УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Математика 1 – физичка хемија

Аналитичка геометрија у простору

Тијана Шукиловић

6. новембар 2016

Имплицитна једначина равни

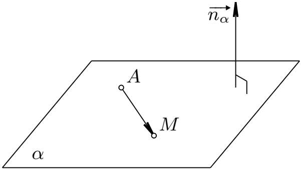
Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и нормалним вектором равни $\overrightarrow{n_\alpha}$.

Имплицитна једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и нормалним вектором равни $\overrightarrow{n_\alpha}$.

$$M(x,y,z) \in \alpha \Longrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n_\alpha}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{n_\alpha} \circ \overrightarrow{AM} \\ &= (a,b,c) \circ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \\ &= ax + by + cz \underbrace{-ax_0 - by_0 - cz_0}_{d} \end{aligned}$$



Слика 1: Имплицитна једначина равни

Нормализована једначина равни

Имлицитна једначина равни:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$$

Нормализована једначина равни

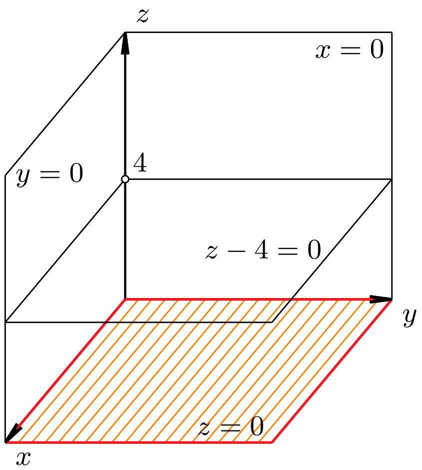
Имлицитна једначина равни:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$$

Нормализована једначина равни:

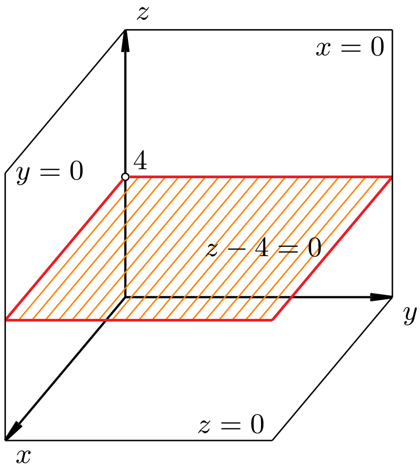
$$ax + by + cz + d = 0, \quad |\overrightarrow{n_\alpha}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Примери



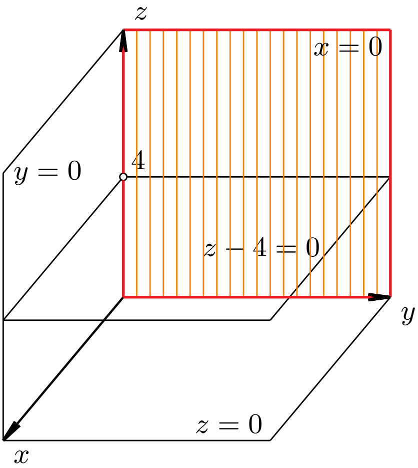
Слика 2: Раван $z = 0$

Примери



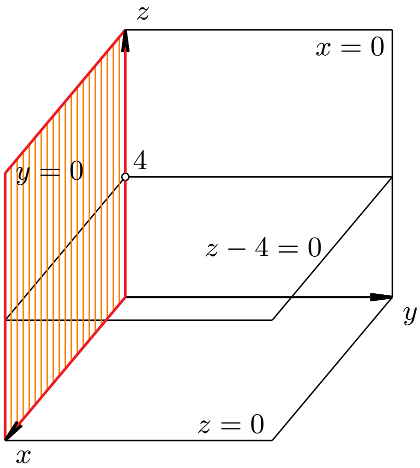
Слика 2: Раван $z - 4 = 0$

Примери



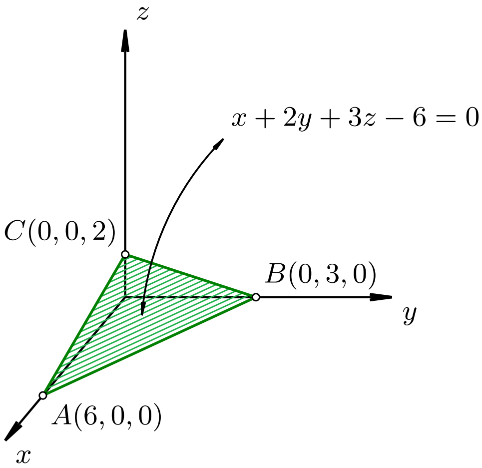
Слика 2: Раван $x = 0$

Примери



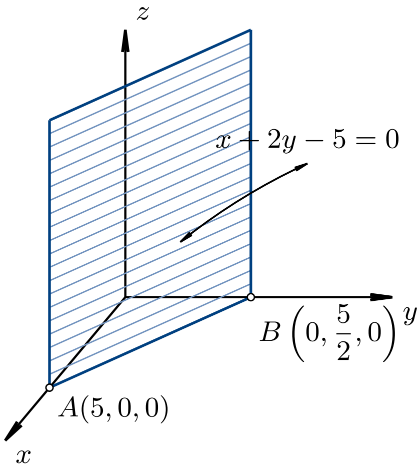
Слика 2: Раван $y = 0$

Пример – скицирати раван



Слика 3: Раван $x + 2y + 3z - 6 = 0$

Пример – скицирати раван



Слика 3: Раван $x + 2y - 5 = 0$

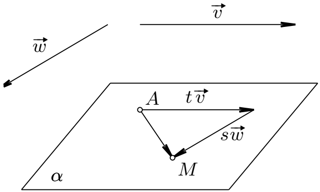
Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора $\vec{v}$, $\vec{u}$ паралелна α.

Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора $\vec{v}$, $\vec{u}$ паралелна α.

$$M(t,s) = M = A + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$



Слика 4: Параметарска једначина равни

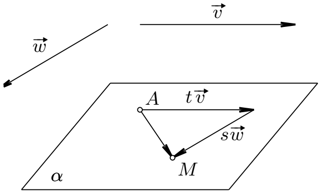
Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора $\vec{v}$, $\vec{u}$ паралелна α.

$$M(t,s) = M = A + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Параметарска једначина равни:

$$x = x_0 + tv_x + sw_x,$$
$$y = y_0 + tv_y + sw_y,$$
$$z = z_0 + tv_z + sw_z, \quad t, s \in \mathbb{R}$$



Слика 4: Параметарска једначина равни

Прелазак из једног облика равни у други

Параметарски $\longrightarrow$ имплицитни:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (a, b, c)$$

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 = -\overrightarrow{n_\alpha} \circ \overrightarrow{OA}$$

Прелазак из једног облика равни у други

Параметарски $\longrightarrow$ имплицитни:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (a, b, c)$$

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 = -\overrightarrow{n_\alpha} \circ \overrightarrow{OA}$$

Имплицитни $\longrightarrow$ параметарски:

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \text{ – произвољан}$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{v}$$

$$a \neq 0 : A\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$$

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \\ z &= z_0 + tp_z, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\overrightarrow{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\overrightarrow{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве:

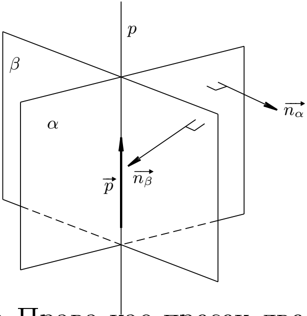
$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \\ z &= z_0 + tp_z, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Канонска једначина праве:

$$\frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y} = \frac{z - z_0}{p_z}.$$

Права као пресек две равни

$$\left.\begin{array}{l}\alpha:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ \beta:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \overrightarrow{p}=\overrightarrow{n_\alpha}\times\overrightarrow{n_\beta}$$



Слика 5: Права као пресек две равни

Примери

Пример 1

Праву $p: x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$ записати параметарски.

Пример 2

Праву $p: x = t + 4,\ y = -2t + 1,\ z = 3t - 2,\ t \in \mathbb{R}$ записати као пресек две равни.

Пример 3

Одредити једначину праве која садржи тачке $A(1, 2, 3)$ и $B(3, 2, 1)$.

Прамен равни

Теорема 1.1

Скуп свих равни које садрже праву $p = \alpha \cap \beta$ је дат једначином:

$$\gamma : \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Прамен равни

Теорема 1.1

Скуп свих равни које садрже праву $p = \alpha \cap \beta$ је дат једначином:

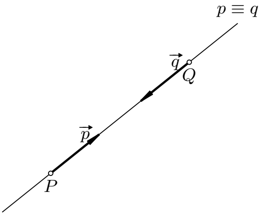
$$\gamma : \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 4

Одредити једначину равни која садржи тачку $M(1, 4, -2)$ и праву $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

Међусобни положаји две праве

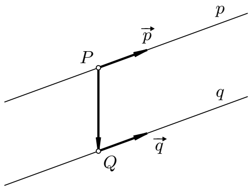


Слика 6: Праве које се поклапају

$\boxed{\vec{p} \quad \vec{q} \quad \overrightarrow{PQ}}$

колинеарни

Међусобни положаји две праве

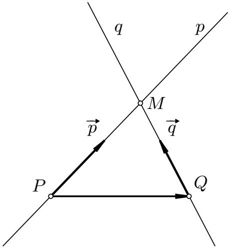


Слика 6: Паралелне праве

$\boxed{\vec{p} \quad \vec{q}}$ $\boxed{\overrightarrow{PQ}}$

колинеарни неколинеаран

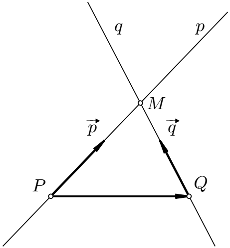
Међусобни положаји две праве



Слика 6: Праве које се секу

$\underbrace{\vec{p} \quad \vec{q}}_{\text{неколинеарни}} \qquad \overrightarrow{PQ}$

Међусобни положаји две праве

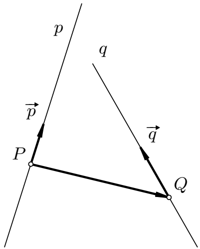


Слика 6: Праве које се секу

$$\boxed{\vec{p} \quad \vec{q} \quad \overrightarrow{PQ}}$$

копланарни

Међусобни положаји две праве



Слика 6: Мимоилазне праве

$\boxed{\vec{p} \quad \vec{q} \quad \overrightarrow{PQ}}$

некопланарни

Пример 5

Одредити међусобни положај правих:

(а) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-19}{5} = \dfrac{z-2}{1}, \quad q : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{4};$

(б) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1}, \quad q : 2x = y,\ 3x = z;$

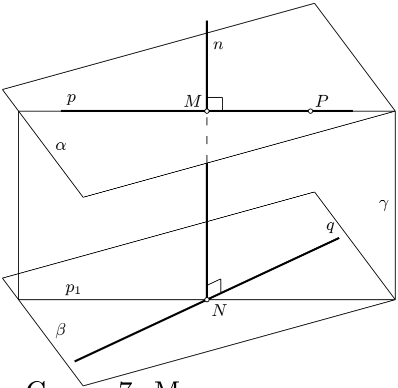
(в) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1}, \quad q : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-1};$

(г) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1}, \quad q : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+7}{2}.$

Мимоилазне праве

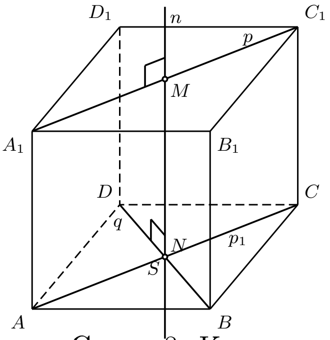
Теорема 2.1

Мимоилазне праве p и q имају јединствену заједничку нормалу, тј. праву која сече обе праве и нормална је на њих.



Слика 7: Мимоилазне праве

Примери



Слика 8: Коцка

Пример 6

Дијагонале наспрамних пљосни коцке су мимоилазне праве, а њихова заједничка нормала је одређена средиштима тих дијагонала.

Међусобни положаји праве и равни

Права p и раван α могу да:

- се секу;
- буду паралелне;
- права припада равни.

Међусобни положаји праве и равни

Права p и раван α могу да:

- се секу;
- буду паралелне;
- права припада равни.

Пример 7

Одредити међусобни положај праве $p : \dfrac{x+4}{-3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ и равни $\alpha : x - 2y + 5z - 1 = 0$.

Међусобни положаји праве и равни

Права p и раван α могу да:

- се секу;
- буду паралелне;
- права припада равни.

Пример 7

Одредити међусобни положај праве $p : \dfrac{x+4}{-3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ и равни $\alpha : x - 2y + 5z - 1 = 0$.

Пример 8

Одредити тачку продора праве $p : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-5}{-4}$ кроз раван $\alpha : 3x + y + 5z - 7 = 0$.

Растојање тачке од праве/равни

Теорема 3.1

Растојање тачке M од праве p задате тачком P и вектором правца P дато је формулом:

$$d = \frac{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{p}|}.$$

Растојање тачке од праве/равни

Теорема 3.1

Растојање тачке M од праве p задате тачком P и вектором правца P дато је формулом:

$$d = \frac{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{p}|}.$$

Теорема 3.2

Растојање тачке $M(x_0, y_0, z_0)$ од равни $\alpha : \ ax + by + cz + d = 0$ дато је формулом:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Примери

Пример 9

Одредити растојање тачке $M(1, 0, 12)$ од:

а) Праве $p: x - y - 1 = 0,\ z - 2x = 0;$

б) Равни $\alpha: x - y - 4z = 0.$

Растојање између мимоилазних правих

Теорема 3.3

Растојање између мимоилазних правих p и q дато је формулом:

$$d = \frac{|[\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}|}.$$

Растојање између мимоилазних правих

Теорема 3.3

Растојање између мимоилазних правих p и q дато је формулом:

$$d = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Пример 10

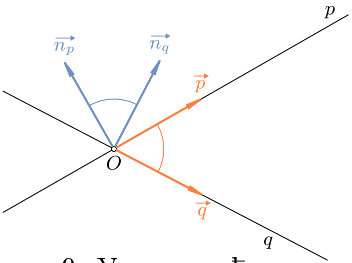
Одредити заједничку нормалну и растојање између мимоилазних правих

$$p : \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0},$$
$$q : \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5}.$$

Углови између правих и равни

- Угао између правих p и q је оштар угао између њихових нормалних вектора/вектора правца.

$$\angle(p,q) = \text{оштар}\angle(\vec{p},\vec{q}) = \arccos\frac{|\vec{p}\circ\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}$$
$$= \text{оштар}\angle(\overrightarrow{n_p},\overrightarrow{n_q}) = \arccos\frac{|\overrightarrow{n_p}\circ\overrightarrow{n_q}|}{|\overrightarrow{n_p}|\cdot|\overrightarrow{n_q}|}$$

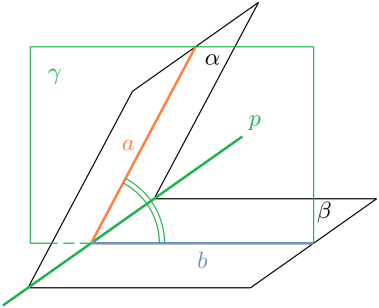


Слика 9: Угао између две праве

Углови између правих и равни

- Угао између равни α и β је оштар угао између правих a и b.

$$\angle(\alpha, \beta) = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_\alpha} \circ \overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|}$$

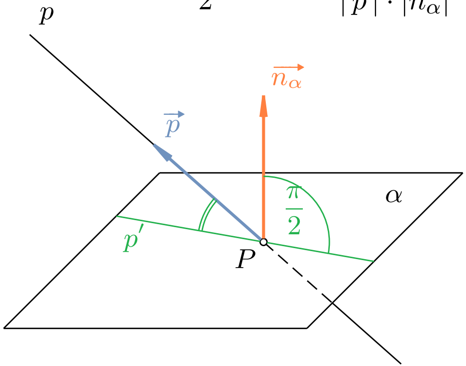


Слика 10: Угао између две равни

Углови између правих и равни

- Угао између праве p и равни α је угао између праве p и њене нормалне пројекције p' на раван α.

$$\angle(p,\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{|\overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{n_\alpha}|}{|\overrightarrow{p}| \cdot |\overrightarrow{n_\alpha}|}$$



Слика 11: Угао између праве и равни

Примери

Пример 11

Одредити тачку продора праве $p : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-5}{-4}$ кроз раван $\alpha : 3x + y + 5z - 7 = 0$.

Колики угао права p заклапа са равни α?