УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија 4

4. део: Важне теореме

Тијана Шукиловић

1. март 2020

Одређеност криве другог реда

- $\Gamma : a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0$: 6 коефицијената a_{ij}, хомогеност $\rightarrow$ 5 услова (једначина).

Одређеност криве другог реда

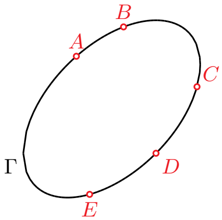
- $\Gamma : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$: 6 коефициената a_{ij}, хомогеност $\to$ 5 услова (једначина).
- $M \in \Gamma \;\to\;$ 1 линеарна једначина по a_{ij}.

Одређеност криве другог реда

- $\Gamma : a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0$: 6 коефициената a_{ij}, хомогеност $\to$ 5 услова (једначина).
- $M \in \Gamma \ \to \ 1$ линеарна једначина по a_{ij}.
- $\Gamma \cap p$ – највише две тачке $\longrightarrow$ сваке три тачке овалне криве су неколинеарне.

Одређеност криве другог реда

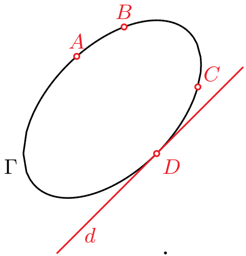
- $\Gamma : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$: 6 коефициената a_{ij}, хомогеност $\to$ 5 услова (једначина).
- $M \in \Gamma \ \to\ 1$ линеарна једначина по a_{ij}.
- $\Gamma \cap p$ – највише две тачке $\longrightarrow$ сваке три тачке овалне криве су неколинеарне.
- Γ – јединствено одређена са:



Слика 1: пет тачака од којих никоје три нису колинеарне

Одређеност криве другог реда

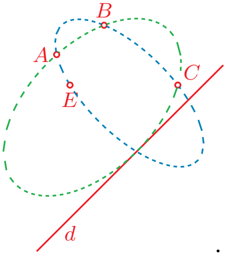
- $\Gamma : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$: 6 коефицијената a_{ij}, хомогеност $\rightarrow$ 5 услова (једначина).
- $M \in \Gamma \;\rightarrow\;$ 1 линеарна једначина по a_{ij}.
- $\Gamma \cap p$ – највише две тачке $\longrightarrow$ сваке три тачке овалне криве су неколинеарне.
- Γ – јединствено одређена са:



Слика 2: четири тачке у општем положају и тангента у једној од њих

Одређеност криве другог реда

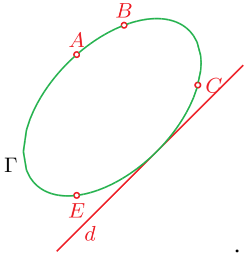
- $\Gamma: a_{11}x_1^2{+}a_{22}x_2^2{+}a_{33}x_3^2{+}2a_{12}x_1x_2{+}2a_{13}x_1x_3{+}2a_{23}x_2x_3{=}0$: 6 коефициената a_{ij}, хомогеност $\to$ 5 услова (једначина).
- $M \in \Gamma \ \to\ 1$ линеарна једначина по a_{ij}.
- $\Gamma \cap p$ – највише две тачке $\longrightarrow$ сваке три тачке овалне криве су неколинеарне.
- Пажња!



Слика 3: четири тачке у општем положају и тангента која не садржи ни једну од њих могу да одреде 0 кривих

Одређеност криве другог реда

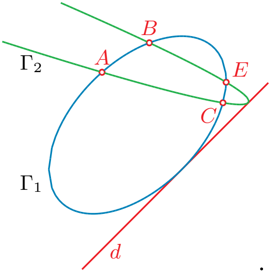
- $\Gamma : a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0$: 6 коефицијената a_{ij}, хомогеност $\to$ 5 услова (једначина).
- $M \in \Gamma \ \to$ 1 линеарна једначина по a_{ij}.
- $\Gamma \cap p$ – највише две тачке $\longrightarrow$ сваке три тачке овалне криве су неколинеарне.
- Пажња!



Слика 4: четири тачке у општем положају и тангента која не садржи ни једну од њих могу да одреде 1 криву

Одређеност криве другог реда

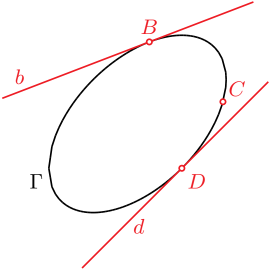
- $\Gamma : a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0$: 6 коефициената a_{ij}, хомогеност $\to$ 5 услова (једначина).
- $M \in \Gamma \ \to \ 1$ линеарна једначина по a_{ij}.
- $\Gamma \cap p$ – највише две тачке $\longrightarrow$ сваке три тачке овалне криве су неколинеарне.
- Пажња!



Слика 5: четири тачке у општем положају и тангента која не садржи ни једну од њих могу да одреде 2 криве

Одређеност криве другог реда

- $\Gamma : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$: 6 коефициената a_{ij}, хомогеност $\to$ 5 услова (једначина).
- $M \in \Gamma \ \to \ 1$ линеарна једначина по a_{ij}.
- $\Gamma \cap p$ – највише две тачке $\longrightarrow$ сваке три тачке овалне криве су неколинеарне.
- Γ – јединствено одређена са:



Слика 6: три неколинеарне тачке и тангенте у две те тачке

Крива другог реда и дворазмера правих

Лема 1.1 (Афини смисао дворазмере правих)

Нека су a, b, c, d праве у допуњеној афиној равни које садрже коначну тачку O. Тада је

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin \angle aOc}{\sin \angle cOb} : \frac{\sin \angle aOd}{\sin \angle dOb}.$$

Крива другог реда и дворазмера правих

Лема 1.1 (Афини смисао дворазмере правих)

Нека су a, b, c, d праве у допуњеној афиној равни које садрже коначну тачку O. Тада је

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin \angle aOc}{\sin \angle cOb} : \frac{\sin \angle aOd}{\sin \angle dOb}.$$

Доказ:

$$p \not\ni O : p \times a = \{A\}, p \times b = \{B\}, p \times c = \{C\}, p \times d = \{D\}$$

$$(a, b, c, d) = (A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{P(\triangle ACO)}{P(\triangle CBO)} : \frac{P(\triangle ADO)}{P(\triangle DBO)}$$

$$= \frac{AO \cdot CO \sin \angle aOc}{CO \cdot BO \sin \angle cOb} : \frac{AO \cdot DO \sin \angle aOd}{DO \cdot BO \sin \angle dOb}$$

$$= \frac{\sin \angle aOc}{\sin \angle cOb} : \frac{\sin \angle aOd}{\sin \angle dOb}.$$

Шарлова теорема

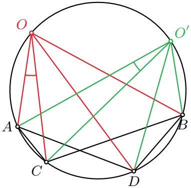
Теорема 1.1 (Шарлова)

Нека је O' тачка, а $\Gamma = \Gamma(A, B, C, D, O)$ овална крива другог реда у пројективној равни. Тада

$$O' \in \Gamma \iff (OA, OB, OC, OD) = (O'A, O'B, O'C, O'D).$$

Доказ:

$(\Longrightarrow)$ Дворазмера је пројективна инваријанта, тако да је довољно доказати да тврђење важи за круг.



Слика 7: Доказ за круг

- Углови над истом тетивом су подударни.
- Афини смисао дворазмере.

Шарлова теорема

Теорема 1.1 (Шарлова)

Нека је O' тачка, а $\Gamma = \Gamma(A, B, C, D, O)$ овална крива другог реда у пројективној равни. Тада

$$O' \in \Gamma \iff (OA, OB, OC, OD) = (O'A, O'B, O'C, O'D).$$

Доказ:

$(\Longleftarrow)$ $(OA, OB, OC, OD) {=} (O'A, O'B, O'C, O'D)$ и $\Gamma(A, B, C, O, O')$.

$$D \notin \Gamma \Longrightarrow \Gamma \cap OD = D_1,\ \ D_1 \neq D$$
$$(O'A, O'B, O'C, O'D) = (OA, OB, OC, OD) = (OA, OB, OC, OD_1)$$
$$= (O'A, O'B, O'C, O'D_1)$$
$$\Longrightarrow O'D = O'D_1 \Longrightarrow \underbrace{O, O', D_1}_{\in\Gamma}, D \text{ – колинеарне. Контрадикција!}$$

Паскалова теорема

Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \;\; BC \times EF = Q, \;\; CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Паскалова теорема

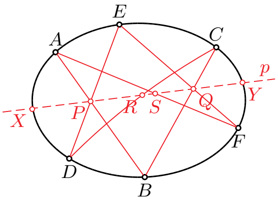
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \;\; BC \times EF = Q, \;\; CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longrightarrow$)



$$AB \times ED = P, \qquad BC \times EF = Q$$
$$p = PQ, \qquad \Gamma \cap p = \{X, Y\}$$
$$AF \times p = S, \qquad DC \times p = R.$$

Слика 7: $A, B, C, D, E, F \in \Gamma$

Паскалова теорема

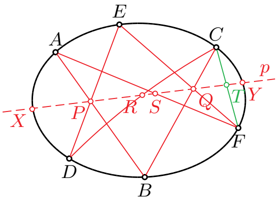
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \;\; BC \times EF = Q, \;\; CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longrightarrow$)



Слика 7: $A, B, C, D, E, F \in \Gamma$

$$CF \times p = T$$

$$(X, P, S, Y) = (AX, AB, AF, AY)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (CX, CB, CF, CY) = (X, Q, T, Y)$$

$$= (FX, FE, FC, FY)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (DX, DE, DC, DY)$$

$$= (X, P, R, Y)$$

Паскалова теорема

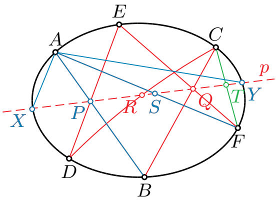
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \;\; BC \times EF = Q, \;\; CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longrightarrow$)



Слика 7: $A, B, C, D, E, F \in \Gamma$

$$CF \times p = T$$

$$(X,P,S,Y) = (AX, AB, AF, AY)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (CX, CB, CF, CY) = (X, Q, T, Y)$$

$$= (FX, FE, FC, FY)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (DX, DE, DC, DY)$$

$$= (X, P, R, Y)$$

Паскалова теорема

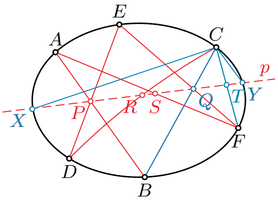
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \ \ BC \times EF = Q, \ \ CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longrightarrow$)



Слика 7: $A, B, C, D, E, F \in \Gamma$

$$CF \times p = T$$

$$(X, P, S, Y) = (AX, AB, AF, AY)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (CX, CB, CF, CY) = (X, Q, T, Y)$$

$$= (FX, FE, FC, FY)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (DX, DE, DC, DY)$$

$$= (X, P, R, Y)$$

Паскалова теорема

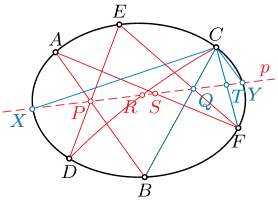
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \;\; BC \times EF = Q, \;\; CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longrightarrow$)



Слика 7: $A, B, C, D, E, F \in \Gamma$

$$CF \times p = T$$

$$(X,P,S,Y) = (AX,AB,AF,AY)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (CX,CB,CF,CY) = (X,Q,T,Y)$$

$$= (FX,FE,FC,FY)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (DX,DE,DC,DY)$$

$$= (X,P,R,Y)$$

Паскалова теорема

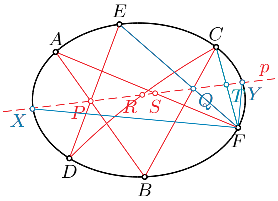
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P,\ \ BC \times EF = Q,\ \ CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longrightarrow$)



Слика 7: $A, B, C, D, E, F \in \Gamma$

$$CF \times p = T$$

$$(X, P, S, Y) = (AX, AB, AF, AY)$$

$$\stackrel{\text{Ш}}{=} (CX, CB, CF, CY) = (X, Q, T, Y)$$

$$= (FX, FE, FC, FY)$$

$$\stackrel{\text{Ш}}{=} (DX, DE, DC, DY)$$

$$= (X, P, R, Y)$$

Паскалова теорема

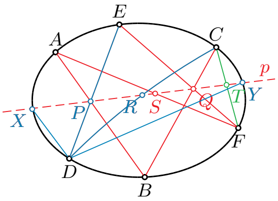
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P,\ \ BC \times EF = Q,\ \ CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longrightarrow$)



Слика 7: $A, B, C, D, E, F \in \Gamma$

$$CF \times p = T$$

$$(X, P, S, Y) = (AX, AB, AF, AY)$$

$$\stackrel{\text{Ш}}{=} (CX, CB, CF, CY) = (X, Q, T, Y)$$

$$= (FX, FE, FC, FY)$$

$$\stackrel{\text{Ш}}{=} (DX, DE, DC, DY)$$

$$= (X, P, R, Y)$$

Паскалова теорема

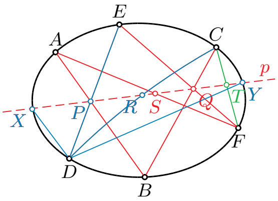
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \;\; BC \times EF = Q, \;\; CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longrightarrow$)



Слика 7: $A, B, C, D, E, F \in \Gamma$

$$CF \times p = T$$

$$(X, P, S, Y) = (AX, AB, AF, AY)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (CX, CB, CF, CY) = (X, Q, T, Y)$$

$$= (FX, FE, FC, FY)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (DX, DE, DC, DY)$$

$$= (X, P, R, Y)$$

Паскалова теорема

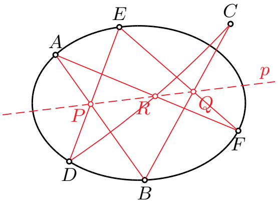
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P,\ \ BC \times EF = Q,\ \ CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longleftarrow$)



Слика 8: P, Q, R – колинеарне

$$\Gamma = \Gamma(A, B, D, E, F),\ \ T_1 = AD \times p$$

$$(CX, CY, CD, CB) = (X, Y, R, Q)$$

$$\stackrel{\text{Ш}}{=} (FX, FY, FA, FE)$$

$$\stackrel{\text{Ш}}{=} (DX, DY, DA, DE) = (X, Y, T_1, P)$$

$$\stackrel{\text{Ш}}{=} (AX, AY, AD, AB) \stackrel{\text{Ш}}{\Longrightarrow} C \in \Gamma$$

Паскалова теорема

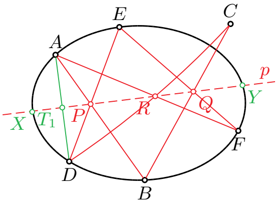
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \;\; BC \times EF = Q, \;\; CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longleftarrow$)



Слика 8: P, Q, R – колинеарне

$$\Gamma = \Gamma(A, B, D, E, F), \;\; T_1 = AD \times p$$

$$(CX, CY, CD, CB) = (X, Y, R, Q)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (FX, FY, FA, FE)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (DX, DY, DA, DE) = (X, Y, T_1, P)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (AX, AY, AD, AB) \overset{\text{Ш}}{\Longrightarrow} C \in \Gamma$$

Паскалова теорема

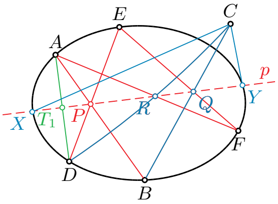
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \ \ BC \times EF = Q, \ \ CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longleftarrow$)



Слика 8: P, Q, R – колинеарне

$$\Gamma = \Gamma(A, B, D, E, F), \ T_1 = AD \times p$$

$$(CX, CY, CD, CB) = (X, Y, R, Q)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=}(FX, FY, FA, FE)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=}(DX, DY, DA, DE) = (X, Y, T_1, P)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=}(AX, AY, AD, AB) \overset{\text{Ш}}{\Longrightarrow} C \in \Gamma$$

Паскалова теорема

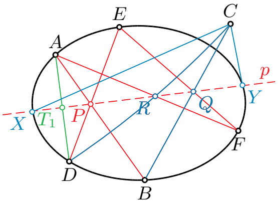
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P,\ \ BC \times EF = Q,\ \ CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longleftarrow$)



Слика 8: P, Q, R – колинеарне

$$\Gamma = \Gamma(A, B, D, E, F),\ \ T_1 = AD \times p$$

$$(CX, CY, CD, CB) = (X, Y, R, Q)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=}(FX, FY, FA, FE)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=}(DX, DY, DA, DE) = (X, Y, T_1, P)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=}(AX, AY, AD, AB) \overset{\text{Ш}}{\Longrightarrow} C \in \Gamma$$

Паскалова теорема

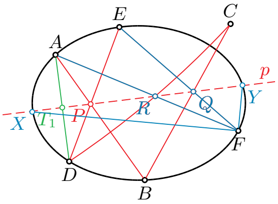
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \ \ BC \times EF = Q, \ \ CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longleftarrow$)



Слика 8: P, Q, R – колинеарне

$$\Gamma = \Gamma(A, B, D, E, F), \ \ T_1 = AD \times p$$

$$(CX, CY, CD, CB) = (X, Y, R, Q)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (FX, FY, FA, FE)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (DX, DY, DA, DE) = (X, Y, T_1, P)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (AX, AY, AD, AB) \overset{\text{Ш}}{\Longrightarrow} C \in \Gamma$$

Паскалова теорема

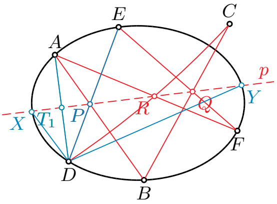
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P,\ \ BC \times EF = Q,\ \ CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longleftarrow$)



Слика 8: P, Q, R – колинеарне

$$\Gamma = \Gamma(A, B, D, E, F),\ \ T_1 = AD \times p$$

$$(CX, CY, CD, CB) = (X, Y, R, Q)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (FX, FY, FA, FE)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (DX, DY, DA, DE) = (X, Y, T_1, P)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (AX, AY, AD, AB) \overset{\text{Ш}}{\Longrightarrow} C \in \Gamma$$

Паскалова теорема

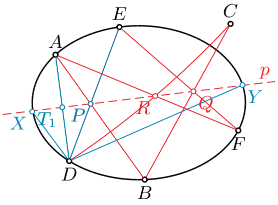
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \;\; BC \times EF = Q, \;\; CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longleftarrow$)



Слика 8: P, Q, R – колинеарне

$$\Gamma = \Gamma(A,B,D,E,F), \;\; T_1 = AD \times p$$

$$(CX, CY, CD, CB) = (X, Y, R, Q)$$

$$\stackrel{Ш}{=} (FX, FY, FA, FE)$$

$$\stackrel{Ш}{=} (DX, DY, DA, DE) = (X, Y, T_1, P)$$

$$\stackrel{Ш}{=} (AX, AY, AD, AB) \stackrel{Ш}{\Longrightarrow} C \in \Gamma$$

Паскалова теорема

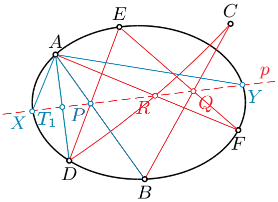
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P,\ \ BC \times EF = Q,\ \ CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longleftarrow$)



Слика 8: P, Q, R – колинеарне

$$\Gamma = \Gamma(A, B, D, E, F),\ \ T_1 = AD \times p$$

$$(CX, CY, CD, CB) = (X, Y, R, Q)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (FX, FY, FA, FE)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (DX, DY, DA, DE) = (X, Y, T_1, P)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (AX, AY, AD, AB) \overset{\text{Ш}}{\Longrightarrow} C \in \Gamma$$

Паскалова теорема

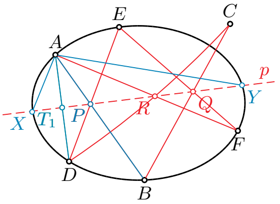
Теорема 1.2 (Паскалова)

Шестотеменик $ABCDEF$ је уписан у овалну криву другог реда акко су пресеци његових наспрамних ивица

$$AB \times DE = P, \;\; BC \times EF = Q, \;\; CD \times FA = R \tag{1}$$

колинеарне тачке.

Доказ ($\Longleftarrow$)



Слика 8: P, Q, R – колинеарне

$$\Gamma = \Gamma(A, B, D, E, F), \;\; T_1 = AD \times p$$

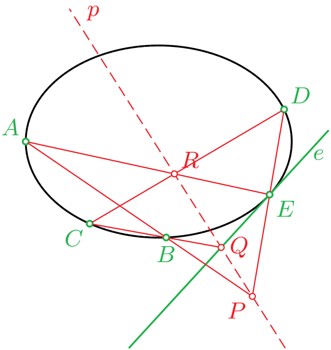
$$(CX, CY, CD, CB) = (X, Y, R, Q)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (FX, FY, FA, FE)$$

$$\overset{\text{Ш}}{=} (DX, DY, DA, DE) = (X, Y, T_1, P)$$

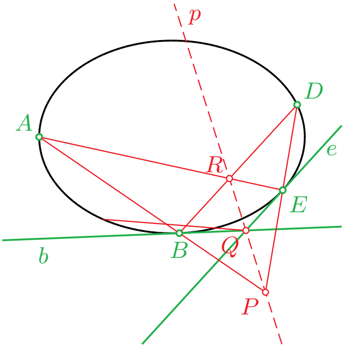
$$\overset{\text{Ш}}{=} (AX, AY, AD, AB) \overset{\text{Ш}}{\Longrightarrow} C \in \Gamma$$

Дегенерисани случајеви



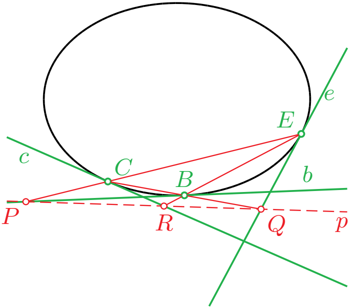
Слика 9: Паскалова теорема за петотеменик $ABCDEE$

Дегенерисани случајеви



Слика 9: Паскалова теорема за четворотеменик $ABBDEE$

Дегенерисани случајеви



Слика 9: Паскалова теорема за тротеменик $BBCCEE$

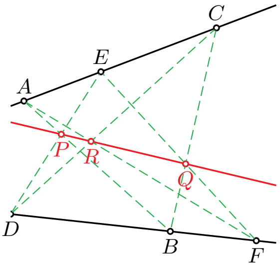
Паповова теорема

Паскалова теорема важи и за дегенерисану криву:

Теорема 1.3 (Папосова)

Нека су AEC и DBF две тројке колинеарних тачака. Тада су колинеарне и пресечне тачке

$$AB \times DE = P, \;\; BC \times EF = Q, \;\; CD \times FA = R.$$



Слика 10: Папосова теорема (доказ за домаћи)

Криве друге класе

Крива друге класе се дефинише дуално кривој другог реда.

Дефиниција 1.1

Ако је G регуларна симетрична матрица, недегенерисана крива друге класе $\bar{\Gamma}(G)$ је скуп правих $\bar{\Gamma}(G)=\{p \,|\, p^T G p = 0\}$.

Криве друге класе

Крива друге класе се дефинише дуално кривој другог реда.

Дефиниција 1.1

Ако је G регуларна симетрична матрица, недегенерисана крива друге класе $\bar{\Gamma}(G)$ је скуп правих $\bar{\Gamma}(G)=\{p \,|\, p^T G p = 0\}$.

Теорема 1.4 (Маклоренова)

Крива друге класе $\bar{\Gamma}(G)$ је скуп тангената на недегенерисану криву другог реда $\Gamma(G^{-1})$.

Криве друге класе

Крива друге класе се дефинише дуално кривој другог реда.

Дефиниција 1.1

Ако је G регуларна симетрична матрица, недегенерисана крива друге класе $\bar{\Gamma}(G)$ је скуп правих $\bar{\Gamma}(G)=\{p \,|\, p^T G p = 0\}$.

Теорема 1.4 (Маклоренова)

Крива друге класе $\bar{\Gamma}(G)$ је скуп тангената на недегенерисану криву другог реда $\Gamma(G^{-1})$.

Доказ

t – тангента на криву $\Gamma(G^{-1})$ у тачки X, $\lambda t = G^{-1}X$:

$$t^T G t = (G^{-1}X)^T G (G^{-1}X) = X^T G^{-T} G G^{-1} X = X^T G^{-1} X$$

Одређеност криве друге класе

Из једне тачке постоје највише две тангенте на овалну криву
$\rightarrow$ сваке три тангенте на овалну криву су неконкурентне.

Одређеност криве друге класе

Из једне тачке постоје највише две тангенте на овалну криву $\rightarrow$ сваке три тангенте на овалну криву су неконкурентне.

Овална крива друге класе јединствено је одређена са:

Одређеност криве друге класе

Из једне тачке постоје највише две тангенте на овалну криву $\to$ сваке три тангенте на овалну криву су неконкурентне.

Овална крива друге класе јединствено је одређена са:

- пет тангенати од којих никоје три нису конкурентне;

Одређеност криве друге класе

Из једне тачке постоје највише две тангенте на овалну криву $\rightarrow$ сваке три тангенте на овалну криву су неконкурентне.

Овална крива друге класе јединствено је одређена са:

- пет тангенати од којих никоје три нису конкурентне;
- четири тангенте (у општем положају) и додирном тачком једне од њих;

Одређеност криве друге класе

Из једне тачке постоје највише две тангенте на овалну криву $\rightarrow$ сваке три тангенте на овалну криву су неконкурентне.

Овална крива друге класе јединствено је одређена са:

- пет тангенати од којих никоје три нису конкурентне;
- четири тангенте (у општем положају) и додирном тачком једне од њих;
- три (неконкурентне) тангенте и додирним тачкама две тангенте.

Одређеност криве друге класе

Из једне тачке постоје највише две тангенте на овалну криву $\rightarrow$ сваке три тангенте на овалну криву су неконкурентне.

Овална крива друге класе јединствено је одређена са:

- пет тангенати од којих никоје три нису конкурентне;
- четири тангенте (у општем положају) и додирном тачком једне од њих;
- три (неконкурентне) тангенте и додирним тачкама две тангенте.

Скицирати!

Одређеност криве друге класе

Из једне тачке постоје највише две тангенте на овалну криву $\rightarrow$ сваке три тангенте на овалну криву су неконкурентне.

Овална крива друге класе јединствено је одређена са:

- пет тангенати од којих никоје три нису конкурентне;
- четири тангенте (у општем положају) и додирном тачком једне од њих;
- три (неконкурентне) тангенте и додирним тачкама две тангенте.

Да би ефективно одредили овалну криву којој је дато пет тангенти, прво одредимо криву друге класе $\Gamma(G)$ којој припадају те тангенте.

Одређеност криве друге класе

Из једне тачке постоје највише две тангенте на овалну криву $\rightarrow$ сваке три тангенте на овалну криву су неконкурентне.

Овална крива друге класе јединствено је одређена са:

- пет тангенати од којих никоје три нису конкурентне;
- четири тангенте (у општем положају) и додирном тачком једне од њих;
- три (неконкурентне) тангенте и додирним тачкама две тангенте.

Да би ефективно одредили овалну криву којој је дато пет тангенти, прво одредимо криву друге класе $\Gamma(G)$ којој припадају те тангенте. Матрица тражене криве је G^{-1}.

Брианшонова теорема

На основу принципа дуалности, важи Паскалова теорема за криве друге класе:

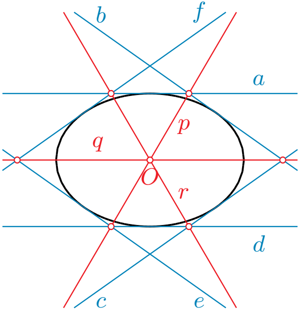
Теорема 1.5 (Брианшонова)

Шестостраник $abcdef$ је описан око овалне криве другог реда акко су праве одређене наспрамним теменима тог шестостраника

$$(a \times b)(d \times e) = p, \quad (b \times c)(e \times f) = q, \quad (c \times d)(f \times a) = r$$

конкурентне.

Брианшонова теорема



Слика 11: Брианшонова теорема за шестостраник $abcdef$

Брианшонова теорема важи и за дегенерисане случајеве петостраника, четвоространика и тространика. Скицирати!

Аксиоме инциденције

$I1)$ Две тачке одређују јединствену праву.

Аксиоме инциденције

$I1)$ Две тачке одређују јединствену праву.

$I2)$ Сваке две праве у равни се секу у једној тачки.

Аксиоме инциденције

$I1)$ Две тачке одређују јединствену праву.

$I2)$ Сваке две праве у равни се секу у једној тачки.

$I3)$ У пројективној равни постоје четири тачке у општем положају.

Аксиоме инциденције

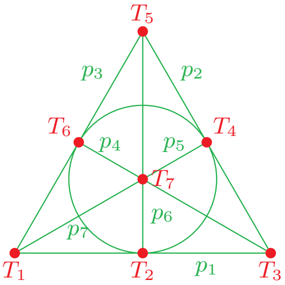
- $I1$) Две тачке одређују јединствену праву.
- $I2$) Сваке две праве у равни се секу у једној тачки.
- $I3$) У пројективној равни постоје четири тачке у општем положају.

Као последица аксиоме $I2$ нема паралелности у геометрији пројективне равни.

Модели пројективне равни

Фанова раван

Најједноставнији модел пројективне равни се састоји од 7 тачака и 7 правих – свака права садржи 3 тачке и свака тачка је инцидентна са 3 праве.



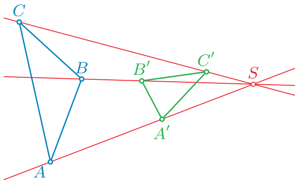
Слика 12: Фанова раван

Центар и оса перспективе

Дефиниција 2.1

Тротеменици ABC и $A'B'C'$ имају центар перспективе ако су праве одређене одговарајућим теменима конкурентне:

$$AA' \times BB' \times CC' = \{S\}.$$



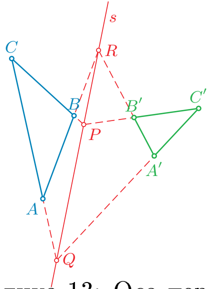
Слика 13: Центар перспективе

Центар и оса перспективе

Дефиниција 2.1

Тротеменици ABC и $A'B'C'$ имају осу перспективе ако су тачке пресека одговарајућих ивица колинеарне:

$$AB \times A'B' = R, \;\; AC \times A'C' = Q, \;\; BC \times B'C' = P \in s.$$



Слика 13: Оса перспективе

Дезаргова теорема

Теорема 2.1 (Дезаргова)

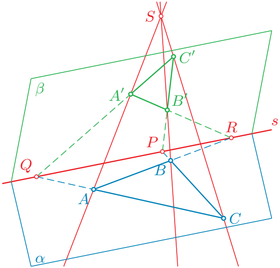
Ако два тротеменика имају центар перспективе, тада они имају и осу перспективе.

Дезаргова теорема

Теорема 2.1 (Дезаргова)

Ако два тротеменика имају центар перспективе, тада они имају и осу перспективе.

Доказ



Слика 14: Случај 1

Случај 1: Тротеменици припадају различитим равнима
$ABC \subset \alpha$, $A'B'C' \subset \beta$, $\alpha \neq \beta$

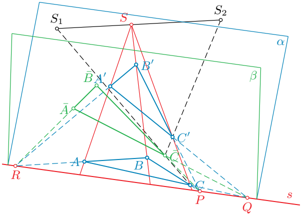
$\alpha \cap \beta = s$, $\quad AA' \times BB' \times CC' = \{S\}$
A, A', B, B' – копланарне
$\Rightarrow\ R = AB \times A'B' \in \alpha \cap \beta = s$
Слично, $P, Q \in s\ \Rightarrow\ s$ – оса

Дезаргова теорема

Теорема 2.1 (Дезаргова)

Ако два тротеменика имају центар перспективе, тада они имају и осу перспективе.

Доказ



Слика 15: Случај 2

Случај 2: Тротеменици припадају истој равни $ABC, A'B'C' \subset \alpha$

S_1, S_2, S – колинеарне: $S_1S_2 \not\in \alpha$

$S_1S_2 \cap CC' = \{S\} \Rightarrow S_1C \cap S_2C' = \{\bar{C}\}$

Слично се добијају $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Доказати: $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \subset \beta, \beta \neq \alpha$.

$ABC, \bar{A}\bar{B}\bar{C}, S_1 \xrightarrow{1)} P, Q, R \in \alpha \cap \beta$

$A'B'C', \bar{A}\bar{B}\bar{C}, S_2 \xrightarrow{1)} P', Q', R' \in \alpha \cap \beta$

$\{P\} = BC \cap \bar{B}\bar{C} = \alpha \cap \bar{B}\bar{C} = B'C' \cap \bar{B}\bar{C} = \{P'\}$

Слично, $Q = Q', R = R'$

Обрнута Дезаргова теорема

Да ли Дезаргова теорема важи у Фановој равни?

Обрнута Дезаргова теорема

Да ли Дезаргова теорема важи у Фановој равни? НЕ!
Зашто?

Обрнута Дезаргова теорема

Да ли Дезаргова теорема важи у Фановој равни?

Дезаргова теорема се може доказати у $\mathbb{R}P^2$ директним рачуном, без употребе простора $\mathbb{R}P^3 \supset \mathbb{R}P^2$.

Обрнута Дезаргова теорема

Да ли Дезаргова теорема важи у Фановој равни?
Дезаргова теорема се може доказати у $\mathbb{R}P^2$ директним рачуном, без употребе простора $\mathbb{R}P^3 \supset \mathbb{R}P^2$.

Теорема 2.2 (обрнута Дезаргова теорема)

Ако два тротеменика имају осу перспективе, тада они имају и центар перспективе.

Обрнута Дезаргова теорема

Да ли Дезаргова теорема важи у Фановој равни?
Дезаргова теорема се може доказати у $\mathbb{R}P^2$ директним рачуном, без употребе простора $\mathbb{R}P^3 \supset \mathbb{R}P^2$.

Теорема 2.2 (обрнута Дезаргова теорема)

Ако два тротеменика имају осу перспективе, тада они имају и центар перспективе.

Дезаргова и обрнута Дезаргова теорема су дуакне формално, али не и суштински.
Доказ обрнуте теореме погледати за домаћи (није обавезно).

Обрнута Дезаргова теорема

Да ли Дезаргова теорема важи у Фановој равни?
Дезаргова теорема се може доказати у $\mathbb{R}P^2$ директним рачуном, без употребе простора $\mathbb{R}P^3 \supset \mathbb{R}P^2$.

Теорема 2.2 (обрнута Дезаргова теорема)

Ако два тротеменика имају осу перспективе, тада они имају и центар перспективе.

Дезаргова и обрнута Дезаргова теорема су дуакне формално, али не и суштински.
Доказ обрнуте теореме погледати за домаћи (није обавезно).

Равни у којима не важи Дезаргова теорема се називају не-Дезаргове равни (пример: раван Моултона). Те равни се не могу проширити на пројективни простор (у супротном, важила би Дезаргова теорема).