УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Математика 1 – физичка хемија

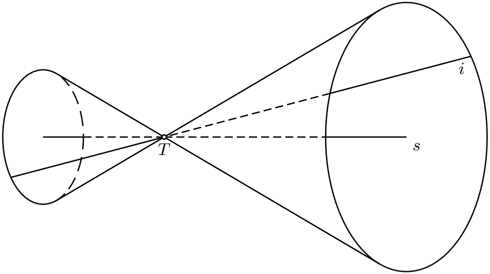
Конусни пресеци

Тијана Шукиловић

8. новембар 2016

Конус

Нека су i и s две праве у простору које се секу у тачки T. Кружни конус са теменом T је површ која се добија ротацијом праве i око осе s.
Ротирана права i (у разним положајима) назива се изводница конуса, а права s се назива оса конуса.



Слика 1: Кружни конус

Конусни пресек

Дефиниција 1.1

Конусни пресек је пресек конуса са произвољном равни α. Коника је пресек конуса са равни α која НЕ садржи теме конуса.

Конике:

- круг;
- елипса;
- хипербола;
- парабола.

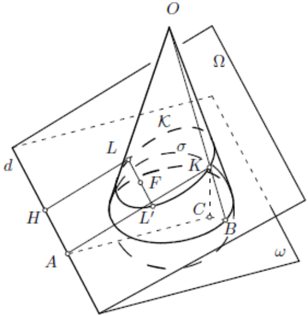
Конике

Теорема 1.1

У равни α конике постоје права d и тачка F такве да је однос растојања

$$\frac{MF}{d(M,d)} = e = const$$

произвољне тачке M конике од тачке F и праве d константан.

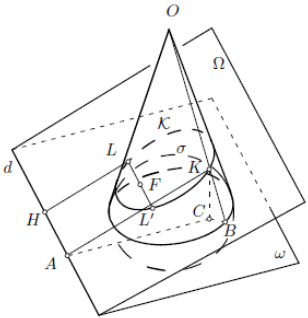


Слика: Коника

Конике

Доказ:

- σ – сфера уписана у конус
- ω – раван којој припада круг додира сфере и конуса
- Ω – раван која додирује сферу у тачки F
- $\mathcal{K}$ – коника у равни Ω
- d – пресек равни Ω и ω

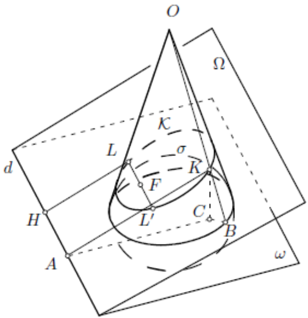


Слика: Коника

Конике

Доказ:

- $K \in \mathcal{K}$
- $A \in d: \ AK \perp d$
- $B = OK \cap \omega$
- $C \in \omega : CK \perp \omega$
- $\alpha = \angle(\Omega, \omega)$
- $\beta = \angle(KB, \omega)$



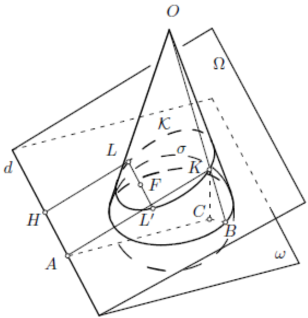
Слика: Коника

Конике

Доказ:

- $KB = \dfrac{KC}{\sin\beta}$
- $KA = \dfrac{KC}{\sin\alpha}$
- $KF \cong KB$ (тангентне дужи из K на σ):

$$\frac{KF}{KA} = \frac{KB}{KA} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = e$$



Слика: Коника

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.2

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике,

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.2

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике,

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.2

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа,

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.2

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа, а права d директриса конике.

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.2

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа, а права d директриса конике.

Ексцентрицитет одређује тип конике:

- за $e = 0$ – круг;
- за $0 < e < 1$ – елипса;
- за $e = 1$ – парабола;
- за $e > 1$ – хипербола.

Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
    - Земља: $e = 0.0167$
    - Јупитер: $e = 0.048775$
    - Халејева комета: $e = 0.995$

Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
  - Земља: $e = 0.0167$
  - Јупитер: $e = 0.048775$
  - Халејева комета: $e = 0.995$
- Путања косог хица је парабола.

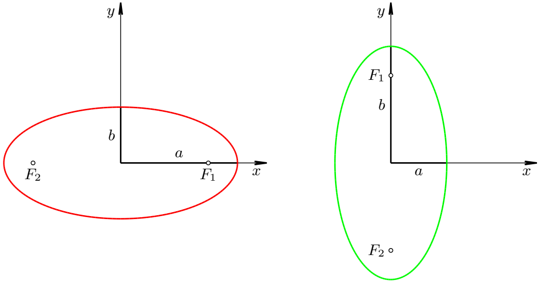
Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
  - Земља: $e = 0.0167$
  - Јупитер: $e = 0.048775$
  - Халејева комета: $e = 0.995$
- Путања косог хица је парабола.
- Сунчева сенка врха штапа у току дана је коника.

Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
  - Земља: $e = 0.0167$
  - Јупитер: $e = 0.048775$
  - Халејева комета: $e = 0.995$
- Путања косог хица је парабола.
- Сунчева сенка врха штапа у току дана је коника.
- Сенка кружног предмета на раван зид је коника.

Елипса



Слика 3: Елипса $(a > b)$ – лево, $(a < b)$ – десно

Канонска једначина елипсе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Елементи елипсе

- $a, b > 0$ – полуосе елипсе;

Елементи елипсе

- $a, b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;

Елементи елипсе

- $a, b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;

Елементи елипсе

- $a, b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет елипсе.

Елементи елипсе

- $a, b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет елипсе.

За $a = b$ елипса je круг.

Елементи елипсе

- $a, b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \frac{a}{e}$, $d_2 : x = -\frac{a}{e}$ – директрисе елипсе;
- $e = \frac{c}{a}$ – ексцентрицитет елипсе.

За $a = b$ елипса је круг.

Једначина тангенте у тачки (x_0, y_0) елипсе:

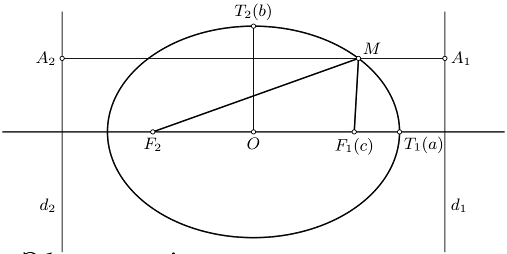
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Особине елипсе

Теорема 1.1

Збир растојања произвољне тачке елипсе од њених жижа је константан:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$



Слика 4: Збир растојања тачке елипсе од њених жижа

Параметарска једначина круга/елипсе

- Параметарска једначина круга:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

r је полупречник круга, θ је угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе.

Параметарска једначина круга/елипсе

- Параметарска једначина круга:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

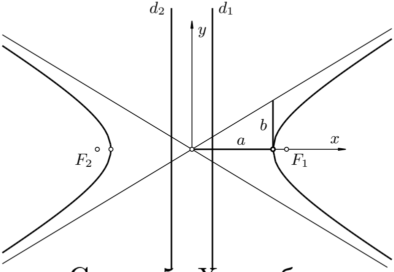
  r је полупречник круга, θ је угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе.

- Параметарска једначина елипсе:

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

  a, b су полуосе елипсе, али θ НИЈЕ угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе.

Хипербола

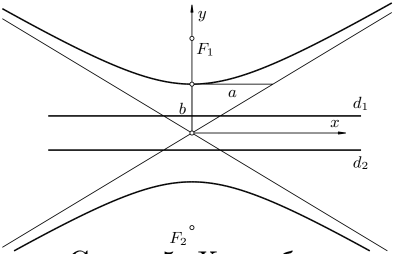


Слика 5: Хипербола

Канонска једначина хиперболе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \quad 1.$$

Хипербола



Слика 5: Хипербола

Канонска једначина хиперболе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе;
- $a_1 : y = \dfrac{b}{a}x$, $a_2 : y = -\dfrac{b}{a}x$ – асимптоте хиперболе

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \frac{a}{e}$, $d_2 : x = -\frac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;
- $e = \frac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе;
- $a_1 : y = \frac{b}{a}x$, $a_2 : y = -\frac{b}{a}x$ – асимптоте хиперболе

Једначина тангенте у тачки (x_0, y_0) хиперболе:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

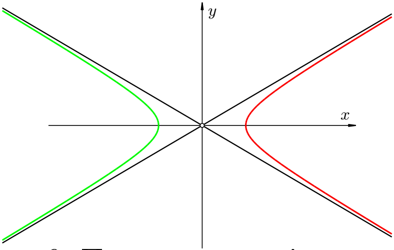
Особине хиперболе

Теорема 1.2

Апсолутна вредност разлике растојања произвољне тачке хиперболе од њених жижа је константан:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

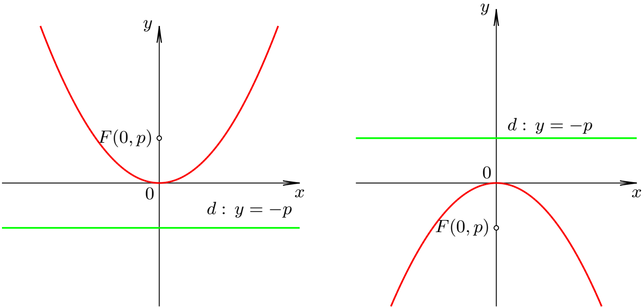
Параметризација хиперболе



Слика 6: Параметризација хиперболе

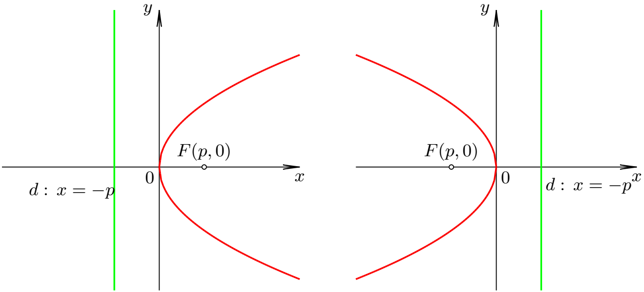
$$x = +a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$
$$x = -a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

Парабола



Слика 7: Парабола: $x^2 = 4py$ за $p > 0$ – лево, $p < 0$ – десно

Парабола



Слика 7: Парабола: $y^2 = 4px$ за $p > 0$ – лево, $p < 0$ – десно

Елементи параболе $y^2 = 4px$, $p > 0$

- p – параметар параболе;
- $F(p, 0)$ – жижа параболе;
- $d:\ x = -p$ – директриса параболе.
- o – оса параболе (овде: x-оса)
- T – теме параболе (овде: O)

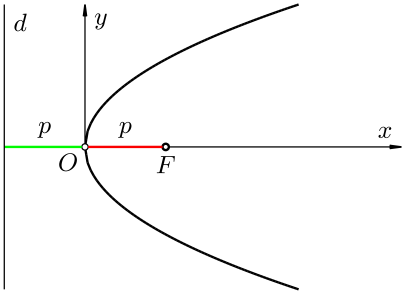
Једначина тангенте у тачки (x_0, y_0) параболе:

$$yy_0 = 2p(x + x_0).$$

Особина параболе

Последица 1.1

Свака тачка M параболе је једнако удаљена од жиже и од директрисе параболе.



Слика 8: Парабола

Параметризација параболе

Стандардна параметризација:

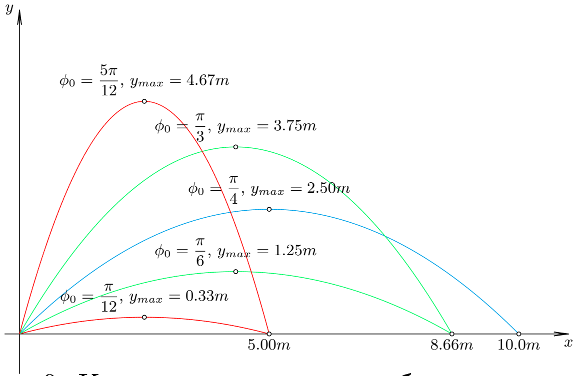
$$x = \frac{t^2}{p}, \quad y = 2t, \quad t \in \mathbb{R},$$

Једначина косог хица:

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos\phi_0)t, \;\; t \geq 0 \\ y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin\phi_0)t + h, \;\; t \geq 0, \end{aligned}$$

где је v_0 почетна брзина, h висина, а ϕ_0 угао (у односу на тло) под којим се хитац испаљује. Са g је означено гравитационо убрзање.

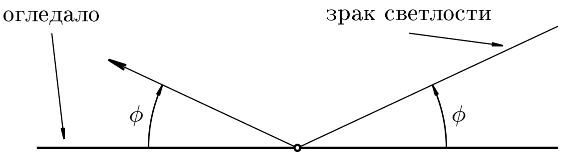
Коси хитац



Слика 9: Коси хици са почетном брзином $v_0 = 10\frac{m}{s}$, за углове $\phi_0 = \frac{k\pi}{12}$, $k = 1, \ldots, 5$

Закон одбијања светлости

Светлост се одбија од глатке површине тако да је упадни угао зрака светлости једнак одбојном углу.

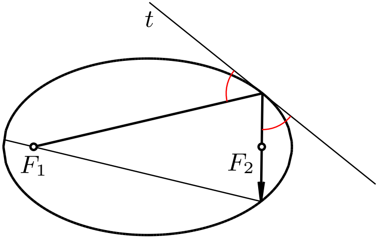


Слика 10: Закон одбијања светлости

Оптичка особина елипсе

Теорема 2.1

Светлосни зрак који извире из жиже елипсе и одбија се од елипсе, пролази кроз другу жижу елипсе.

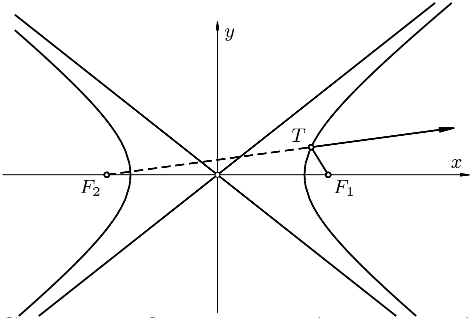


Слика 11: Оптичка особина елипсе

Оптичка особина хиперболе

Теорема 2.2

Светлосни зрак који извире из жиже хиперболе и одбија се од хиперболе, колинеаран је са другом жижом хиперболе.

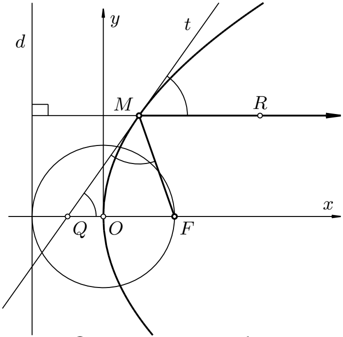


Слика 12: Оптичка особина хиперболе

Оптичка особина параболе

Теорема 2.3

Светлосни зрак који извире из жиже параболе одбија се од параболе паралелно њеној оси.



Слика 13: Оптичка особина параболе

Криве другог реда

Дефиниција 3.1

Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате (x, y) задовољавају једначину другог степена:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Криве другог реда

Дефиниција 3.1

Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате (x, y) задовољавају једначину другог степена:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Колико год претходна једначина изгледала компликовано, може се показати да она геометријски описује елипсу, хиперболу, параболу или неку једноставну „дегенерисану” криву.

Свођење криве на канонски облик

Теорема 3.1

За сваку криву другог реда постоји нови координатни систем у ком она има тачно једну од следећих једначина:

$$
\begin{array}{llr}
(E) & \dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = 1, & \text{(елипса)} \\
(H) & \dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2} = 1, & \text{(хипербола)} \\
(P) & y''^2 = 4px'', & \text{(парабола)}
\end{array}
$$

Свођење криве на канонски облик

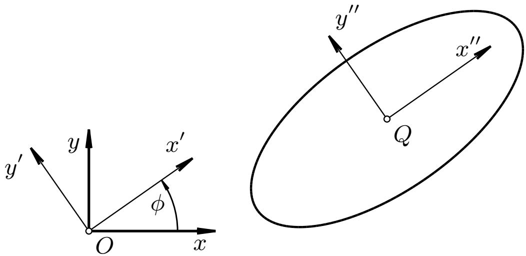
Теорема 3.1

За сваку криву другог реда постоји нови координатни систем у ком она има тачно једну од следећих једначина:

$$
\begin{array}{lll}
(D1) & \dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = -1, & \text{(празан скуп или имагинарна елипса)} \\
(D2) & \dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = 0, & \text{(тачка)} \\
(D3) & \dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2} = 0, & \text{(две праве које се секу)} \\
(D4) & x''^2 = a^2, & \text{(две паралелне праве)} \\
(D5) & x''^2 = 0, & \text{(„двострука” права)} \\
(D6) & x''^2 = -a^2 & \text{(празан скуп).}
\end{array}
$$

где је $p > 0$, $a, b > 0$ и $a \geq b$ за $(E), (D1), (D2)$ и $(D3)$.

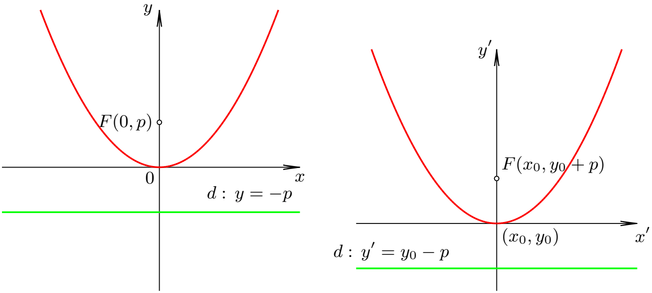
Свођење криве на канонски облик



Слика 14: Свођење елипсе на канонски облик

- транслација
- ротација

Свођење криве на канонски облик транслацијом



Слика 15: Транслација параболе

$$x' = x + x_0, \qquad y' = y + y_0$$

Свођење криве на канонски облик ротацијом

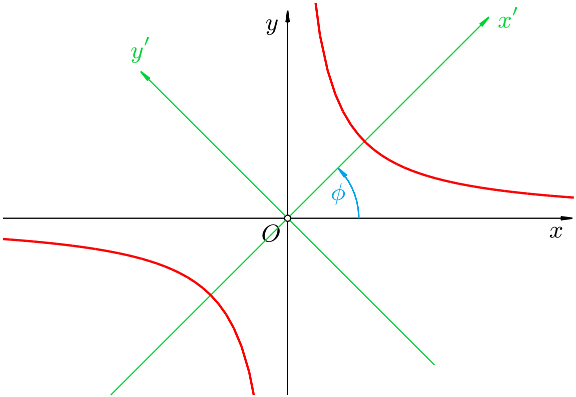
$$x = \cos\phi\, x' - \sin\phi\, y', \qquad y = \sin\phi\, x' + \cos\phi\, y'$$

$$\cot 2\phi = \frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \phi \in [0, \frac{\pi}{2})$$

$$\cos 2\phi = \frac{\cot 2\phi}{+\sqrt{1 + \cot^2 2\phi}}$$

$$\cos\phi = +\sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}}, \qquad \sin\phi = +\sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}$$

Ротација хиперболе



Слика 16: Хипербола $xy = 1$