_{21}b_{11} + \ldots + a_{2n}b_{n1} & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

# Множење матрица

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{nk}(\mathbb{R}) \Longrightarrow A \cdot B \in M_{mk}(\mathbb{R}):$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \ldots + a_{1n}b_{n2} & \ldots \\ a_{21}b_{11} + \ldots + a_{2n}b_{n1} & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$$

# Примери

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$ није дефинисан!
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 7 & 4 & 12 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}}$

множење матрица

није комутативно!

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}$$

# Јединична матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad E = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}}_{\text{јединична матрица}} :$$

## Јединична матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}:$$

јединична матрица

$$A \cdot E = A = E \cdot A$$

# Инверз матрице

Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ има инверз ако $\det A \neq 0$. Такве матрице називамо регуларне матрице и њихов скуп чини групу (у односу на множење матрица) коју означавамо са $GL_n(\mathbb{R})$.

## Пример 3

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

# Нилпотентне матрице

## Дефиниција 2.2

Матрица $A$ је нилпотентна ако је $A \neq 0$ и постоји $k \in \mathbb{N}$ такав да је $A^k = 0$.

## Пример 4

$$A = \begin{pmatrix} -a & -\frac{a^2}{b} \\ b & a \end{pmatrix}, \quad b \neq 0$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Скаларни производ

## Дефиниција 3.1 (Скаларни производ)

$$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}: \quad \vec{v} \cdot \vec{u} := |\vec{v}|\,|\vec{u}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}),$$

# Скаларни производ

## Дефиниција 3.1 (Скаларни производ)

$$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}: \quad \vec{v} \cdot \vec{u} := |\vec{v}|\,|\vec{u}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}),$$

Примене скаларног производа:

- Дужине:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}};$$

- Углови:

$$\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}|\,|\vec{u}|}$$

- Пројекција вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{u}$:

$$pr_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|}$$

# Особине скаларног производа

**Теорема 3.1 (Особине скаларног производа)**

Нека су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи:

# Особине скаларног производа

**Теорема 3.1 (Особине скаларног производа)**

Нека су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, симетричност

# Особине скаларног производа

**Теорема 3.1 (Особине скаларног производа)**

Нека су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, симетричност
- $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{w})$, линеарност

# Особине скаларног производа

**Теорема 3.1 (Особине скаларног производа)**

Нека су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, симетричност
- $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{w})$, линеарност
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$, ненегативност

# Особине скаларног производа

**Теорема 3.1 (Особине скаларног производа)**

Нека су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, симетричност
- $\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{w})$, линеарност
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$, ненегативност
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ ако и само ако је $\vec{u} = \vec{0}$. недегенерисаност

# Скаларни производ у ортонормираној бази

- Ортонормирана база = база $e = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}) : \ \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij}$.
- $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$, $\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{u} &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \\ &= (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = [v]_e^T \cdot [u]_e \end{aligned}$$

# Скаларни производ у ортонормираној бази

- Ортонормирана база = база $e = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}) : \ \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij}$.
- $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n$, $\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \ldots + u_n e_n$:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{u} &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n \\ &= (v_1, \ldots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = [v]_e^T \cdot [u]_e \end{aligned}$$

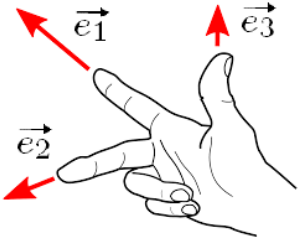
### Пример 5

Дати су вектори $\vec{v} = (1, -2, 2)$ и $\vec{u} = (-3, 0, 4)$ из $\mathbb{V}^3$ својим координатама у ортонормираној бази. Одредити:
(а) $|\vec{v}|$; (б) $\angle(\vec{v}, \vec{u})$.

# Оријентација простора

Базе $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ је позитивне оријентације ако важи правило руке:

> „ако испружени кажипрст десне руке представља вектор $\overrightarrow{e_1}$, средњи прст вектор $\overrightarrow{e_2}$, а палац вектор $\overrightarrow{e_3}$, онда је база $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ позитивне оријентације".



# Векторски производ

## Дефиниција 3.2 (Векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3 : \quad \vec{v} \times \vec{u} := \vec{w}$, где je $\vec{w}$ вектор који има:

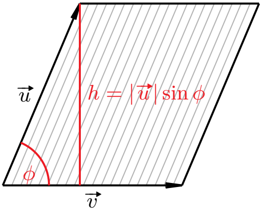
- Интензитет: $|\vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{u}| \sin \angle(\vec{v}, \vec{u})$;
- Правац: $\vec{w} \perp \vec{v},\ \vec{u}$;
- Смер: База $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ је позитивне оријентације.

# Векторски производ

## Дефиниција 3.2 (Векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3 : \quad \vec{v} \times \vec{u} := \vec{w}$, где је $\vec{w}$ вектор који има:

- Интензитет: $|\vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{u}| \sin \angle(\vec{v}, \vec{u})$;
- Правац: $\vec{w} \perp \vec{v},\ \vec{u}$;
- Смер: База $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ је позитивне оријентације.




Слика 5: $|\vec{v} \times \vec{u}| = P_{(\vec{v}, \vec{u})}$

# Особине векторског производа

## Последица 3.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}$ простора $\mathbb{V}^3$ су линеарно независни ако и само ако $\vec{v} \times \vec{u} \neq \vec{0}$.

# Особине векторског производа

## Последица 3.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}$ простора $\mathbb{V}^3$ су линеарно независни ако и само ако $\vec{v} \times \vec{u} \neq \vec{0}$.

## Теорема 3.2 (Особине векторског производа)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, антисиметричност
- $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \times \vec{w} = \alpha(\vec{u} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{w})$. линеарност

# Особине векторског производа

## Последица 3.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}$ простора $\mathbb{V}^3$ су линеарно независни ако и само ако $\vec{v} \times \vec{u} \neq \vec{0}$.

## Теорема 3.2 (Особине векторског производа)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, антисиметричност
- $(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \times \vec{w} = \alpha(\vec{u} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{w})$. линеарност

## Теорема 3.3 (Двоструки векторски производ)

$$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3 : \quad \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w}.$$

# Особине векторског производа

### Последица 3.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}$ простора $\mathbb{V}^3$ су линеарно независни ако и само ако $\vec{v} \times \vec{u} \neq \vec{0}$.

### Теорема 3.2 (Особине векторског производа)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, антисиметричност
- $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \times \vec{w} = \alpha(\vec{u} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{w})$. линеарност

### Теорема 3.3 (Двоструки векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3 : \quad \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w}.$

Теорема 3.3 $\Longrightarrow$ векторски производ није асоцијативан.

# Векторски производ у ортонормираној бази

- $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ – ортонормирана база позитивне оријентације

| $\times$ | $\vec{e_1}$ | $\vec{e_2}$ | $\vec{e_3}$ |
|---|---|---|---|
| $\vec{e_1}$ | $\vec{0}$ | $\vec{e_3}$ | $-\vec{e_2}$ |
| $\vec{e_2}$ | $-\vec{e_3}$ | $\vec{0}$ | $\vec{e_1}$ |
| $\vec{e_3}$ | $\vec{e_2}$ | $-\vec{e_1}$ | $\vec{0}$ |

# Векторски производ у ортонормираној бази

- $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ – ортонормирана база позитивне оријентације

| $\times$ | $\overrightarrow{e_1}$ | $\overrightarrow{e_2}$ | $\overrightarrow{e_3}$ |
|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{e_1}$ | $\overrightarrow{0}$ | $\overrightarrow{e_3}$ | $-\overrightarrow{e_2}$ |
| $\overrightarrow{e_2}$ | $-\overrightarrow{e_3}$ | $\overrightarrow{0}$ | $\overrightarrow{e_1}$ |
| $\overrightarrow{e_3}$ | $\overrightarrow{e_2}$ | $-\overrightarrow{e_1}$ | $\overrightarrow{0}$ |

- $\overrightarrow{v} = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3, \ \overrightarrow{u} = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} &= (v_2u_3 - v_3u_2)\,\overrightarrow{e_1} + (v_3u_1 - v_1u_3)\,\overrightarrow{e_2} + (v_1u_2 - v_2u_1)\,\overrightarrow{e_3} \\ &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

# Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

# Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2: \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =: D_{ABC}\,\vec{e}_3.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\,|D_{ABC}|;$

# Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} |D_{ABC}|$;
- $A, B, C$ – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0$;

# Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}|D_{ABC}|$;
- $A, B, C$ – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0$;
- $\triangle ABC$ – позитивно оријентисан ако $D_{ABC} > 0$.

# Примене векторског производа

$A, B, C \in \mathbb{E}^2: \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} |D_{ABC}|$;
- $A, B, C$ – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0$;
- $\triangle ABC$ – позитивно оријентисан ако $D_{ABC} > 0$.

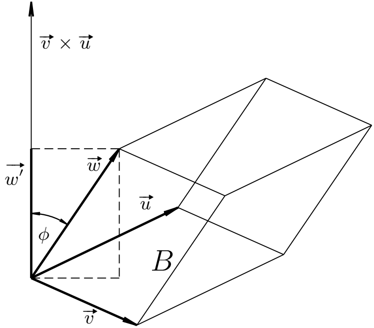
### Пример 6

Одредити површину $\triangle ABC$, $A(1,3)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$.

# Мешовити производ

## Дефиниција 3.3 (Мешовити производ)

$$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3: \quad [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] := (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}.$$




Слика 6: $|[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]| = V_{(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})}$

# Мешовити производ и оријентација простора

**Последица 3.2**

Вектори $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ су линеарно независни ако и само ако:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0.$$

# Мешовити производ и оријентација простора

## Последица 3.2

Вектори $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ су линеарно независни ако и само ако:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0.$$

## Последица 3.3

Вектори $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ простора, чине базу позитивне оријентације ако је $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] > 0$, а негативне оријентације ако је $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] < 0$.

# Особине мешовитог производа

**Теорема 3.4 (Особине мешовитог производа)**

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, антисиметричност
- $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$, цикличност
- $[\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = \alpha[\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}] + \beta[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}]$. линеарност

# Особине мешовитог производа

## Теорема 3.4 (Особине мешовитог производа)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

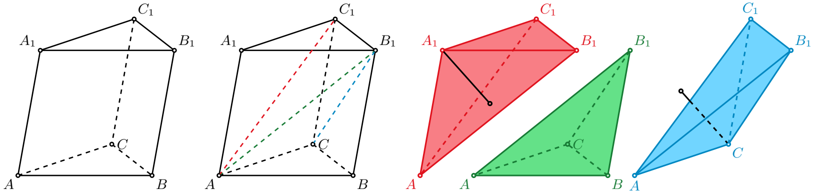
- $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, антисиметричност
- $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$, цикличност
- $[\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = \alpha[\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}] + \beta[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}]$. линеарност

У ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

# Примене мешовитог производа

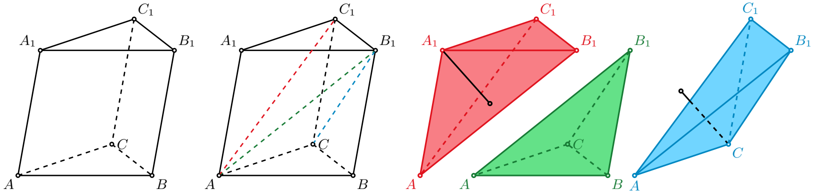
Запремина тетраедра $ABCA_1$ једнака је шестини запремине паралелепипеда одређеног векторима $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.




Слика 7: Подела тростране призме на три пирамиде истих запремина

# Примене мешовитог производа

Запремина тетраедра $ABCA_1$ једнака је шестини запремине паралелепипеда одређеног векторима $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.




Слика 7: Подела тростране призме на три пирамиде истих запремина

## Пример 7

Одредити запремину тетраедра чија су темена $A(1,0,0)$, $B(3,4,6)$, $C(0,1,0)$, $D(1,1,3)$.