



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

**Паскалова теорема и
 d -конструкибилне криве**

— мастер рад —

Аутор

Јована Ормановић

Ментор

др Тијана Шукиловић

Београд, 2022

Садржај

Увод	2
1 Папосова теорема	5
1.1 Добит преласка са еуклидске на пројективну геометрију	6
1.2 Пројективни докази Папосове теореме	12
1.2.1 Доказ поништавањем детерминанти	13
1.2.2 Доказ Грасман-Пликеровом релацијом	16
1.2.3 Доказ помоћу Чевине теореме	18
2 Паскалова теорема и њене генерализације	23
2.1 Криве другог реда	23
2.2 Паскалова теорема	24
2.3 Криве трећег реда и Безуова теорема	26
2.4 Кејли-Бахарах-Шалова теорема	27
2.5 Мистични $2d$ -тоугао	28
3 Конструктибилне криве	30
3.1 Од Паскалове теореме до d -конструктибилних кривих .	30
3.2 d -конструктибилне криве	33
Закључак	42
Литература	43

Увод

Геометријом су људи почели да се баве још у најранијој историји, а њихово интересовање настало је из практичних потреба. До преокрета у њеном развоју дошло је у старој Грчкој. Она је у VI веку пре н.е. почела да поприма елементе формалне математичке дисциплине, да би у III веку пре н.е. старогрчки математичар Еуклид у свом делу *Елементи* изложио један од првих покушаја њеног аксиоматског заснивања. Како је време даље одмицало она се развијала, а почетком XVIII века ступила је у своје златно доба. Покушаји да се докаже V Еуклидов постулат довели су до настанка нових геометрија. Появила се пројективна геометрија која нам је дала једну потпунију слику о теоремама, попут Папосове и Паскалове, за које се знало да важе у еуклидској геометрији. У овом периоду су откривени и многи фундаментални геометријски концепти који су превазишли Еуклидове *Елементе*. Настала је и нераскидива веза алгебре и геометрије. Немачки математичар Давид Хилберт поставио је геометрију на алгебарске основе и у својој књизи *Основи геометрије* представио систем аксиома којим је попунио празнине у Еуклидовим *Елементима*. Богатство алгебарских структура, и оно што су оне могле да пруже, природно је довело до стварања алгебарске геометрије. У овој области урађено је много, али још увек постоји отворених питања што је чини интересантном и примамљивом за даља истраживања.

Овде ћемо покушати да прикажемо како веома једноставна теорема може бити драгоценна и водити ка проучавању многих напреднијих концепата. У раду ће бити испреплетане идеје и повезане на изглед веома различите области математике, са посебним акцентом на пројективној и алгебарској геометрији. На почетку ћемо размотрити неколико доказа и варијација Папосове теореме. Представићемо различите приступе и методе којим се она може доказати. Већина доказа ће бити алгебарска и засниваће се на превођењу геометријских чињеница у алгебарске идентитетете. Покушаћемо да прикажемо и да је, иако у својој бити скромна (у њеној формулатури се јављају само два елементарна појма - појам тачке и појам праве, као и једна релација - релација инциденције) она почетак низа интересантних теорема и велика покретачка снага у математици. Затим пажњу преусмеравамо на Паскалову теорему коју можемо сматрати њеном генерализацијом. Навешћемо и две генерализације Паскалове теореме, а оне ће нас одвести до теме d -конструктибилних кривих. Крива S степена t је d -конструктибилна ако постоји $d+t$ црвених правих и $d+t$ плавих правих које се секу у $(d+t)^2$ различитих тачака од којих $d(d+t)$ лежи на кривој C степена d , а преосталих $t(d+t)$ на кривој S . Наша пажња биће усмерена на питање: Које су то криве d -конструктибилне и у којим степенима је d -конструктибилност густа.

Истичемо да је први део рада заснован на истраживању Рихтера-Геберта ([10]). У оквиру рада изложено је и неколико доказа помоћу биномног метода¹ представљеног у радовима [12] и [6]. Ово је прави тренутак да нагласимо да су у раду, иако то није у "геометријском" духу, у појединим доказима тачке именоване бројевима. Мотивација за овакав "рачунарски" запис потиче управо из рада [12]. У другом делу рада изложени су резултати из [14].

¹Његова основна идеја је израчунавање израза у којима се појављује производ одређених детерминанти а који су последица хипотеза теореме, као и оних који би могли да изразе закључак, те тражење погодне комбинације првих тако да се одређени пониште остављајући за собом израз који одговара закључку.

Илустрације су креиране коришћењем програмског пакета GeoGebra и дело су аутора.

Посебно се захваљујем свом ментору, др Тијани Шуколовић, уз чију помоћ и савете је овај рад настао. Такође, захваљујем се и члановима комисије проф. др Мирјани Ђорић и проф. др Срђану Вукмировићу на бројим корисним примедбама и сугестијама.

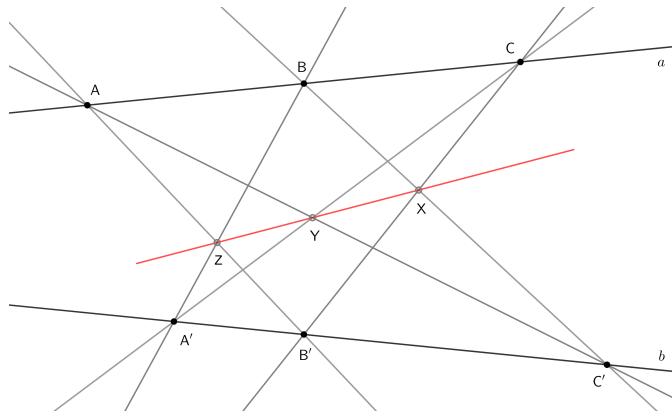
У математици, као и у свакој другој науци, од битног је значаја разматрати "садашње" у вези са "прошлим", јер се "садашње" развило из "прошлог", а исто тако "будуће" ће се развити из "садашњег". Прочиавање "прошлог" је добро средство којим се појми "садашње" и долази до "будућег".

(Путевима развитка математике, др Ернест Стипанић)

1 Папосова теорема

Последњи од античких великана геометрије био је Папос из Александрије (IV век). Његово дело *Колекција* врста је енциклопедије која представља скуп до тадашњих математичких знања и један је од главних извора информација о античкој математици. У овом делу објављена је и теорема која данас носи његово име.

Теорема 1.1 (Папосова теорема) Нека су a и b две праве и нека су A, B и C тачке инцидентне са a , а A', B' и C' тачке инцидентне са b . Тада су тачке $X = BC' \cap B'C$, $Y = AC' \cap A'C$ и $Z = AB' \cap A'B$ колинеарне.



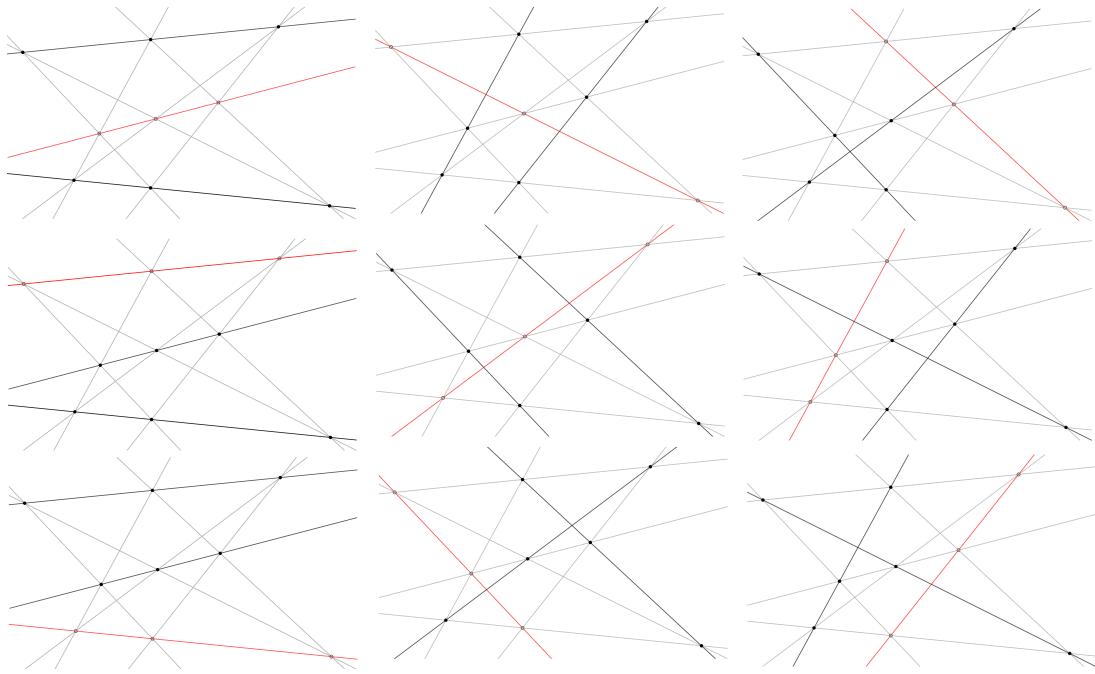
Слика 1.1. Папосова теорема

Напомена 1.1 Права на којој се налазе пресеци X, Y и Z обојена је на слици 1.1 црвеном бојом и њу називамо *Папосова права*.

Мноштво је разлога зашто се Папосова теорема данас може сматрати изузетном. Прво, приступајући јој из разних углова можемо повезати делове математике на изглед веома различите. У то ћемо се и уверити кроз наредне одељке где ћемо размотрити неколико њених доказа и варијација. Затим, једна од упечатљивих карактеристика Папосове теореме је да се у њеној формулатурији јављају само два елементарна појма - појам тачке и појам праве, као и једна релација - релација инциденције. Прецизније, конфигурација Папосове теореме се састоји од тачно девет тачака и тачно девет правих, при чему свака права садржи три тачке и у свакој тачки се секу три праве. Стога се она сматра најмањом теоремом инциденције. Такође, она је и почетак низа интересантних теорема.

Већ овде истичемо да, како бисмо у нашим доказима избегли дегенерисане случајеве, као важну претпоставку уводимо да се никоје две тачке и никоје две праве из Теореме 1.1 не поклапају. Важност увођења ове претпоставке огледа се у томе што она спречава да приликом спровођења алгебарских доказа дођемо у ситуацију дељења нулом на шта нас дегенерисани случајеви приморавају. Уколико нам поред ње буду неопходне и додатне претпоставке њемо у доказима посебно нагласити.

Пре неголи започнемо нашу колекцију доказа и варијација, напоменимо још и да се свака права Теореме 1.1 може узети за Папосову праву. Конкретни примери како можемо изабрати Папосову праву дати су на слици 1.2.



Слика 1.2. Папосова права

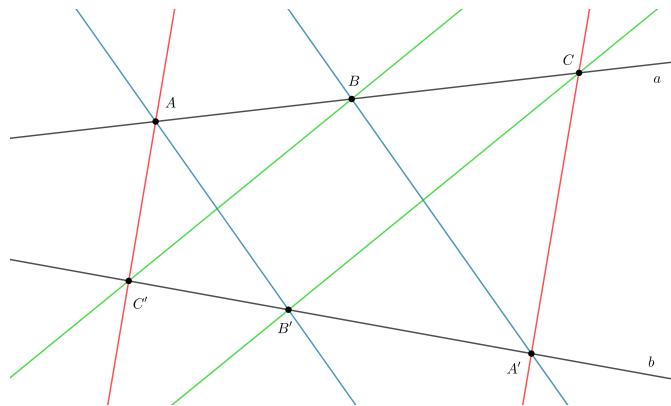
1.1 Добит преласка са еуклидске на пројективну геометрију

Током векова многи математичари су се бавили доказивањем Папосове теореме. Сам Папос је своју теорему доказао користећи методе еуклидске геометрије, а настанком пројективне геометрије у XIX веку, пронађени су и бројни начини да се она докаже њеном применом. Наравно, интересантно је питање која је добит преласка са еуклидске на пројективну геометрије?

Пројективна геометрија настаје када на еуклидску раван додамо бесконачно далеке тачке и бесконачно далеку праву. О томе ћемо детаљније причати у одељку 1.2. Оно што је у овом тренутку за нашу причу важно јесте да се сваки прамен паралелних правих сече у бесконачно далекој тачки, и да све бесконачно далаке тачке формирају бесконачно далеку праву. Дакле, у еуклидској геометрији можемо говорити о правама које се секу и о правама које су паралелне, док у пројективној геометрији за сваке две праве постоји пресечна тачка. Стога, уколико Теорему 1.1 посматрамо у еуклидској геометрији, неопходно је да за сваки пар правих поменут у њеној формулацији постоји пресечна тачка. Међутим, уколико је посматрамо у пројективној геометрији, њена моћ постаје још већа, јер можемо говорити и о пресеку паралелних правих.

Дакле, одговор на поменуто питање јесте да ће Теорема 1.1 важити и у случају да су праве које су у паровима поменуте у њеној формулацији паралелне, а не нужно конкурентне у еуклидском смислу. То нас доводи и до наредног занимљивог случаја еуклидске верзије поменуте теореме.

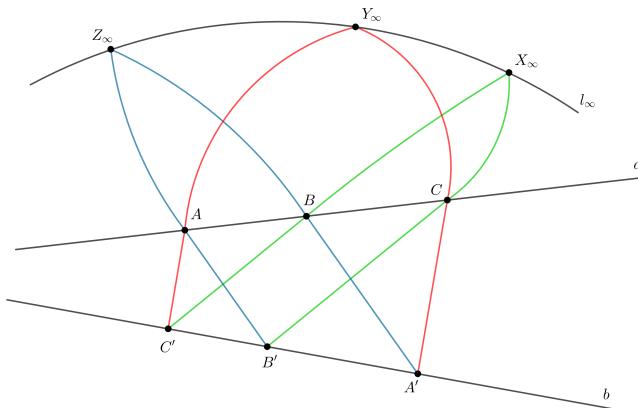
Теорема 1.2 Нека су A , B и C три тачке на правој a и A' , B' и C' три тачке на правој b . Ако је $AB' \parallel BA'$ и $BC' \parallel CB'$, тада је и $AC' \parallel CA'$.



Слика 1.3. Папосова теорема

Дакле, како је $AB' \parallel BA'$ то се ове две праве секу у бесконачно далекој тачки Z_∞ . Слично, како је $BC' \parallel CB'$ то се оне секу у бесконачно далекој тачки X_∞ . Ове две тачке одређују бесконачно далеку праву, те ће она бити *Папосова права* и њој, према Теореми 1.1, мора припадати $Y = AC' \cap CA'$, тј. биће $Y = Y_\infty$. Одакле и важи $AC' \parallel CA'$.

Илустрација претходног разматрања дата је на слици 1.4.



Слика 1.4. Пресек парова паралелних правих у бесконачно далеким тачкама

У наставку представљамо два различита еуклидска доказа Теореме 1.2.

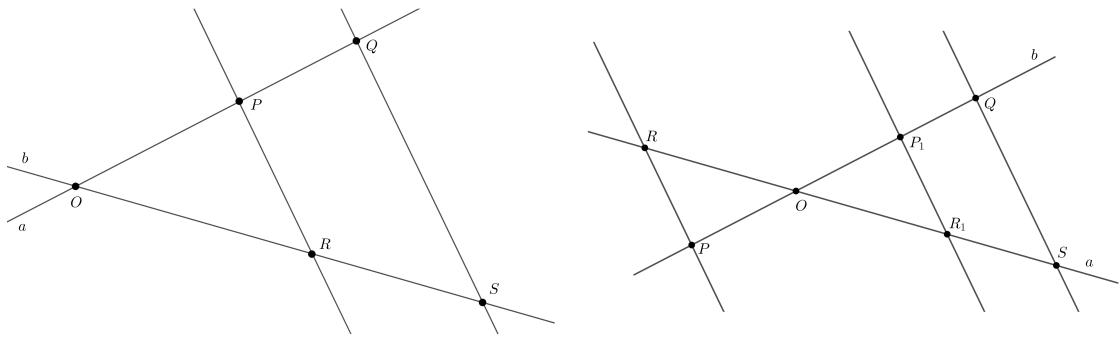
Доказ помоћу Талесове теореме

Теорема 1.3 (Талесова² теорема) Нека су a и b две праве које се секу у тачки O , P и Q две тачке праве a , а R и S две тачке праве b . Тада су PR и QS паралелне ако и само ако важи

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OR}{OS}.$$

Напомена 1.2 Нека су O , X и Y три колинеарне тачке. Однос $\frac{OX}{OY}$ сматрамо позитивним уколико су тачке X и Y са исте стране тачке O , а у супротном негативним.

²Старогрчки филозоф и математичар Талес из Милета (VII-VI век пре н.е.)



Слика 1.5. Талесова теорема

Због значаја Талесове теореме и комплетности излагања наводимо њен доказ.

Доказ: Размотримо најпре случај када тачка O не раздваја пар тачака P и Q , односно R и S (слика 1.5 лево).

Претпоставимо да је $PR \parallel QS$. Висине из темена P троуглова POR и POS се поклапају те важи да је однос површина троуглова једнак односу дужина основица тј.

$$\frac{P_{\Delta POR}}{P_{\Delta POS}} = \frac{OR}{OS}. \quad (1)$$

Ако посматрамо троуглове ROP и ROQ слично добијамо да је

$$\frac{P_{\Delta ROP}}{P_{\Delta ROQ}} = \frac{OP}{OQ}. \quad (2)$$

Даље, како троуглови SQP и QSR имају заједничку ивицу SQ и одговарајућу висину, површине су им једнаке. Одатле следи и да су површине троуглова POS и ROQ једнаке јер представљају допуну троуглова SQP и QSR до троугла SQO . Коначно,

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{P_{\Delta ROP}}{P_{\Delta ROQ}} = \frac{P_{\Delta POR}}{P_{\Delta POS}} = \frac{OR}{OS}.$$

Обрнуто, претпоставимо да је

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OR}{OS}.$$

Из (1) и (2) следи

$$\frac{P_{\Delta ROP}}{P_{\Delta ROQ}} = \frac{P_{\Delta POR}}{P_{\Delta POS}}$$

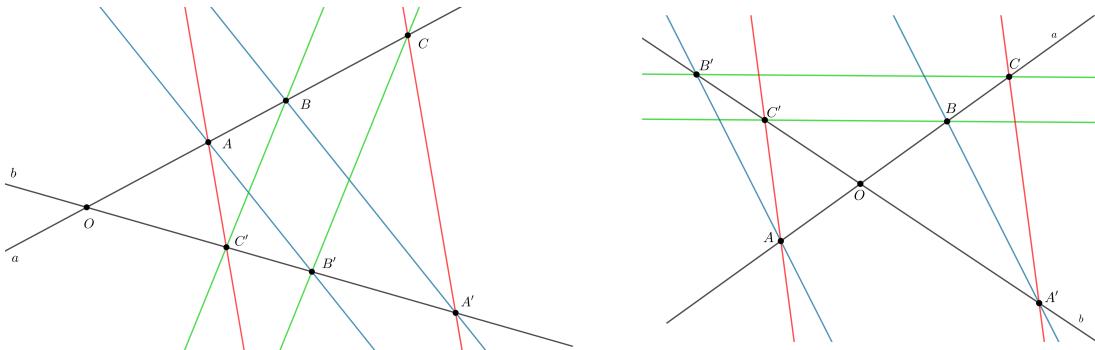
тј. $P_{\Delta ROQ} = P_{\Delta POS}$. Одатле је и $P_{\Delta QSR} = P_{\Delta SQP}$. Коначно, QSR и SQP имају заједничку ивицу SQ те је $PR \parallel QS$.

Нека сада тачка O раздваја пар тачака P и Q , као и пар тачака R и S (слика 1.5 десно). У том случају посматрајмо тачке симетричне тачкама P и R у односу на тачку O и означимо их редом са P_1 и R_1 . Како је $PR \parallel P_1R_1$, $OR = OR_1$ и $OP = OP_1$ доказ следи директно из претходно доказаног случаја.

■

Пређимо сада на доказ Теореме 1.2.

Доказ: Посматрајмо слику 1.6.



Слика 1.6. Папосова теорема – доказ помоћу Талесове теореме

Како је $AB' \parallel BA'$ применом Талесове теореме добијамо да је

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}, \quad (3)$$

а како је $BC' \parallel CB'$ да је

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC'}{OB'}, \quad (4)$$

при томе ниједна од шест тачака теореме није подударна са O , па ниједан од именилаца није нула.

Ако измножимо две леве стране и две десне стране једначина (3) и (4) добијамо

$$\frac{OA}{OB} \frac{OB}{OC} = \frac{OB'}{OA'} \frac{OC'}{OB'}$$

тј.

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC'}{OA'}.$$

Па опет, употребом наведеног тврђења, закључујемо да је $AC' \parallel CA'$. ■

Проблем који се јавља код оваквог доказа је да он у потпуности зависи од постојања тачке O , па у случају када су a и b паралелне и тачка O не постоји, доказ не можемо извести користећи Теорему 1.3. Стога у наставку представљамо доказ који користи само шест значајних тачака Теореме 1.2.

Доказ методом површина

Наведимо најпре неколико чињеница које ће нам бити корисне за наш наредни доказ.

(1) Површина и оријентација троугла

Претпоставимо да је троугао ABC задат у равни координатама темена $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ и $C(x_C, y_C)$. Оријентисана површина троугла ABC је

$$P(A, B, C) := \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \frac{1}{2}((x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)),$$

и она осим информације о површини троугла садржи и информацију о његовој оријентацији.

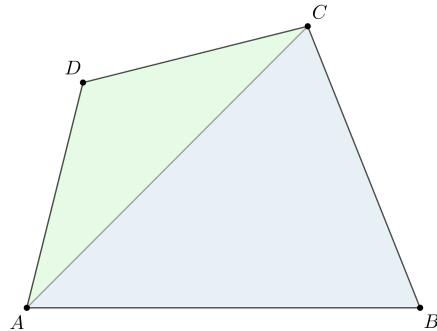
Подсетимо се да је троугао ABC позитивно оријентисан ако је смер обиласка његових темена A, B, C супротан смеру кретања казаљке на сату и тада је $P(A, B, C) > 0$, а у супротном је негативно оријентисан и тада је $P(A, B, C) < 0$.

Напоменимо и да је, ако су A, B и C колинеарне тачке, троугао ABC дегенерисан и његова површина је једнака нули.

(2) Површина и оријентација четвороугла

Како сваки прост четвороугао можемо триангулисати, његову површину можемо израчунати као збир површина троуглова из триангулатије. Дакле, оријентисану површину простог оријентисаног четвороугла $ABCD$ можемо дефинисати на следећи начин:

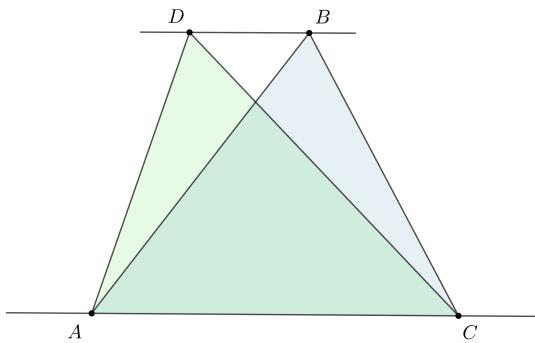
$$P(A, B, C, D) = P(A, B, C) + P(C, D, A).$$



Слика 1.7. Површина простог четвороугла

Ако уместо простог четвороугла посматрамо четвороугао $ABCD$ који има самопресек тада су троуглови ABC и CDA супротне оријентације, те су и $P(A, B, C)$ и $P(C, D, A)$ супротног знака. Приметимо да ће у овом случају површина четвороугла $ABCD$ бити једнака нули ако и само ако троуглови ABC и CDA имају исту површину, а како оба троугла деле ивицу AC они ће имати исте површине ако и само ако су висина из D и висина из B исте дужине, тј. ако су BD и AC паралелне. Дакле,

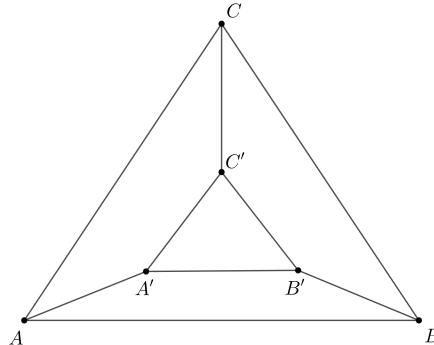
$$BD \parallel AC \iff P(A, B, C, D) = 0.$$



Слика 1.8. Површина четвороугла који има самопресек

Сада, када су нам познате ове чињенице, циљ нам је да докажемо Теорему 1.2.

Доказ: Нека су A, B, C и A', B', C' тачке равни чији положај одговара слици 1.9.



Слика 1.9. Разлагање троугла ABC на троугао $A'B'C'$ и три четвороугла $AA'C'C$, $BB'A'A$ и $CC'B'B$

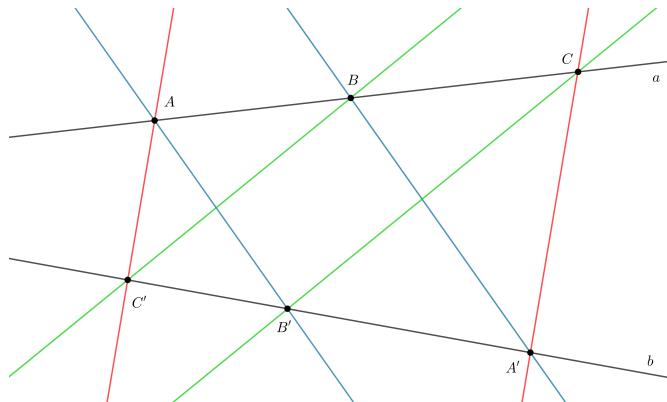
Троугао ABC можемо разложити на три четвороугла $AA'C'C$, $BB'A'A$ и $CC'B'B$ и троугао $A'B'C'$. Збир њихових површина одговара површини троугла ABC . Одатле следи да је

$$P(A, B, C) = P(A, A', C', C) + P(B, B', A', A) + P(C, C', B', B) + P(A', B', C'),$$

тј.

$$P(A, A', C', C) + P(B, B', A', A) + P(C, C', B', B) + P(A', B', C') - P(A, B, C) = 0. \quad (5)$$

Израз са леве стране је полином који не зависи од тачног положаја тачака A, B, C, A', B' и C' , те претходна формула важи за произвољан положај тачака. Стога, нека ових шест тачака одговара тачкама Папосове теореме (слика 1.10).



Слика 1.10. Папосове теореме - доказ методом површина

Како су A, B, C и A', B', C' две тројке колинеарних тачака то је

$$P(A, B, C) = P(A', B', C') = 0,$$

а како је $AB' \parallel BA'$ и $BC' \parallel CB'$ четвороуглови $BB'A'A$ и $CC'B'B$ нису прости, те је

$$P(B, B', A', A) = P(C, C', B', B) = 0.$$

Па је из (5) и

$$P(A, A', C', C) = 0,$$

одакле, пошто $AA'C'C$ није прост, произилази да је $CA' \parallel AC'$. ■

1.2 Пројективни докази Папосове теореме

У овом поглављу Папосову теорему доказујемо у реалној пројективној равни \mathbb{RP}^2 , а један од начина да њу дефинишемо је да уведемо хомогене координате.

Пођимо од еуклидске равни \mathbb{E} . Њу помоћу координатне репрезентације идентификујемо са \mathbb{R}^2 . Дакле, свакој тачки еуклидске равни придржујемо $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, а праве сматрамо скуповима тачака (x, y) које задовољавају имплицитну једначину $u_1x + u_2y + u_3 = 0$. Но, како праву желимо да третирамо као посебан објекат, а не као скуп тачака, можемо је представити преко параметара (u_1, u_2, u_3) , при чему u_1 и u_2 не могу бити истовремено нула. Приметимо и да $(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$ за $\lambda \neq 0$ представља исту праву као и (u_1, u_2, u_3) .

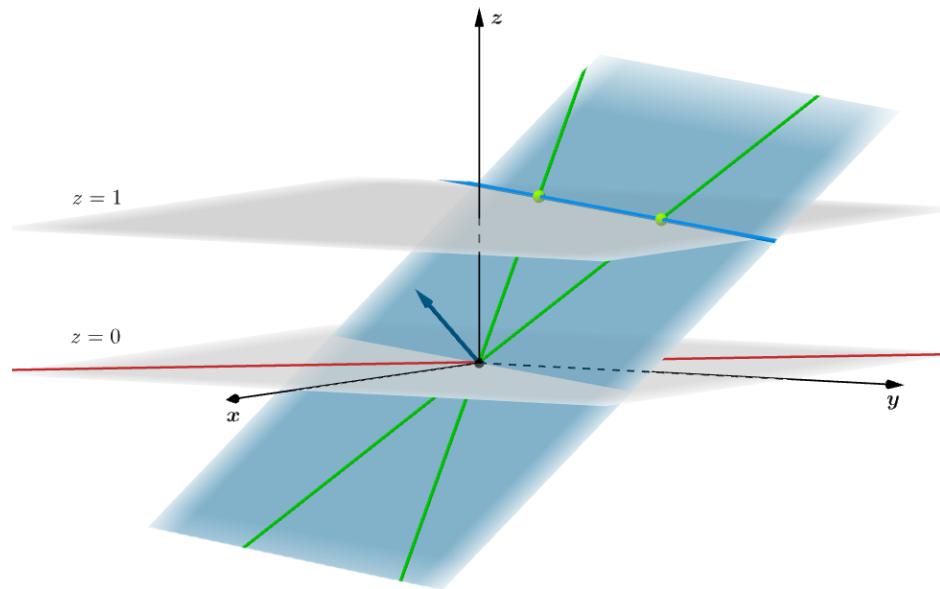
Сместимо сада еуклидску раван \mathbb{E} у \mathbb{R}^3 тако да не садржи координатни почетак, на пример нека је то раван дата једначином $z = 1$.

Сваку тачку еуклидске равни \mathbb{E} идентификујемо са правом која садржи ту тачку и координатни почетак, а за вектор представник те тачке узимамо ма који вектор правца те праве. Дакле, ако посматрамо вектор $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ где је $z \neq 0$ права чији је он вектор правца сече еуклидску раван у тачки $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ тј. у тачки $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) \in \mathbb{E}$. Векторе које овим разматрањем нисмо обухватили су вектори облика $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$. Праве чији су то вектори правца су паралелне равни \mathbb{E} и њихов пресек са равни \mathbb{E} не постоји. То значи да немамо еуклидску тачку коју идентификујемо са том правом. Дакле, вектори овог облика одговарају бесконачно далеким тачкама. Ако тачка има вектор представник (x, y, z) кажемо да та тачка има хомогене координате $(x : y : z)$.

Праву еуклидске равни \mathbb{E} идентификујемо са равни из \mathbb{R}^3 која садржи ту праву и координатни почетак. Дакле, једначина праве у хомогеним координатама ће бити $u_1x + u_2y + u_3z = 0$ и представљамо је са $[u_1 : u_2 : u_3]$. Ако посматрамо ову једначину у \mathbb{R}^3 видимо да је (u_1, u_2, u_3) нормални вектор одговарајуће равни, и он је вектор представник дате праве. Пресек те равни са смештеном еуклидском равни $z = 1$ даје еуклидску једначину праве у равни $u_1x + u_2y + u_3 = 0$. Једини тип вектора коме не одговара еуклидска права је $(0, 0, u_3)$, где је $u_3 \neq 0$. Узмемо ли такав вектор добијамо xy -раван која не сече раван \mathbb{E} . Тада вектор ће одговарати бесконачно далекој правој која садржи све бесконачно далеке тачке.

Дакле, тачке реалне пројективне равни ће бити праве које садрже координатни почетак, док ће праве бити равни које садрже координатни почетак, и све тачке и све праве се могу представити ненула векторима из \mathbb{R}^3 .

На слици 1.11 црвена права представља бесконачно далеку тачку $(x_0 : y_0 : 0)$, зелене праве представљају коначне тачке реалне пројективне равни чије координате имају облик $(x : y : 1)$, а плава раван једну праву реалне пројективне равни.

Слика 1.11. Реализација $R\mathbb{P}^2$ у \mathbb{R}^3

1.2.1 Доказ поништавањем детерминанти

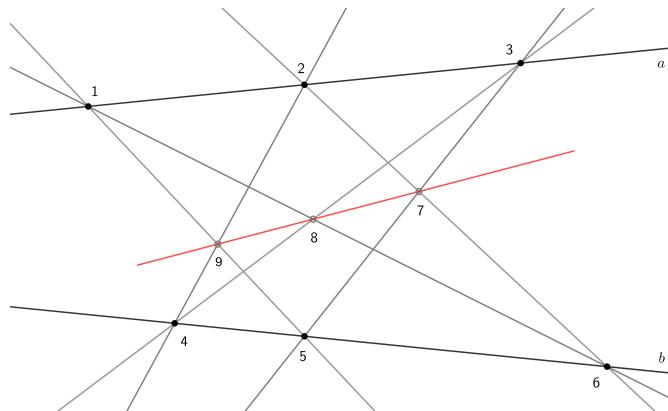
Први у низу пројективних доказа Папосове теореме је базиран је на следећој примедби.

Примедба 1.1 Уколико желимо да проверимо да ли су три тачке колинеарне можемо проверити да ли су праве са којима их идентификујемо компланарне, а за то нам може послужити мешовити производ. Дакле, ако су $A(x_A : y_A : z_A)$, $B(x_B : y_B : z_B)$ и $C(x_C : y_C : z_C)$ три тачке, уведемо ли ознаку

$$[A, B, C] := \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix},$$

A , B и C ће бити колинеарне ако и само ако је $[A, B, C] = 0$.

Ради лакшег спровођења доказа означимо тачке које се појављују у формулатији Теореме 1.1 бројевима од 1 до 9 (погледати слику 1.12). Мотивација за овакав "рачунарски" запис потиче из рада [12].



Слика 1.12. Папосова теорема - доказ поништавањем детерминанти

Доказ Папосове теореме: Нека су тачке 1, 4 и 7 неколинеарне. Уколико применимо одговарајуће проективно пресликање можемо обезбедити да поменутим тачкама одговарају координате $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ и $(0 : 0 : 1)$ редом. Координате преосталих тачака означимо на следећи начин: $2 = (a : b : c)$, $3 = (d : e : f)$, $5 = (g : h : i)$, $6 = (j : k : l)$, $8 = (m : n : o)$ и $9 = (p : q : r)$.

Сваку од осам колинеарности која је претпостављена у формулатији Теореме 1.1 можемо изразити преко мешовитог производа. Дакле,

$$\begin{array}{ll} [1, 2, 3] = 0, & [1, 5, 9] = 0, \\ [1, 6, 8] = 0, & [2, 4, 9] = 0, \\ [2, 6, 7] = 0, & [3, 4, 8] = 0, \\ [3, 5, 7] = 0, & [4, 5, 6] = 0. \end{array}$$

Приметимо да због специјалног избора координата тачака 1, 4 и 7 и чињенице да свака тројка тачака колинеарних по услову теореме садржи једну од тих тачака, поменутих осам колинеарности можемо представити детерминантом реда 2.

Рецимо колинеарност тачака 1, 2 и 3 можемо представити на следећи начин:

$$[1, 2, 3] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix},$$

а како је

$$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = bf - ec,$$

коначно добијамо да колинеарност тачака 1, 2, 3 можемо представити једначином $bf - ec = 0$, односно $ec = bf$.

Дакле, показује се да:

$$\begin{aligned} [1, 2, 3] = 0 &\implies ec = bf, \quad [1, 5, 9] = 0 \implies qi = hr, \\ [1, 6, 8] = 0 &\implies ko = nl, \quad [2, 4, 9] = 0 \implies ar = pc, \\ [2, 6, 7] = 0 &\implies jb = ak, \quad [3, 4, 8] = 0 \implies mf = do, \\ [3, 5, 7] = 0 &\implies dh = ge, \quad [4, 5, 6] = 0 \implies gl = ji. \end{aligned} \tag{6}$$

Приметимо и да, због претпоставке да се никоје две тачке и никоје две праве не поклапају, ниједно од слова које се појављује у координатама тачака 2, 3, 5, 6, 8 и 9 не може бити нула.

На пример, посматрајмо тачке 1, 2 и 4. Оне су због претходно поменуте претпоставке сигурно неколинеарне (у супротном би се праве 1-2-3 и 4-8-3 поклапале) те је детерминанта $[1, 2, 4] \neq 0$, а како је

$$[1, 2, 4] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -c,$$

следи $c \neq 0$.

Ако измножимо леве и десне стране једначина (6) и извршимо одговарајућа дељења добијамо

$$mq = np,$$

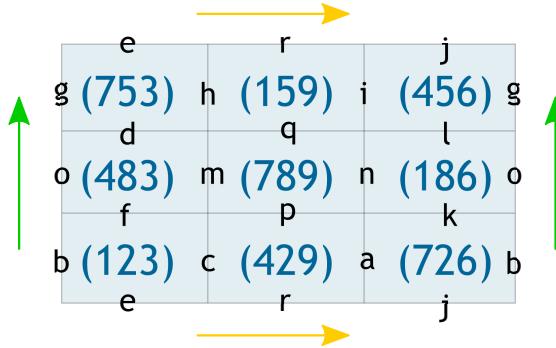
одакле следи да је

$$[7, 8, 9] = 0,$$

односно да су тачке 7, 8 и 9 колинеарне.

Приметимо да се претходни доказ у потпуности ослања на погодан избор координата тачака 1, 4 и 7. Сва његова једноставност управо је последица тога. Скренимо пажњу и да, ако су тачке 1, 4 и 7 колинеарне, њихову улогу у овом доказу може имати нека друга тројка тачака које то нису нпр. 3, 6 и 9 или 2, 8 и 5. ■

Истакнимо још структуру датог доказа. На слици 1.13 у правоугаоницима су записане колинерности које се појављују у њему, а које можемо повезати са одговарајућим детерминантама. Оно што смо при извођењу доказа приметили је да се једно слово појављује у две различите детерминанте. Такве детерминанте смо ређали једне поред других. Тиме смо добили мрежу залепљену по ивицама на начин који сугеришу жуте и зелене стрелице на слици 1.13. Даље је једноставно уочити да овај доказ тополошки има структуру торуса.



Слика 1.13. Структура доказа - торус

Додатно, наводимо и слику преузету из рада [5] канадског геометричара Коксетера на којој је такође представљена комбинаторна структура Папосове теореме (слика 1.14). Ознаке $A_1, C_1, B_1, A_2, C_2, B_2, A_3, C_3, B_3$ одговарају редом нашим тачкама 1, 2, 3, ..., 9.

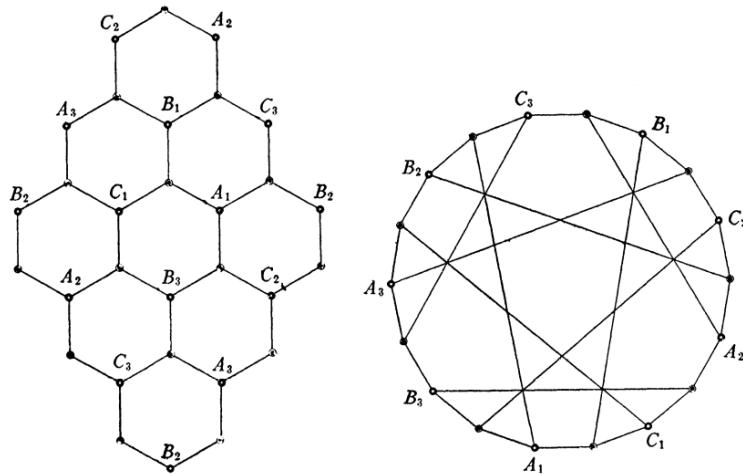
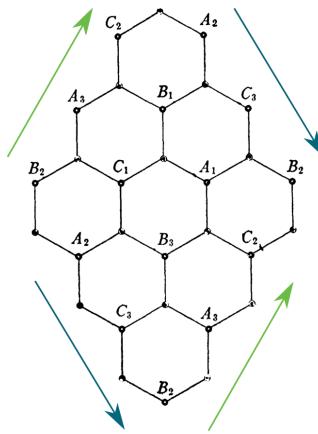


FIG. 14. The regular map $\{6, 3\}_{2,0}$.

FIG. 15. Another view of the Pappus graph.

Слика 1.14. Слика преузета из [5]

На слици је приказан граф нацртан на два начина. Граф се састоји од девет црних тачака (тачке поред којих ознака није наведена) и девет белих тачака (тачке означене са $A_1, C_1, B_1, A_2, C_2, B_2, A_3, C_3, B_3$). Црне тачке представљају праве, а беле тачке значајне тачке Папосове теореме. При томе, две беле тачке су повезане црном само када постоји права Папосове теореме којој обе припадају. Такође видимо да свака тачка припада трима правама тј. да је свака бела тачка повезана са три црне, као и да свака права садржи три тачке, односно да је свака црна тачка повезана са три беле. Уколико бисмо леви граф залепили по ивицама на начин приказан на слици 1.15 добили бисмо торус.



Слика 1.15. Лепљење графа \rightarrow торус

1.2.2 Доказ Грасман-Пликеровом релацијом

За разлику од претходног доказа који се ослања на координате тачака у наредном доказу користићемо искључиво својства детерминанти, а сам доказ базирати на Грасман-Пликеровој релацији.

Теорема 1.4 (Грасман³-Пликерова⁴ релација) За произвољне тачке $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}P^2$ важи:

$$[A, B, C][A, D, E] - [A, B, D][A, C, E] + [A, B, E][A, C, D] = 0.$$

Доказ: Без губитка општости претпоставимо да је $A = (1 : 0 : 0)$, а да су тачке B, C, D и E (уколико је неопходно ово можемо обезбедити одговарајућим проективним пресликовањем) коначне тачке чије су хомогене координате $B = (x_B : y_B : 1)$, $C = (x_C : y_C : 1)$, $D = (x_D : y_D : 1)$ и $E = (x_E : y_E : 1)$. Овим детерминантама постају једноставне разлике тј. добијамо

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_D & y_D & 1 \\ x_E & y_E & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_E & y_E & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_E & y_E & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}$$

³Немачки математичар и лингвиста Херман Грасман (1809-1877)

⁴Немачки математичар и физичар Јулијус Пликер (1801-1868)

$$\begin{aligned}
&= (y_B - y_C)(y_D - y_E) - (y_B - y_D)(y_C - y_E) + (y_B - y_E)(y_C - y_D) \\
&= y_BYD - yBYE - yCYD + yCYE - yBYC + yBYE + yDYC - yDYE + yBYC - yBYD \\
&\quad - yEYC + yEYD \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Последица 1.1 Из претходне релације следи да ако је тројка тачака A, D, E колинеарна тј. $[A, D, E] = 0$ важи $[A, B, D][A, C, E] = [A, B, E][A, C, D]$. И обратно, ако знамо да важи $[A, B, D][A, C, E] = [A, B, E][A, C, D]$ тада је колинеарна тројка тачака A, B, C или тројка тачака A, D, E .

Доказ Папосове теореме: Као и у претходном доказу Папосове теореме означимо тачке које се појављују у њеној формулатици бројевима од 1 до 9 и претпоставимо да тројка тачака 1, 4 и 7 није колинеарна.

За почетак посматрајмо тачке 1, 4, 7, 2, 3 и применимо на њих Грасман-Пликерову релацију користећи колинеарност тачака 1, 2 и 3. Одатле закључујемо да је:

$$[1, 4, 2][1, 7, 3] = [1, 4, 3][1, 7, 2].$$

Аналогно, за сваку од осам колинеарности претпостављених теоремом запишимо одговарајућу једначину која из ње следи.

У наставку, са леве стране је наведена тројка колинеарних тачака, а са десне једначина која из те колинеарност следи.

$$\begin{aligned}
(1, 5, 9) &\implies [1, 4, 5][1, 7, 9] = [1, 4, 9][1, 7, 5] \\
(1, 6, 8) &\implies [1, 4, 8][1, 7, 6] = [1, 4, 6][1, 7, 8] \\
(2, 4, 9) &\implies [4, 7, 2][4, 1, 9] = [4, 7, 9][4, 1, 2] \\
(3, 4, 8) &\implies [4, 7, 8][4, 1, 3] = [4, 7, 3][4, 1, 8] \\
(4, 5, 6) &\implies [4, 7, 5][4, 1, 6] = [4, 7, 6][4, 1, 5] \\
(2, 6, 7) &\implies [7, 1, 2][7, 4, 6] = [7, 1, 6][7, 4, 2] \\
(3, 5, 7) &\implies [7, 1, 5][7, 4, 3] = [7, 1, 3][7, 4, 5]
\end{aligned}$$

Преостало је још да измножимо леве и десне стране и извршимо потребна дељења користећи се при томе следећим својствима детерминанте:

1. $[A, B, C] = -[B, A, C]$
2. $[A, B, C] = [B, C, A] = [C, A, B]$.

На тај начин добијамо,

$$[7, 1, 9][7, 4, 8] = [7, 1, 8][7, 4, 9].$$

Одавде би следило да мора важити колинеарност тачака 8, 9, 7 или тачака 1, 4, 7. Но, како смо претпоставили да су тачке 1, 4, 7 неколинеарне коначно можемо закључити да важи колинеарност тачака 8, 9 и 7.

■

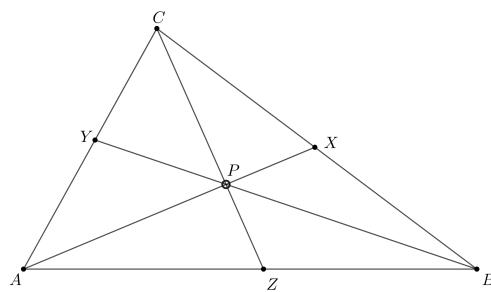
Техника доказивања коришћена у овом одељку (тзв. биномни метод) примењена је у радовима [12] и [6].

1.2.3 Доказ помоћу Чевине теореме

У наставку Папосову теорему доказујемо помоћу теореме коју је 1678. године открио италијански математичар Бовани Чева (1647-1734), чије име она данас и носи.

Теорема 1.5 (Чевина теорема) Нека су X, Y и Z тачке редом на страницама BC, AC и AB троугла ABC . Тада се праве AX, BY и CZ секу у једној тачки ако и само ако

$$\frac{AZ}{ZB} \frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} = 1.$$

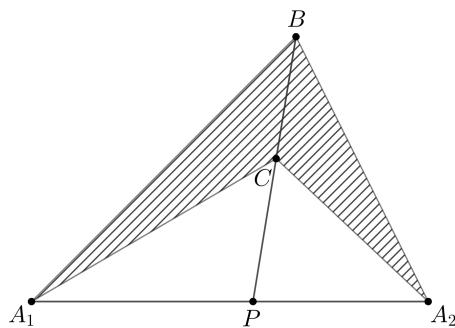


Слика 1.16. Чевина теорема

Чевину теорему можемо једноставно доказати уколико однос дужина посматрамо као однос површина одговарајућих троуглова. Наиме, ако је P тачка пресека правих BC и A_1A_2 (слика 1.17) тада важи

$$\frac{A_1P}{PA_2} = -\frac{P(B, C, A_1)}{P(B, C, A_2)},$$

где су поменуте површине заправо оријентисане површине о којима смо нешто више рекли у одељку 1.1. Овакав метод доказивања Чевине теореме представили су Гринбаум и Шепард у раду [7]. Његова директна примена на односе који се појављују у формулацији теореме води њеном доказу.



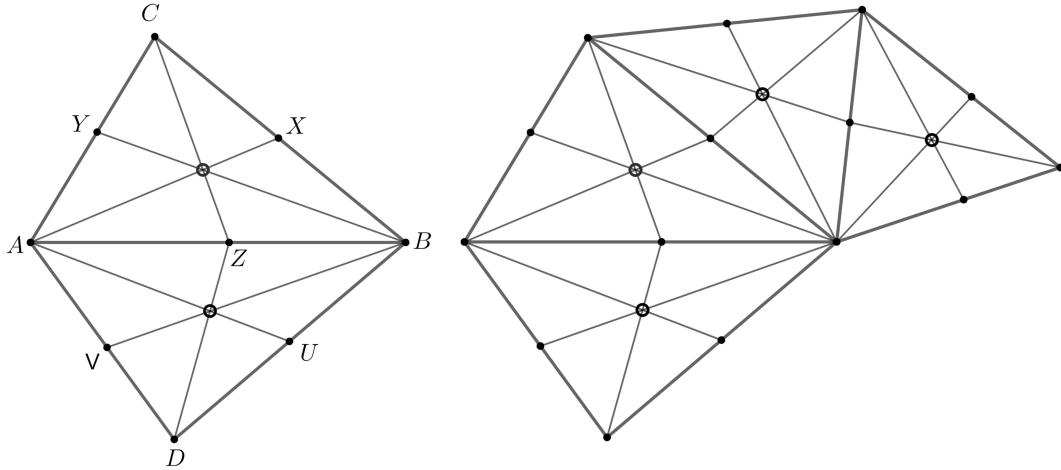
Слика 1.17. Принцип површина: $\frac{A_1P}{PA_2} = -\frac{P(B, C, A_1)}{P(B, C, A_2)}$

Но, вратимо се сада нашој теми. Истакнимо да ћемо под *Чевиним троуглом* подразумевати троугао на чијим се страницама BC, AC и AB налазе редом тачке X, Y и Z такве да важи

$$\frac{AZ}{ZB} \frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} = 1,$$

и размотримо следећу ситуацију.

Два Чевина троугла ABC и ABD су залепљена дуж заједничке ивице и на њој деле тачку Z (слика 1.18 лево).



Слика 1.18. Лепљење Чевиних троуглова

За почетак посматрајмо троугао ABC . Како су AX , BY и CZ конкурентне примена Чевине теореме нам даје:

$$\frac{AZ}{ZB} \frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} = 1. \quad (7)$$

А, уколико посматрамо троугао ABD због конкурентности правих AU , BV и DZ важи:

$$\frac{AV}{VD} \frac{DU}{UB} \frac{BZ}{ZA} = 1. \quad (8)$$

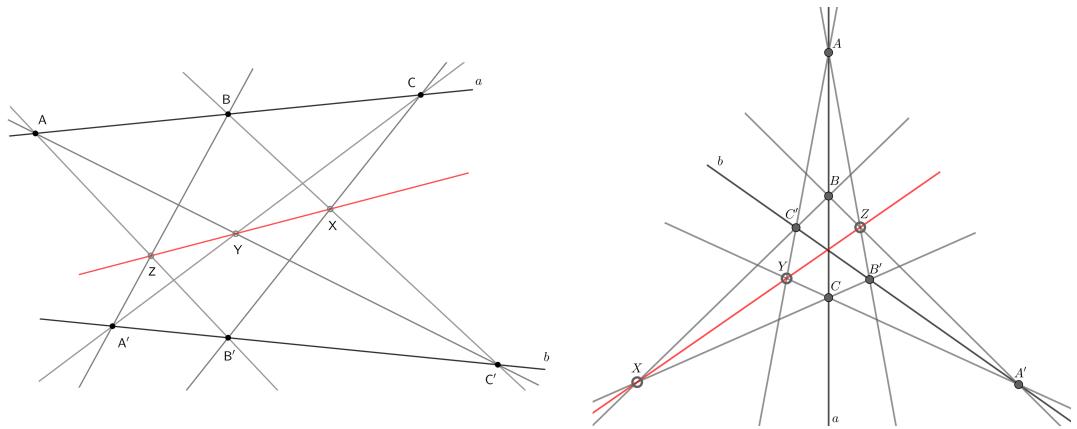
Измножимо ли леве и десне стране релација (7) и (8) добијамо:

$$\frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} \frac{AV}{VD} \frac{DU}{UB} = 1.$$

Дакле, односи који одговарају заједничкој ивици се пониште те добијамо релацију у којој се појављују само односи који одговарају граници фигуре коју сачињавају залепљени троуглови.

Лепљење троуглова који су опремљени Чевином теоремом један за други на претходно описан начин можемо наставити (слика 1.18 десно), и увек ће се, у коначној релацији, јављати само односи који одговарају граници настале фигуре.

Доказ Папосове теореме: Идеја наредног доказа се састоји у томе, да најпре посматрамо слику 1.19 десно и уочене Чевине троуглове на њој лепимо један за други по одговарајућој заједничкој ивици, а затим применимо закључак претходног разматрања. Стога погледајмо троугао $XA'A$.

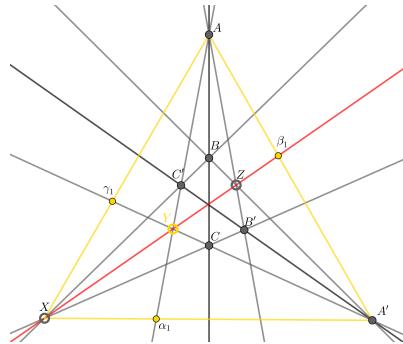


Слика 1.19. Два приказа Папосове теореме

Како се $A\alpha_1$, $X\beta_1$ и $A'\gamma_1$ секу у једној тачки (слика 1.20) на основу Чевине теореме важи

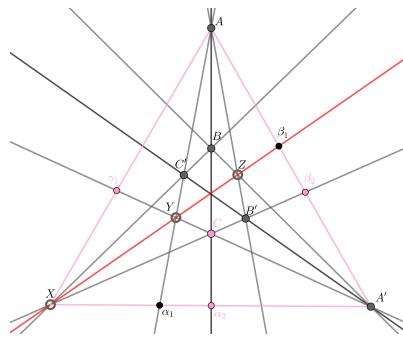
$$\frac{X\alpha_1}{\alpha_1 A'} \frac{A'\beta_1}{\beta_1 A} \frac{A\gamma_1}{\gamma_1 X} = 1, \quad (9)$$

те је уочени троугао Чевин троугао.



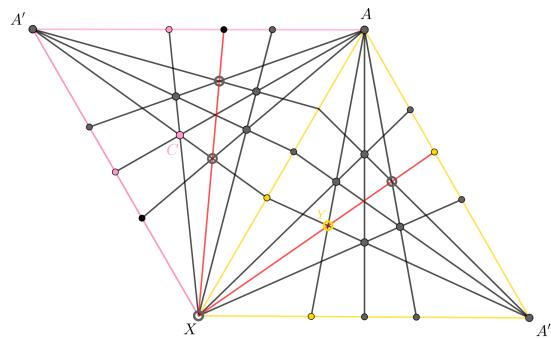
Слика 1.20. Први уочени Чевин троугао

Сасвим слично, како се $A\alpha_2$, $X\beta_2$ и $A'\gamma_1$ секу у једној тачки добијамо још један Чевим троугао (слика 1.21).



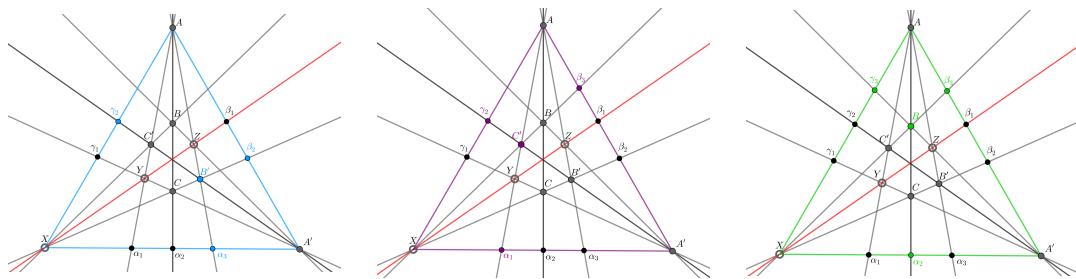
Слика 1.21. Други уочени Чевин троугао

Сада први (слика 1.20) и други (слика 1.21) Чевин троугао залепимо по заједничкој ивици AX .

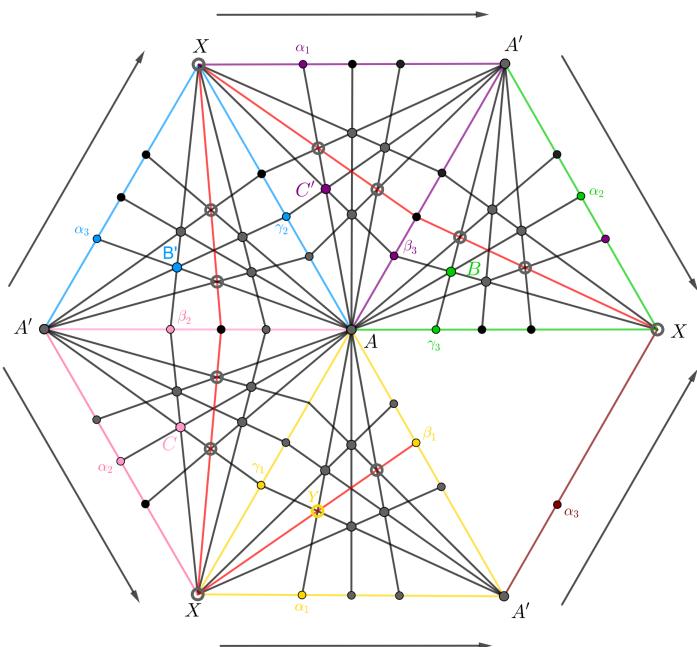


Слика 1.22. Лепљење првог и другог Чевиног троугла

Приметимо даље да можемо пронаћи још три Чевина троугла (слика 1.23). Залепимо ли и њих на одговарајући начин, добијамо слику која одговара оној приказаној на слици 1.24.



Слика 1.23. Три нова Чевина троугла

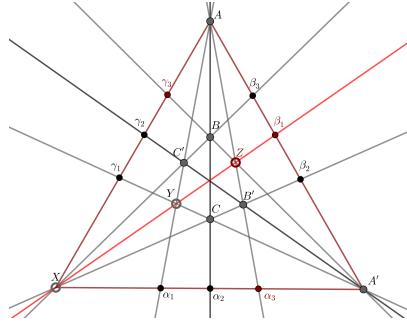


Слика 1.24. Лепљење Чевиних троуглова

Уколико идентификујемо ивице троуглова на начин који сугеришу стрелице на претходној слици и применимо закључак разматрање са почетка добијамо

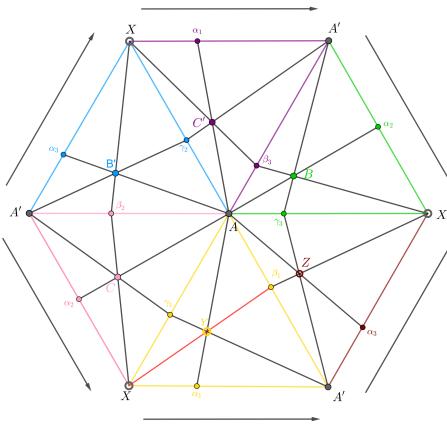
$$\frac{A'\alpha_3}{\alpha_3 X} \frac{X\gamma_3}{\gamma_3 A} \frac{A\beta_1}{\beta_1 A'} = 1.$$

Сада је јасно да је и последњи троугао Чевин тј. да се $A\alpha_3$, $X\beta_1$ и $A\gamma_3$ секу у тачки Z (слика 1.25).



Слика 1.25. Последњи Чевин троугао

Конечно, пошто XZ и XY секу ивицу AA' троугла $XA'A$ у истој тачки то су тачке X , Y и Z колинеарне (слика 1.26).



Слика 1.26. X , Y и Z су колинеарне

■

Изненађујућа је чињеница и да уколико троугловима придржимо Менелажеву⁵ теорему добијамо слику која одговара Папосовој теореми. Више о томе могуће је прочитати у [10]. Заправо, доказивање Папосове теореме помоћу шест троуглова "опремљених" Менелајевом теоремом је метод који је искористио Коксетер у [4].

⁵Грчки математичар и астроном Менелай Александријски (70-140. н.е.)

2 Паскалова теорема и њене генерализације

2.1 Криве другог реда

Крива другог реда или коника је скуп свих тачака у $\mathbb{R}P^2$ које задовољавају једначину:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0. \quad (10)$$

Једначину (10) можемо записати и у матричном облику

$$X^\top GX = 0, \quad (11)$$

где је: $G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = G^\top$ матрица криве другог реда, а $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ тачка пројективне равни.

Уколико је матрица G регуларна, у питању је недегенерисана, а иначе дегенерисана крива другог реда.

Свака недегенерисана крива другог реда се пројективним пресликавањем може пресликати у:

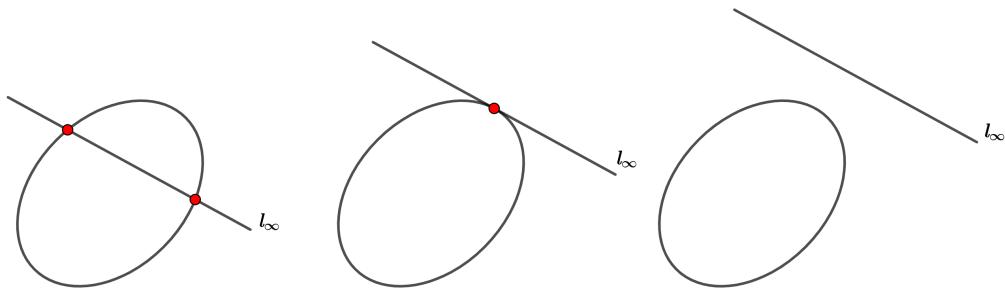
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

а то су редом нула крива и овална крива. Док се свака дегенерисана крива другог реда може пресликати у:

$$x^2 + y^2 = 0, \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 = 0,$$

што су редом тачка, две праве које се секу и двострука права.

Афино гледано овалне криве су: елипса, хипербола и парабола. Оне су пројективно еквивалентне, а разликују се по броју пресечних тачака са бесконачно далеком правом. Уколико овална крива и бесконачно далека права имају две пресечне тачке крива је хипербола, а те две тачке правци њених асимптота (слика 2.1 лево). Ако је пресек једна тачка, крива је парабола, а та тачка правца њене осе (слика 2.1 у средини). А уколико пресек не постоји, крива је елипса (слика 2.1 десно).



Слика 2.1. Пресек овалних кривих и бесконачно далеке праве

Подсетимо се да је овална крива другог реда јединствено одређена са пет тачака од којих никоје три нису колинеарне. У вези са тим размотримо следеће.

Приметимо да скуп тачака X таквих да важи $[A, B, X] = 0$ представља праву која садржи тачке A и B . Слично, $[A, B, X][C, D, X] = 0$ и $[A, C, X][B, D, X] = 0$ представљају дегенерисане конике које чине праве AB и CD , односно AC и BD редом. Штавише, испоставља се да свака коника која садржи тачке A, B, C и D које су у општем положају има једначину облика

$$\lambda[A, B, X][C, D, X] + \mu[A, C, X][B, D, X] = 0 \text{ за неке } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Уколико желимо да коника садржи и неку нову тачку E довољно је да изаберемо

$$\lambda = [A, C, E][B, D, E] \text{ и } \mu = -[A, B, E][C, D, E].$$

Дакле,

$$[A, C, E][B, D, E][A, B, X][C, D, X] - [A, B, E][C, D, E][A, C, X][B, D, X] = 0$$

представља конику која садржи тачке A, B, C, D и E .

Стога, како бисмо проверили да ли неких шест тачака пројективне равни припадају истој кривој можемо користити следеће тврђење:

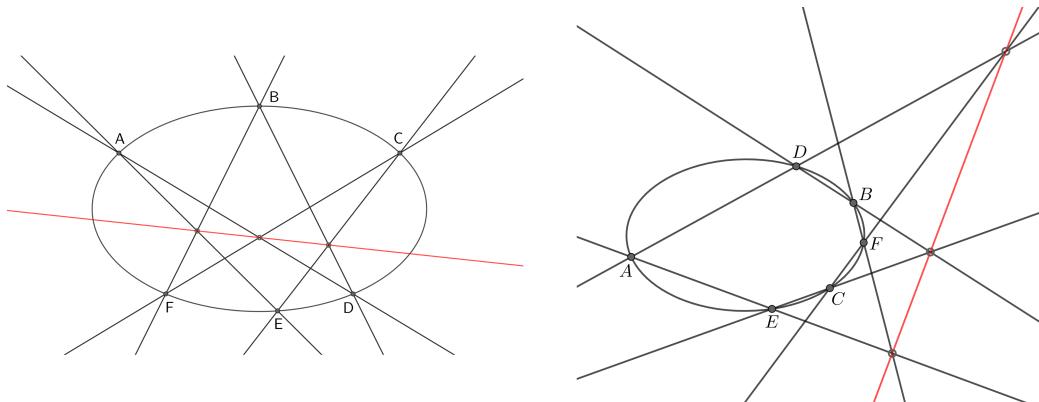
Теорема 2.1 Шест тачака A, B, C, D, E и F припадају овалној кривој другог реда ако и само ако

$$[A, C, E][A, B, F][C, D, F][B, D, E] = [A, C, F][A, B, E][C, D, E][B, D, F].$$

2.2 Паскалова теорема

Овај одељак посвећујемо теореми коју је са шеснаест година открио француски математичар Блез Паскал (1623-1662), а која представља генерализацију Папосове теореме. Своју теорему Паскал је представио у раду *Essay pour les Coniques* који је штампан 1640. године. Овај резултат био је један од првих фундаменталних резултата непознатих античким Грцима.

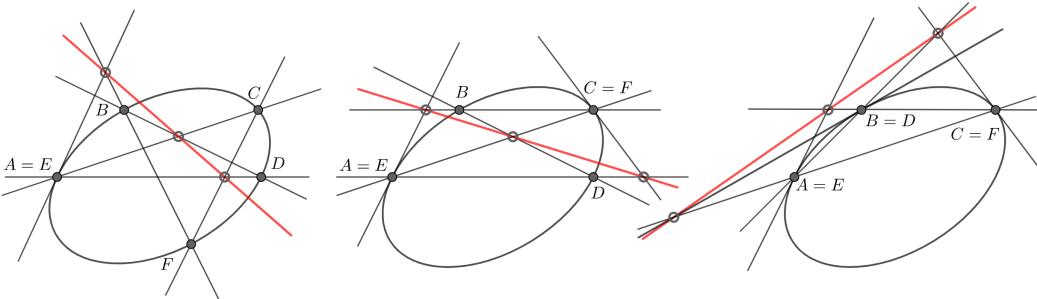
Теорема 2.2 (Паскалова теорема) Нека $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}P^2$ леже на кривој другог реда. Ако праве AE , BD и CF секу редом праве BF , CE и AD онда су пресечне тачке колинеарне.



Слика 2.2. Два приказа Паскалове теореме

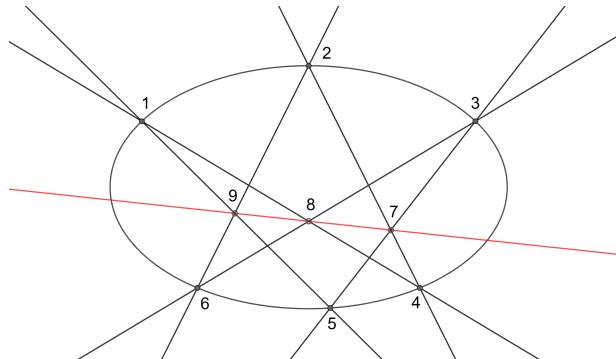
Напомена 2.1 Права на којој се налазе три пресечне тачке обожена је на слици 2.2 црвеном бојом и њу називамо *Паскалова права*.

Паскалова теорема важи и у дегенерисаним случајевима када се неке две тачке поклапају. На пример, ако је $A = E$ тада је одговарајућа права тангента на криву у тој тачки (слика 2.3).



Слика 2.3. Дегенерисани случајеви Паскалове теореме

Доказ: Да бисмо доказали Паскалову теорему користићемо Грасман-Пликерову релацију, као и Теорему 2.1 наведену у претходном одељку. Ради лакшег праћења доказа још једном ћемо означити тачке које се појављују у формулацији теореме бројевима од 1 до 9 (погледати слику 2.4). Са техником доказивања коју ћемо применити, већ смо се сусрели у поглављу 1.



Слика 2.4. Паскалове теореме

Идеја је следећа: За почетак посматрајмо тачке 1, 2, 3, 4, 5, 6 и искористимо услов да оне леже на кривој другог реда:

$$[1, 2, 5][1, 3, 6][2, 4, 6][3, 4, 5] = [1, 2, 6][1, 3, 5][2, 4, 5][3, 4, 6].$$

Даље, на сваку од шест колинеарности претпостављених теоремом применимо Грасман-Пликерову релацију. У наредној табели са леве стране је наведена тројка колинеарних тачака, а са десне једначина која из те колинеарности следи.

$$(1, 5, 9) \implies [1, 5, 7][2, 5, 9] = -[1, 2, 5][5, 9, 7]$$

$$(1, 6, 8) \implies [1, 2, 6][3, 6, 8] = +[1, 3, 6][2, 6, 8]$$

$$\begin{aligned}(2, 4, 9) &\implies [2, 4, 5][2, 9, 7] = -[2, 4, 7][2, 5, 9] \\(3, 4, 8) &\implies [3, 4, 6][3, 5, 8] = +[3, 4, 5][3, 6, 8] \\(2, 6, 7) &\implies [2, 4, 7][2, 6, 8] = -[2, 4, 6][2, 8, 7] \\(3, 5, 7) &\implies [1, 3, 5][5, 8, 7] = -[1, 5, 7][3, 5, 8]\end{aligned}$$

Преостало је још да измножимо леве и десне стране и извршимо потребна дељења:

$$[2, 8, 7][5, 9, 7] = [2, 9, 7][5, 8, 7]$$

Како због претпоставке да се никоје две тачке и никоје две праве не поклапају тројка тачака 1, 5, 7 не може бити колинеарна, одавде следи да мора важити колинеарност тачака 7, 8, 9.

■

Наводимо и једну од њених најчешће помињаних верзија (слика 2.2 десно).

Теорема 2.3 (*Паскалов мистични шестоугао*) Пресеци три паре наспрамних страница шестоугла уписаног у криву другог реда су колинеарне тачке.

Приметимо да уколико Паскалову теорему применимо на дегенерисану криву другог реда прецизније, две праве, добијамо управо Папосову теорему.

Као прикладан завршетак ове једине истичемо да и Паскалова теорема, попут Папосове, има неколико верзија и генерализација. У овом раду ћемо приказати две њене генерализације, најпре Кејли-Бахарах-Шалову теорему, а затим и теорему о мистичном $2d$ -тоуглу.

2.3 Криве трећег реда и Безуова теорема

Ради бољег разумевања, започнимо нашу причу навођењем дефиниције криве трећег реда, као и Безуове теореме, једне од најзначајнијих теорема класичне теорије алгебарских кривих.

Дефиниција 2.1 Крива трећег реда или кубика је скуп свих тачака у $\mathbb{R}P^2$ које задовољавају једначину:

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + exy^2 + fx^2z + gy^2z + hxyz + ixz^2 + jyz^2 = 0.$$

За криву трећег реда кажемо да је недегенерисана ако је хомогени полином којим је одређена иредуцибилан над пољем \mathbb{R} , а уколико је тај полином редуцибилан да је дегенерисана. Редуцибилна крива трећег реда се састаји од праве и од криве другог реда.

Њутнова класификација кривих трећег реда коју је изложио крајем 17. века представљала је велики успех у геометрији. Он је описао 72 типа кубика, а нешто касније описано је још 6, што даје укупно 78 случајева. Њутн је био први који је приметио и да је број заједничких тачака две алгебарске криве једнак произвodu њихових степени. То запажање изнео је у својој књизи *Principia* 1687. године. Године 1779. француски математичар Етјен Безу (1730-1783) у својој књизи *Théorie générale des équations algébriques* објављује тај резултат који је и данас познат под називом Безуова теорема.

Безуову теорему наводимо без доказа, заинтересовани читаоци га могу погледати у [8].

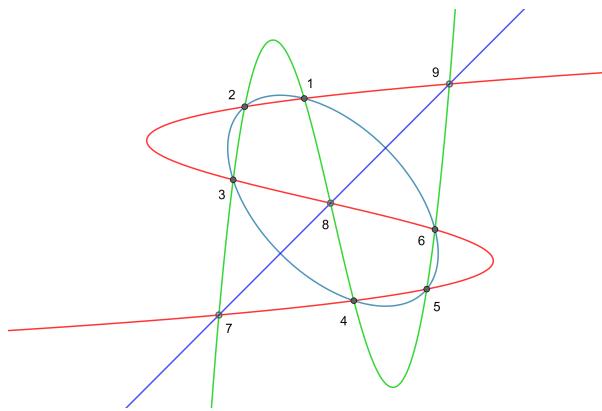
Теорема 2.4 (Безуова теорема) Број пресечних тачака две алгебарске криве, једне степена n , а друге степена m које немају заједничких компонената није већи од nm . Ако пак криве имају заједничких компонената, онда оне имају бесконачно много заједничких тачака.

Напомена 2.2 Посматрајмо криву $F(x, y, z) = 0$. Ако се F разлаже на производ иредуцибилних фактора тј. ако је $F = F_1 \dots F_k$ тада $F_i(x, y, z) = 0$ називамо компонентом криве $F(x, y, z) = 0$.

2.4 Кејли-Бахарах-Шалова теорема

Наведимо сада Кејли-Бахарах-Шалову теорему и изведимо њен доказ.

Теорема 2.5 (Кејли-Бахарах-Шалова теорема) Нека су $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ две кубне криве које се секу у тачно девет различитих тачака. Ако је шест од тих девет тачака на коници тада су преостале три тачке колинеарне.



Слика 2.5. Кејли-Бахарах-Шалова теорема

Доказ: Означимо бројевима $1, 2, 3, \dots, 9$ пресечне тачке кривих $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ и претпоставимо да су тачке $1, \dots, 6$ на коници задатој једначином $C(x, y, z) = 0$.

Уочимо сада тачку M на коници $C(x, y, z) = 0$ која је различита од тачака $1, \dots, 6$ и посматрајмо полином $P = F + \lambda G$, где је $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да важи $F(M) + \lambda G(M) = 0$. Овим смо обезбедили да M буде нула полинома P .

Додатно, знамо да је полином P полином трећег степена јер је линеарна комбинација полинома трећег степена F и G , као и да су њихове заједничке нуле - тачке $1, 2, 3, \dots, 9$, такође и његове нуле.

Сада кубна крива одређена једначином $P(x, y, z) = 0$ и крива другог реда $C(x, y, z) = 0$ имају 7 пресечних тачака.

Но, како кубна крива и крива другог реда које немају заједничких компонената могу према Безуовој теореми имати највише 6 заједничких тачака закључујемо да криве $P(x, y, z) = 0$ и $C(x, y, z) = 0$ морају имати заједничку компоненту тј. да крива $P(x, y, z) = 0$ садржи криву $C(x, y, z) = 0$.

Дакле, $P = C \cdot L$, где је L полином степена 1.

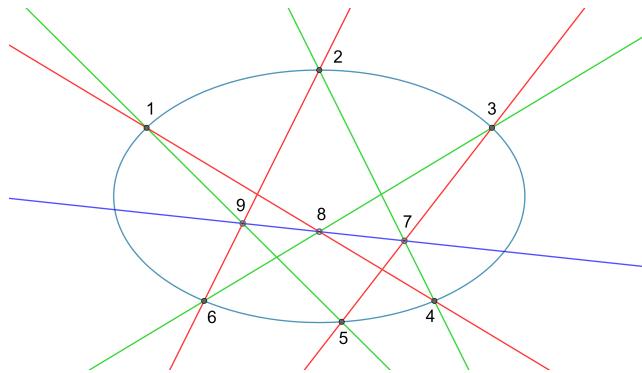
Конечно, како су 7, 8 и 9 нуле полинома P оне морају били и нуле полинома $C \cdot L$. Заправо, оне су баш нуле полинома L . У супротном, ако би нпр. 7 била на коници $C(x, y, z) = 0$ онда би такође била у пресеку $F(x, y, z) = 0$ и $C(x, y, z) = 0$, као и $G(x, y, z) = 0$ и $C(x, y, z) = 0$, што би значило према Безуовој теореми да

$F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ као заједничку компоненту имају $C(x, y, z) = 0$, што је супротно претпоставци да се секу тачно у 9 различитих тачака.

Дакле, тачке 7, 8 и 9 су колинеарне и припадају правој задатој једначином $L(x, y, z) = 0$. ■

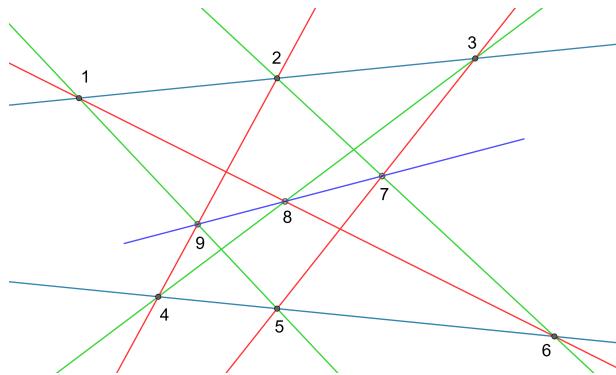
Јасно је да можемо рећи да је Паскалова теорема специјалан случај Кејли-Бахара-Шалове теореме.

Наиме, уколико посматрамо слику 2.6 три зелене праве можемо сматрати једном кубном кривом, а три црвена другом кубном кривом. Па како тачке 1, ..., 6 припадају кривој другог реда, то тачке 7, 8 и 9 припадају правој.



Слика 2.6. Паскалова теорема као последица Кејли-Бахара-Шалове теореме

Слично, и Папосова теорема специјалан је случај Кејли-Бахара-Шалове теореме (слика 2.7).



Слика 2.7. Папосова теорема као последица Кејли-Бахара-Шалове теореме

2.5 Мистични $2d$ -тоугао

У наставку излажемо једну занимљиву генерализацију Паскалове теореме.

Теорема 2.6 (Мистични $2d$ -тоугао) Ако се d црвених и d плавих правих сече у d^2 различитих тачака и ако $2d$ тих тачака лежи на иредуцибилној кривој другог реда $Q(x, y, z) = 0$ тада постоји крива $Q_*(x, y, z) = 0$ степена $d - 2$ кроз преосталих $d^2 - 2d$ пресечних тачака.

Поменутих $2d$ тачака које припадају кривој другог реда представљају темена мистичног $2d$ -тоугла, откуда и потиче назив теореме.

Доказ: Нека су R_1, \dots, R_d и B_1, \dots, B_d хомогени полиноми који дефинишу редом црвене, односно плаве праве и нека је $R = \prod_{i=1}^d R_i$ и $B = \prod_{i=1}^d B_i$, а тачка $(a : b : c)$ тачка криве $Q(x, y, z) = 0$ различита од пресечних тачака црвених и плавих правих. Посматрајмо нову криву степена d дату једначином $N(x, y, z) = 0$ где је

$$N(x, y, z) = \lambda R(x, y, z) - \mu B(x, y, z),$$

и $\lambda = B(a, b, c)$, а $\mu = R(a, b, c)$. Она сече криву $Q(x, y, z) = 0$ у бар $2d + 1$ тачки, па према Безуовој теореми оне морају имати заједничку компоненту. Како је крива $Q(x, y, z) = 0$ иредуцибилна, то мора важити

$$N(x, y, z) = Q(x, y, z) \cdot S(x, y, z),$$

где је S хомогени полином степена $d - 2$.

Конечно, како су све пресечне тачке црвених и плавих правих, њих d^2 , нуле полинома N , а њих $2d$ полинома Q то преосталих $d^2 - 2d$ тачака морају бити нуле полинома S тј. крива $S(x, y, z) = 0$ мора да их садржи. ■

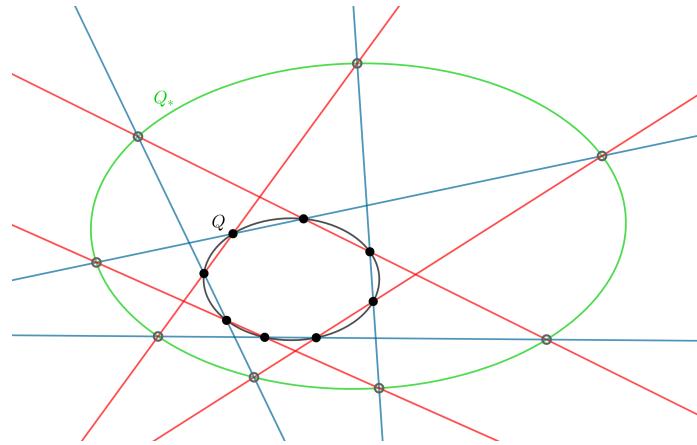
Теорема о мистичном $2d$ -тоуглу представљена је у раду [9]. У њему је аутор доказује помоћу своје теореме о кавезу која представља специјалан случај Безуове теореме. Више речи о овом тврђењу биће у наставку будући да нас оно води до теме конструкцибилних кривих коју и сам Габријел Кац начиње у раду [9], а даље разрађује Вил Трејвз у раду [14].

3 Конструктибилне криве

3.1 Од Паскалове теореме до d -конструктибилних кривих

Започнимо нашу причу о d -конструктибилним кривим подсећањем на раније поменуту генерализацију Паскалове теореме. Наглашавамо да ћемо од сада радити у комплексном проективном простору.

Теорема 3.1 (*Мистични $2d$ -тоугао*) Ако се d црвених и d плавих правих сече у d^2 различитих тачака и ако $2d$ тих тачака лежи на иредуцибилој кривој другог реда Q тада постоји крива Q_* степена $d - 2$ кроз преосталих $d^2 - 2d$ пресечних тачака.



Слика 3.1. Мистични осмоугао

Размишљајући о исказу теореме намеће се питање које се то криве Q_* степена $d - 2$ могу добити користећи $2d$ -тоугао уписан у криву другог реда Q .

Назире се да за мале вредности d имамо могућност да добијемо скоро сваку криву степена $d - 2$ као криву Q_* . Рачунајући димензије можемо грубо одредити за које вредности d би ово могло бити истинито. На пример, за $d = 3$ при избору црвених и плавих правих имамо 6 степени слободе, а при избору праве (Q_*) 2. Даље, за $d = 4$ при избору црвених и плавих правих имамо 8 степени слободе, а при избору криве другог реда (Q_*) 5. Слично је и када је $d = 5$, али већ за $d = 6$ број степени слободе избора црвених и плавих правих који износи 12 не превазилази број степени слободе при избору криве четвртог реда који је 14. Дакле, овде би се могло закључити да за фиксирану криву другог реда Q не може свака крива четвртог реда бити Q_* . Но, овај мали проблем можемо успешно превазићи дозволимо ли промену криве Q чиме добијамо додатних 5 степени слободе. Посматрајмо још ситуацију када је $d = 7$. Тада при избору црвених и плавих правих имамо 14 степени слободе, а при избору криве другог реда Q још 5, дакле укупно 19. С друге стране код криве петог реда има их 20. Стога, већ на овом месту може се закључити да на овај начин не можемо добити све криве степена већег од пет.

Може се доказати да генерализација претходне теореме природно води дефиницији d -конструктибилности. За криву S која се у њој јавља казаћемо да је d -конструктибилна.

Теорема 3.2 Ако се два скупа од k правих секу у k^2 различитих тачака, и ако dk од тих тачака припада иредуцибилијој кривој C степена d , тада преосталих $k^2 - kd$ тачака припада кривој S степена $k - d$.

У наредном излагању циљ ће нам бити да строго дефинишемо d -конструктибилност, као и да покажемо да је за одређен опсег степени скоро свака крива конструктибилна, а за степене изван овог опсега готово ниједна крива није конструктибилна. Један начин да ово урадимо јесте да уведемо топологију Зариског на пројективни простор.

Дефинишисмо најпре поменуту топологију на афином простору \mathbb{A}^n , при чему ћемо уместо уобичајене дефиниције преко отворених скупова, користити дефиницију топологије преко затворених скупова, а за затворене скупове ћемо узети алгебарске скупове у \mathbb{A}^n .

Дакле, нека је \mathbb{A}^n афини простор димензије n . Сваки скуп $X \subseteq \mathbb{A}^n$ облика

$$X := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n \mid f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, n\}$$

се назива алгебарски скуп тј. кажемо да је $X \subseteq \mathbb{A}^n$ алгебарски уколико је дат као скуп решења система алгебарских једначина. Уколико се X састоји само од решења једне алгебарске једначине кажемо да је X хиперповрш.

На простору \mathbb{A}^n уводимо топологију тако да је фамилија затворених скупова баш фамилија алгебарских скупова. Та топологија се назива *топологија Зариског*.

Теорема 3.3 (Топологија Зариског) Фамилија алгебарских скупова у \mathbb{A}^n задовољава:

- (i) \emptyset и \mathbb{A}^n су алгебарски скупови.
- (ii) Пресек произвољне фамилије алгебарских скупова је алгебарски скуп.
- (iii) Унија коначног броја алгебарских скупова је алгебарски скуп.

Ми заправо желимо да дефинишемо топологију Зариског на пројективном простору, те започнимо причу пројективним алгебарским скуповима. Идеја је иста као и код афиног простора \mathbb{A}^n : пројективни алгебарски скуп ће бити скуп решења система алгебарских једначина. Но, проблем на који наилазимо је да су хомогене координате тачке јединствено дефинисане до на множење ненула скаларом. Стога се може десити да за дати полином F и тачку $P(x_1 : \dots : x_n) \sim (\lambda x_1 : \dots : \lambda x_n)$ важи да је $F(x_1, \dots, x_n) = 0$, али $F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \neq 0$. Дакле, да би дефиниција била ваљана у обзир можемо узети само хомогене полиноме јер се у том случају претходни проблем неће јавити. Другим речима, морамо водити рачуна да можемо рећи да је тачка P нула полинома F само уколико било који избор хомогених координата тачке P поништава полином F .

Узимајући ово у обзир, сада аналогно афином случају можемо увести топологију на пројективном простору \mathbb{P}^n . Дакле, алгебарски подскупови од \mathbb{P}^n биће затворени скупови топологије Зариског, а комплемент Зариски затвореног скупа биће Зариски отворен скуп.

За више детаља о поменутим тополошким појмовима препоручујемо [8].

Формулишисмо сада теорему која је генерализација Кејли-Бахара-Шалове теореме јер ће нам она, поред топологије Зариског, бити од великог значаја за нашу даљу причу.

Теорема 3.4 Нека су $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ две криве степена k које се секу у k^2 различитих тачака. Ако је $H(x, y, z) = 0$ иредуцибилна крива степена $d > 0$ која пролази кроз kd од поменутих k^2 тачака, тада постоји крива $S(x, y, z) = 0$ степена $k - d$ која садржи преосталих $k^2 - kd$ тачака. Додатно, ако се G разлаже на производ линеарних фактора, тада је крива $S(x, y, z) = 0$ јединствена.

Доказ: Означимо са A скуп пресечних тачака кривих $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$, и нека је $(a : b : c)$ тачка криве $H(x, y, z) = 0$ која не припада скупу A .

Посматрајмо нову криву степена k дату једначином $M(x, y, z) = 0$ где је

$$M(x, y, z) = G(a, b, c)F(x, y, z) - F(a, b, c)G(x, y, z).$$

Она сече криву $H(x, y, z) = 0$ у бар $kd + 1$ тачки, па према Безуовој теореми оне морају имати заједничку компоненту. Како је крива $H(x, y, z) = 0$ иредуцибилна, то мора важити

$$M(x, y, z) = H(x, y, z)S(x, y, z),$$

где је S хомогени полином степена $k - d$.

Конечно, како су све тачке скупа A нуле полинома M , а њих kd нуле полинома H , то преосталих $k^2 - kd$ тачака морају бити нуле полинома S тј. крива $S(x, y, z) = 0$ их мора садржати.

Овим смо доказали први део тврђења. Покажимо још да уколико се G разлаже на производ линеарних фактора да је тада крива $S(x, y, z) = 0$ јединствена.

Претпоставимо да је $G = G_1 \dots G_k$ и покажимо да сваки хомогени полином N степена k који одређује криву кроз тачке скупа A мора бити облика $N = aF + bG$ за неке константе a и b .

Посматрајмо рестрикцију N и F на правој $G_1 = 0$. Како су обе рестрикције полиноми степена k са истих k коренова N и F морају бити пропорционални тј. за погодно изабрану константу a је $N - aF = 0$ на правој $G_1 = 0$. Додатно, како је G_1 иредуцибилан полином, $N - aF$ мора бити дељиво са G_1 тј. $N - aF = G_1 Q_{k-1}$ за неки хомогени полином Q_{k-1} степена $k - 1$. Даље, свака од преосталих правих $G_i = 0$ садржи k коренова полинома Q_{k-1} те G_i дели Q_{k-1} . Стога је $Q_{k-1} = b G_2 \dots G_k$ за неку константу b , па је коначно $N = aF + bG$.

Сада, претпоставимо да су $S_1(x, y, z) = 0$ и $S_2(x, y, z) = 0$ две криве степена $k - d$ које пролазе кроз преосталих $k^2 - kd$ тачака. На основу претходног морају постојати константе a_1, b_1, a_2 и b_2 такве да је $HS_1 = a_1F + b_1G$ и $HS_2 = a_2F + b_2G$. Тада је $(b_2S_1 - b_1S_2)H = (b_2a_1 - b_1a_2)F$ и $(a_2S_1 - a_1S_2)H = (a_2b_1 - a_1b_2)G$, па је $b_2a_1 - b_1a_2 = 0$, јер у супротном, за $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$ све тачке криве $H(x, y, z) = 0$ би морале припадати скупу A . Дакле, $b_2a_1 - b_1a_2 = 0$ те су S_1 и S_2 пропорционални тј. S_1 и S_2 дефинишу исту криву. ■

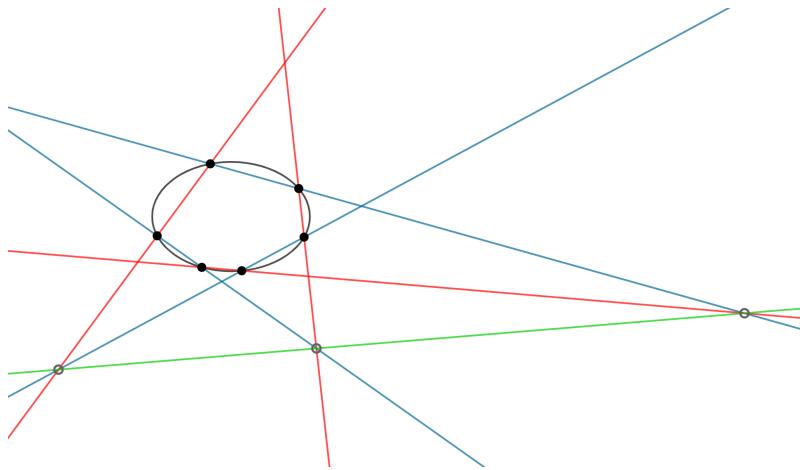
У наставку ће нас занимати случај када се и F и G разлажу на производ линеарних фактора и стога их можемо представити као колекцију плавих и црвених правих редом.

Напоменимо да је претходну теорему могуће проширити да покрије и случај када тачке пресека нису нужно различите.

Коришћењем Теореме 3.4 можемо доказати и нека, од раније позната тврђења. Нама је интересантно да је искористимо за доказивање Паскалове теореме о мистичном шестоуглу, као и њеног обрата, Брејкенриџ-Маклоренове теореме коју су представили енглески математичари Вилијам Брејкенриџ и Колин Маклорен скоро сто година након Паскаловог открића.

Теорема 3.5 (Брејкенриџ-Маклоренова теорема) Ако се два скупа од по 3 праве секу у 9 различитих тачака, и ако 3 од тих тачака припадају некој правој, тада преосталих 6 тачака припадају кривој другог реда.

Посматрајмо шестоугао уписан у недегенерисану криву другог реда и обојимо његове ивице наизменично црвеном и плавом бојом, а затим их продужимо. Како крива другог реда садржи шест од девет пресечних тачака плавих и црвених правих, на основу Теореме 3.4 преостале три тачке морају припадати кривој првог реда, односно морају бити колинеарне.



Слика 3.2. Паскалов мистични шестоугао

Слично уколико један скуп правих обојимо плавом бојом, а други црвеном и применимо Теорему 3.4, можемо доказати и Брејкенриџ-Маклоренову теорему.

3.2 d -конструктибилне криве

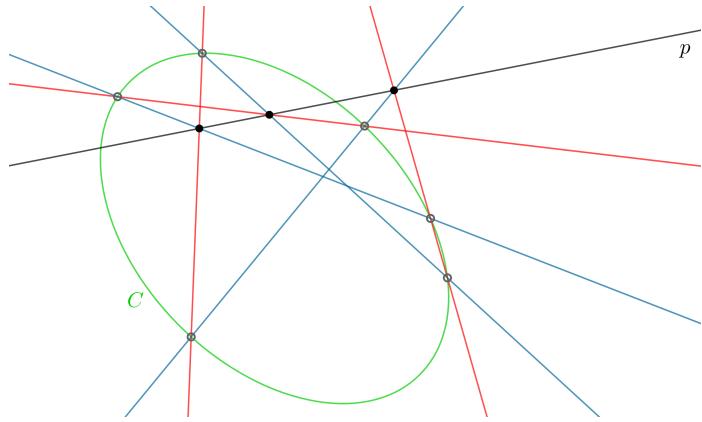
Крива S степена t је d -конструктибилна ако постоји $d + t$ црвених правих r_1, r_2, \dots, r_{d+t} и $d + t$ плавих правих b_1, b_2, \dots, b_{d+t} таквих да:

1. Скуп $A = \{r_i \cap b_j \mid 1 \leq i, j \leq d + t\}$ чини $(d + t)^2$ различитих тачака
2. $d(d + t)$ тачака скупа A припада кривој C степена d
3. Преосталих $t(d + t)$ тачака скупа A припада кривој S .

Кажемо да је d -конструктибилност густа у степену t ако је скоро свака крива степена t d -конструктибилна тј. уколико постоји Зариски отворен скуп $U \subset \mathbb{P}^{\frac{t^2+3t}{2}}$ такав да је свака крива степена t у U d -конструктибилна.

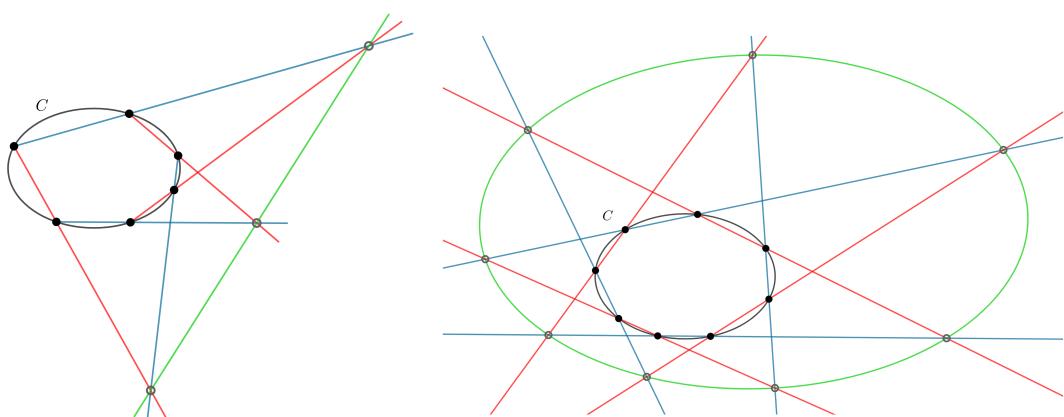
Наша пажња у наставку усмерена је на питање: Које су то криве d -конструктибилне? Кренимо од пар једноставних примера.

Пример 3.1 Није тешко уочити да су све праве d -конструктибилне за свако $d > 0$. Наиме, уколико посматрамо праву p довољно је изабрати $d+1$ тачку на тој правој и црвене и плаве праве које пролазе кроз њих и секу се у $(d+1)^2$ различитих тачака. Даље на основу Теореме 3.4 зnamо да постоји крива C степена d која пролази кроз пресечне тачке црвених и плавих правих које не припадају правој p те закључујемо да је права p d -конструктибилна.



Слика 3.3. 2-конструктибилност праве

Пример 3.2 За свако $d > 0$ све недегенерисане криве другог реда су takoђе d -конструктибилне. Наиме, посматрајмо недегенерисану криву другог реда C , изберимо $2(d+2)$ тачки на њој и уочимо полигон чија су то темена. Обојимо затим његове странице црвеном и плавом бојом тако да две суседне буду обожене различито и продужимо их до пресека (померањем темена можемо обезбедити да нам се никоје две пресечне тачке не поклопе). Сада су испуњени сви услови Теореме 3.4 те њеном применом закључујемо да постоји крива степена d која садржи преостале $d(d+2)$ тачке те је полазна крива C d -конструктибилна.



Слика 3.4. 1-конструктибилност и 2-конструктибилност недегенерисане криве другог реда - мистични шестоугао и осмоугао

Очигледно је да је d -конструктибилност густа у степену 1. Такође, лако се може видети да је d -конструктибилност густа и у степену 2. Наиме, присетимо се да криву другог реда можемо записати у облику $X^T G X = 0$, где је

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = G^T$$

симетрична матрица која дефинише криву. При том је крива недегенерисана ако је G регуларна матрица тј. $\det(G) \neq 0$, а иначе дегенерисана. Наравно, како је скуп дегенерисаних кривих другог реда $\{(a_{11} : a_{12} : a_{13} : a_{22} : a_{23} : a_{33}) \in \mathbb{P}^5 \mid a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{13}^2a_{22} - a_{23}^2a_{11} - a_{12}^2a_{33} = 0\}$ хиперповрш у \mathbb{P}^5 то је он Зариски затворен те је скуп недегенерисаних кривих другог реда као његов комплемент Зариски отворен. Одатле одмах можемо закључити да је d -конструктибилност густа у степену 2.

Теорема 3.6 За $d \geq 3$ d -конструктибилност није густа у степену $d+4$ или вишим степенима. За $d=2$ d -конструктибилност није густа у степену пет или више, а за $d=1$ у степену шест или више степенима.

Доказ: Криве степена t су параметризоване пројективним простором димензије $T = \binom{t+2}{2} - 1 = \frac{t^2+3t}{2}$ тј. можемо их идентификовати са тачкама пројективног простора \mathbb{P}^T . За сваку криву степена t која је d -конструктибилна постоји крива C степена d , $d+t$ плавих правих и $d+t$ црвених правих. При избору криве C имамо $\frac{d^2+3d}{2}$ степени слободе, а како су нам потребна два параметра да дефинишемо праву, при избору плавих правих имамо $2(d+t)$ степена слободе. Даље, пошто црвене праве морају сећи C у укупно $d(d+t)$ пресечних тачака плавих правих и те криве, њих можемо изабрати на коначно много начина (за $d \geq 2$) те њихов избор не утиче на бројање димензије. Свекупно закључујемо да димензија простора d -конструктибилних кривих степена t износи $\frac{d^2+3d}{2} + 2(d+t) = \frac{d^2+3d+4d+4t}{2}$. Како је то мање од $\frac{t^2+3t}{2}$ када је $t \geq d+4$ први део наше теореме мора важити. Такође, димензија 2-конструктибилних кривих степена t је $9+2t$ што је мање од $\frac{t^2+3t}{2}$ за $t \geq 5$ те важи други део теореме. Остаје још да размотримо случај када је $d=1$ и када нема само коначно много начина да изаберемо црвене праве. Наиме, у овом случају при избору криве C имамо два степена слободе, при избору плавих линија $2(t+1)$, а при избору црвеним $t+1$ степен слободе. Дакле, 1-конструктибилне криве могу бити параметризовање простором димензије $2+2(t+1)+t+1 = 3t+5$ што је мање од $\frac{t^2+3t}{2}$ за $t \geq 6$ чиме је и последње део теореме доказан. ■

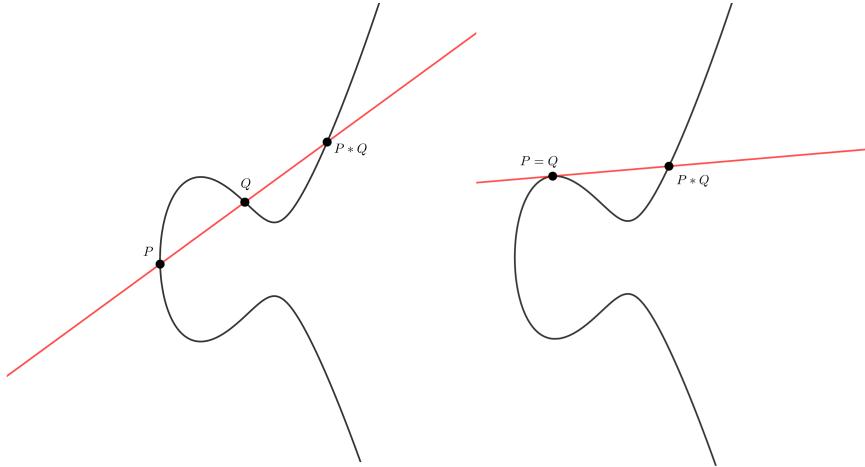
Коришћење групног закона на елиптичкој кривој омогућава нам да покажемо да је за свако d , d -конструктибилност густа у степену 3.

Елиптичку криву можемо дефинисати као глатку раванску криву степена 3 са истакнутом тачком O . Такође, можемо је дефинисати и као глатку раванску криву дату једначином

$$y^2z + a_1xyz + a_2yz^2 = x^3 + a_3x^2z + a_4xz^2 + a_5z^3. \quad (12)$$

Да бисмо увели групни закон на елиптичкој кривој присетимо се да се према Безуовој теореми права и елиптичка крива секу у 3 тачке, рачунајући вишеструкости.

Дакле, за сваке две, не нужно различите тачке P и Q са елиптичке криве имамо дефинисану још једну тачку те криве - тачку $P * Q$ (слика 3.5).



Слика 3.5. Одређивање тачке $P * Q$

Уколико размотримо структуру скупа ових тачака у односу на операцију $*$ јасно је да није у питању група. Међутим, ако фиксирамо произвољну тачку O на елиптичкој кривој коју ћемо сматрати неутралом и мало другачије дефинишемо операцију, можемо добити структуру групе. Дакле, дефинишемо операцију на следећи начин

$$P + Q := O * (P * Q).$$

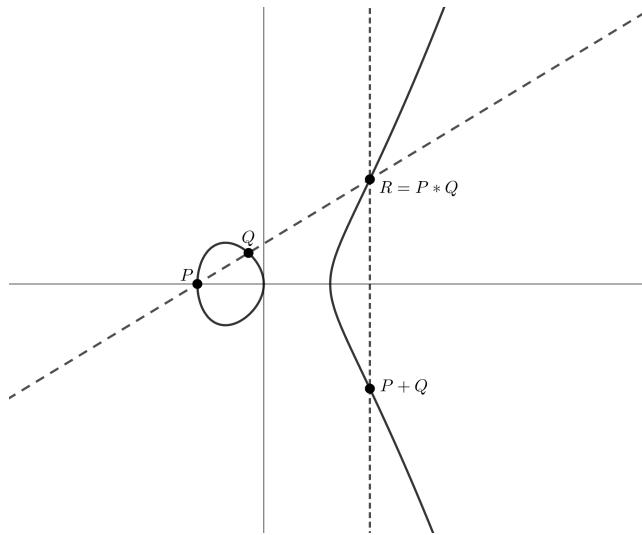
Овако дефинисану операцију називамо *сабирање тачака на елиптичкој кривој*.

Посматрајмо сада шта је пресек криве (12) и бесконачно далеке праве $z = 0$. Када заменимо $z = 0$ у (12) добијамо једначину $x^3 = 0$. То значи да елиптичка крива и бесконачно далека права имају троструки пресек у тачки $(0 : 1 : 0)$. Узмимо ту тачку да буде тачка O .

Размотримо још како изгледа сабирање тачака дефинисано на претходно описан начин. Нека су P и Q две тачке на елиптичкој кривој E . Да бисмо добили тачку $P + Q$ прво треба да нађемо тачку $P * Q$ која представља трећу пресечну тачку праве PQ и криве E . Даље, права кроз $P * Q$ и O ће бити вертикална права кроз тачку $P + Q$. И коначно, тачка $P + Q$ ће бити трећа пресечна тачка те праве и криве E .

Напомени још и да дефинисану операцију можемо записати и на следећи начин: $P + Q + R = O$ ако и само ако су тачке P, Q и R колинеарне.

На слици 3.6 је илустрован групни закон на елиптичкој кривој $y^2z = x^3 - xz^2$.

Слика 3.6. Групни закон на елиптичкој кривој $y^2z = x^3 - xz^2$

Теорема 3.7 Свака елиптичка крива је d -конструктибилна за свако $d > 0$.

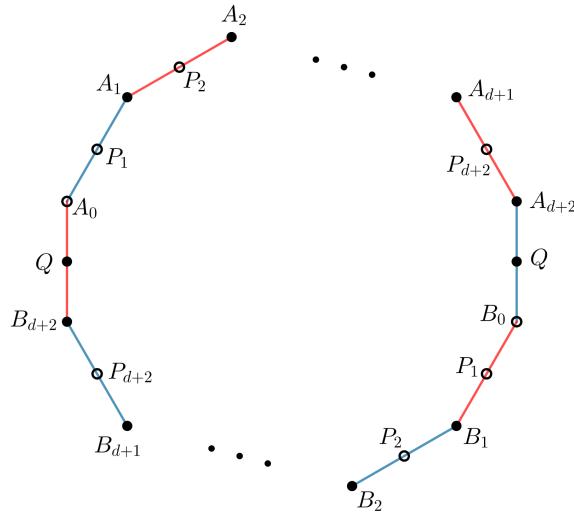
Доказ: Како бисмо доказали да је дата елиптичка крива E d -конструктибилна, потребно је да одредимо $d+3$ плаве и $d+3$ црвене праве које се секу у $(d+3)^2$ различитих тачака од којих је $3(d+3)$ на кривој E . Уколико то обезбедимо, како је елиптичка крива иредуцибилна можемо применити Теорему 3.4 на основу које постоји крива S степена d која пролази кроз преостале $(d+3)^2 - 3(d+3)$ пресечне тачке црвених и плавих правих те је крива E d -конструктибилна.

Да бисмо одредили $d+3$ плаве и $d+3$ црвене праве које се секу у $(d+3)^2$ различитих тачака кренућемо од две произвољне тачке A_0 и B_0 криве E . Затим ћемо изабрати тачку P_1 и одредити трећу пресечну тачку правих A_0P_1 и B_0P_1 са кривом E . Означићемо те тачке са A_1 и B_1 . У наставку бирајмо тачку P_2 , и одређујемо тачке A_2 и B_2 . За њих аналогно претходном узимамо трећу пресечну тачку правих A_1P_2 и B_1P_2 са кривом E . Приликом избора тачке P_1 , а затим и тачке P_2 морамо водити рачуна да све до тада одређене тачке буду међусобно различите. Описани поступак настављамо бирајући редом тачке P_i и одређујући A_i и B_i за $i = 3, \dots, d+2$, наравно водећи рачуна о последњој примедби.

Овим смо одредили $2 + 3(d+2) = 3d+8$ од $3(d+3)$ тачака на кривој E , а да бисмо одредили последњу потребну тачку Q искористићемо групни закон на елиптичкој кривој.

У зависности од тога да ли је d парно или непарно црвене и плаве праве конструишимо на један од следећа два начина.

Када је d парно након избора тачака A_0 и B_0 бирајмо редом тачке P_i и одређујемо $A_i = A_{i-1}P_i \cap E$ и $B_i = B_{i-1}P_i \cap E$ за $i = 1, \dots, d+2$. На овај начин формирајмо полигон чија су темена тачке A_i и B_i , а чије ће ивице одговарати црвеним и плавим правама (видети слику 3.7).



Слика 3.7. Полигон са $2(d+3)$ ивица које одговарају црвених и плавим правим и теменима A_i и B_i за $i = 0, \dots, d+2$. Кружићи представљају тачке које бирајмо, а црне тачке тачке одређене њиховим избором.

Као што претходна слика и наговештава праве A_0B_{d+2} и B_0A_{d+2} секу криву E у истој тачки, и управо ту тачку узимамо за тачку Q . Покажимо то коришћењем групног закона на елиптичкој кривој.

Наиме, како су A_0 , P_1 и A_1 колинеарне важи:

$$A_0 + P_1 + A_1 = O \implies A_1 = -A_0 - P_1.$$

Слично, из колинеарности тачака A_1 , P_2 и A_2 добијамо:

$$A_1 + P_2 + A_2 = O \implies A_2 = -A_1 - P_2 = -(-A_0 - P_1) - P_2 = A_0 + P_1 - P_2.$$

Затим

$$A_2 + P_3 + A_3 = O \implies A_3 = -A_2 - P_3 = -(A_0 + P_1 - P_2) - P_3 = -A_0 - P_1 + P_2 - P_3.$$

Наставимо ли даље добијамо:

$$A_{d+2} = A_0 + P_1 - P_2 + \dots - P_{d+2}. \quad (13)$$

Сасвим слично је и

$$B_{d+2} = B_0 + P_1 - P_2 + \dots - P_{d+2}. \quad (14)$$

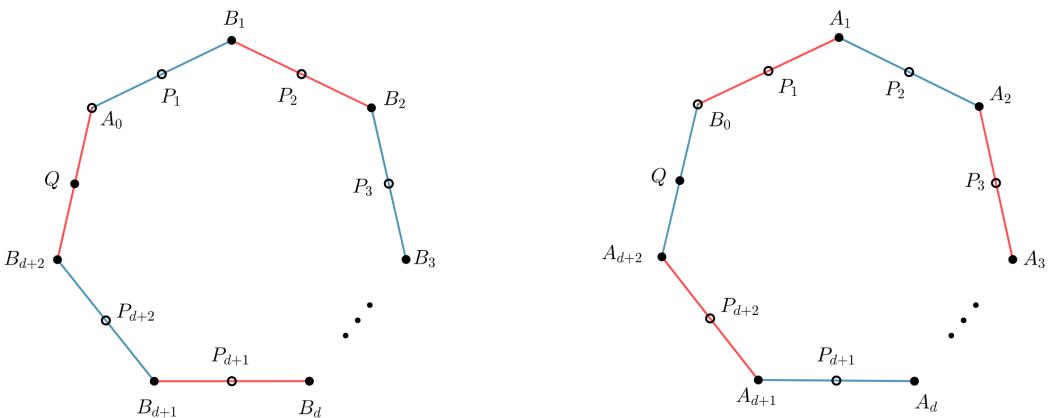
Претпоставимо сада да је тачка Q пресечна тачка праве A_0B_{d+2} и криве E , и покажимо да ће она припадати и правој B_0A_{d+2} .

Кренемо ли од колинеарности тачака A_0 , Q , B_{d+2} и искористимо ли (13) и (14) добијамо:

$$\begin{aligned} Q &= -A_0 - B_{d+2} \\ &= -A_0 - (B_0 + P_1 - P_2 + \dots - P_{d+2}) \\ &= -B_0 - (A_0 + P_1 - P_2 + \dots - P_{d+2}) \\ &= -B_0 - A_{d+2}, \end{aligned}$$

чиме смо доказали да су B_0 , Q и A_{d+2} колинеарне.

Вратимо ли се на слику 3.7 приметићемо да свако теме полигона лежи на пресеку једне црвене и једне плаве праве, што важи и за тачке P_i као и за тачку Q јер је број ивица између A_0 и B_0 непаран. Дакле, свака од тачака која ће лежати на кривој E биће пресек једне црвене и једне плаве праве као што смо и желели. Но, у случају да је d непарно употребом претходно описаног начина за избор тачака на кривој E наилазимо на мали проблем. Наиме, како би тада између A_0 и B_0 постојао паран број ивица тачке P_i и тачка Q би лежале на пресеку две праве исте боје. Стога нам је неопходна мала модификација како бисмо поменути ситуацију избегли. Укратко, уместо једног посматраћемо два полигона сваки са $d + 3$ ивице.



Слика 3.8. Два полигона са $d + 3$ ивице

У овој ситуацији, поред коришћења два полигона, суштинска разлика у односу на случај када је d било парно јесте што након избора тачака A_0 и B_0 и одабира тачке P_1 тачку A_1 сада добијамо као трећу пресечну тачку праве B_0P_1 и криве E , а тачку B_1 помоћу праве A_0P_1 . Остале тачке A_i за $i = 2, \dots, d + 2$ добијамо као и у случају парног d тј. избором P_i добијамо $A_i = A_{i-1}P_i \cap E$ и $B_i = B_{i-1}P_i \cap E$. Такође, тачка Q ће бити тачка у којој праве A_0B_{d+2} и B_0A_{d+2} секу криву E . Да је избор тачке Q ваљан показује се, као и у претодном случају, коришћењем познатих колинеарности. Дакле,

$$\begin{aligned} A_0 + P_1 + B_1 &= O \implies B_1 = -A_0 - P_1, \\ B_1 + P_2 + B_2 &= O \implies B_2 = -B_1 - P_2 = A_0 + P_1 - P_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

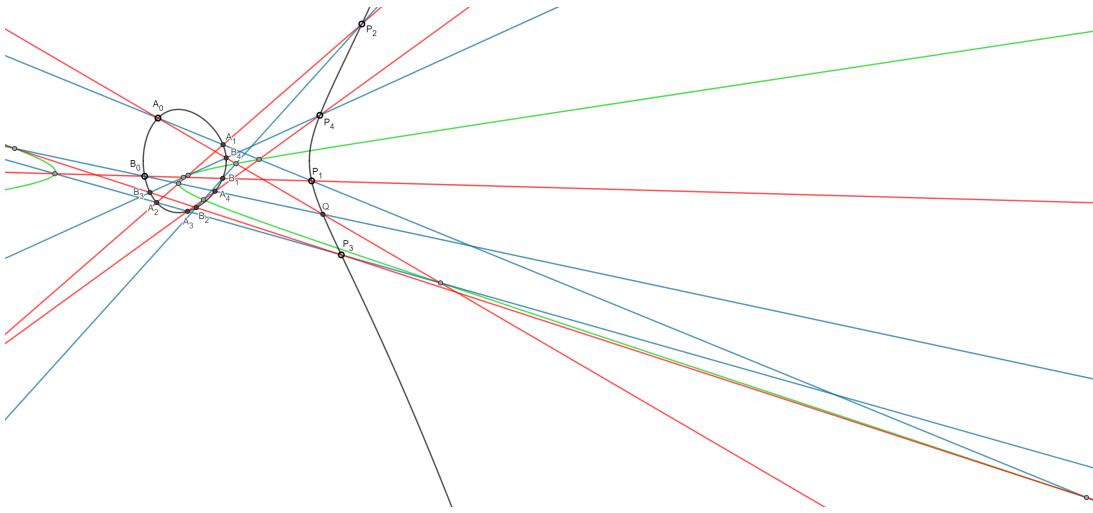
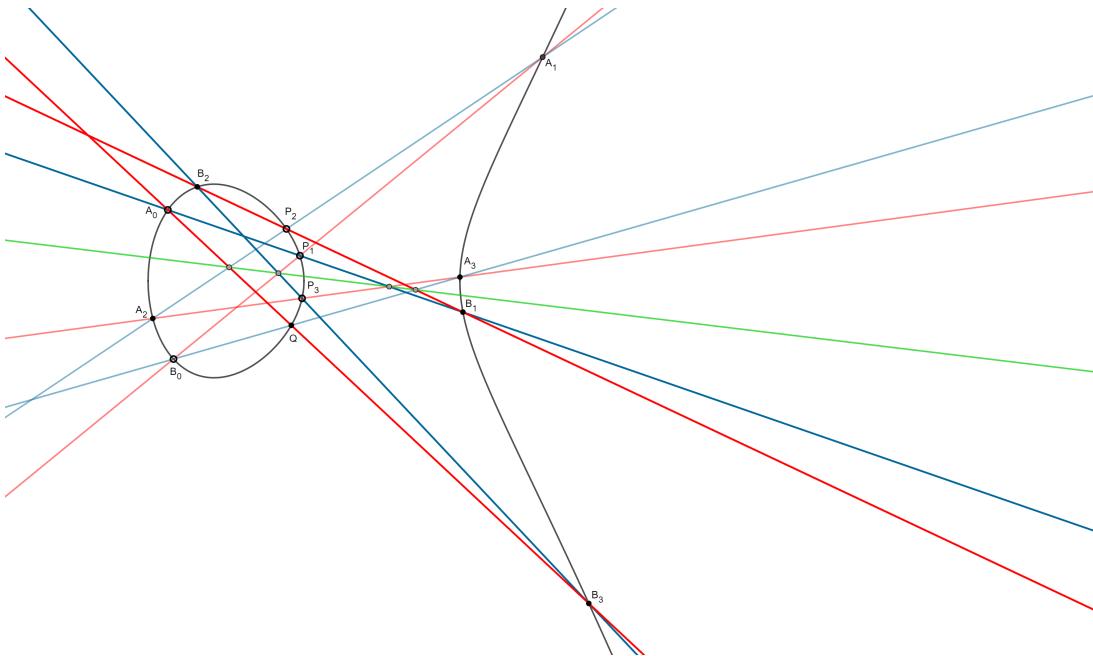
$$B_{d+1} + P_{d+2} + B_{d+2} = O \implies B_{d+2} = -A_0 - P_1 + P_2 + \dots - P_{d+2}.$$

Стога је $B_{d+2} = -A_0 - P_1 + P_2 + \dots - P_{d+2}$ и слично $A_{d+2} = -B_0 - P_1 + P_2 + \dots - P_{d+2}$, па је и

$$\begin{aligned} Q &= -A_0 - B_{d+2} \\ &= -A_0 - (-A_0 - P_1 + P_2 + \dots - P_{d+2}) \\ &= -B_0 - (-B_0 - P_1 + P_2 + \dots - P_{d+2}) \\ &= -B_0 - A_{d+2}. \end{aligned}$$

На овај начин смо, и у случају када је d непарно, обезбедили да се свака од тачака која лежи на кривој E налази на пресеку једне црвене и једне плаве праве.

■

Слика 3.9. Пример за $d = 2$ Слика 3.10. Пример за $d = 1$

Детаљан приказ које конкретне ситуације треба избегавати како бисмо били сигурни да ћемо добити различите тачке могуће је пронаћи у раду [14].

Као последица претходне теореме показује се да је d -конструктибилност густа у степену 3.

Теорема 3.8 d -конструктибилност је густа у степену 3.

Доказ: Да бисмо доказали да је d -конструктибилност густа у степену 3 доволно је да покажемо да елиптичке криве чине Зариски отворен скуп у \mathbb{P}^9 са чијим тачкама идентификујемо криве степена 3. Стога, посматрајмо скуп

$$A = \{(F, P) \in \mathbb{P}^9 \times \mathbb{P}^2 \mid P \text{ је сингуларна тачка криве } F(x, y, z) = 0\}.$$

Познато је да је тачка P сингуларна тачака криве $F(x, y, z) = 0$ ако и само ако је $\frac{\partial F}{\partial x}(P) = \frac{\partial F}{\partial y}(P) = \frac{\partial F}{\partial z}(P) = 0$. Како су $\frac{\partial F}{\partial x}(P)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(P)$ и $\frac{\partial F}{\partial z}(P)$ бихомогени полиноми скуп $A \subset \mathbb{P}^9 \times \mathbb{P}^2$ је Зариски затворен скуп, те уколико посматрамо пројекцију $\pi_1 : \mathbb{P}^9 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^9$, пошто је слика алгебарског скупа алгебарски скуп, закључујемо да је и $\pi_1(A)$ Зариски затворен (видети нпр. [13]). Скуп $\pi_1(A)$ представља скуп сингуларних кривих степена 3, те је скуп глатких кривих степена 3 тј. елиптичких кривих Зариски отворен. ■

Закључак

Циљ овог мастер рада је да представимо како добро познате и једноставне теореме могу водити проучавању комплекснијих тема. Желели смо да прикажемо једну нит која повезује Папосову и Паскалову теорему са d -конструктибилним кривама, као и да пружимо преглед опсега степени за које је d -конструктибилност густа, односно за које је скоро свака крива d -конструктибилна. Доказали смо да то важи за степене 1, 2 и 3. Али, и да за $d \geq 3$ d -конструктибилност није густа у степену $d+4$ или вишим, за $d=2$ у степену 5 или вишим и за $d=1$ у степену 6 или вишим. Даље, како се степен повећава број d -конструктибилних кривих је све мањи. Претходно разматрање густине d -конструктибилности сугерише и да би могло бити истинито да је за свако d d -конструктибилност густа у степену 4, а како контрапример није пронађен може бити и да је свака крива степена мањег од 5 конструкцибилна. Међутим, те теме превазилазе оквир мастер рада, па се овде заустављамо на доказу да је d -конструктибилност густа у степену 3.

Литература

- [1] V. Andrejić: Projektivna geometrija, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2015.
- [2] Đ. Baralić, I. Spasojević: Illumination of Pascal's Hexagrammum and Octagrammum Mysticum, *Discrete & Computational Geometry* 53, 414–427, 2015.
- [3] N. Bokan, S. Vukmirović: Projektivna geometrija, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2007.
- [4] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer: *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, Washington, 1967.
- [5] H.S.M. Coxeter: Self-dual configurations and regular graphs, *Bulletin of the American Mathematical Society* 56, 413-455, 1950.
- [6] H. Crapo, J. Richter-Gebert: Automatic proving of geometric theorems, *Invariant Methods in Discrete and Computational Geometry*, N.L.White (ed.), Kluwer Academic Publisher, 167-196, 1995.
- [7] B. Grunbaum, G.C. Shephard: Ceva, Menelaus, and the Area Principle, *Mathematics Magazine* 68, 254-268, 1995.
- [8] J. Harris: *Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1992.
- [9] G. Katz: Curves in Cages: An Algebro-Geometric Zoo, *The American Mathematical Monthly*, 777-791, 2006.
- [10] J. Richter-Gebert: *Perspectives on Projective Geometry. A guided tour through real and complex geometry*, Springer, Berlin, 2011.
- [11] J. Richter-Gebert, T. Orendt: *Geometriekalküle*, Springer, Berlin, 2009.
- [12] J. Richter-Gebert: Mechanical Theorem Proving in Projective Geometry, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 13, 139–172, 1995.
- [13] I. Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry 1*, Springer, Berlin, 2013.
- [14] W. Traves: From Pascal's Theorem to d -Constructible Curves, *The American Mathematical Monthly* 120, 901-915, 2013.
- [15] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1977.