УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија 4

3. део: Криве другог реда; пол и полара

Тијана Шукиловић

23. фебруар 2020

Криве другог реда у пројективној равни

- Крива другог реда је скуп тачака у $\mathbb{R}P^2$ које задовољавају једначину:

$$\Gamma: \ a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Криве другог реда у пројективној равни

- Крива другог реда је скуп тачака у $\mathbb{R}P^2$ које задовољавају једначину:

$$\Gamma: \; a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

- Матрица криве другог реда G:

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = G^T$$

Криве другог реда у пројективној равни

- Крива другог реда је скуп тачака у $\mathbb{R}P^2$ које задовољавају једначину:

$$\Gamma: \; a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

- Матрица криве другог реда G:

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = G^T$$

- Недегенерисана крива ($\det G \neq 0$)
- Дегенерисана крива ($\det G = 0$)

Криве другог реда у пројективној равни

- Крива другог реда је скуп тачака у $\mathbb{R}P^2$ које задовољавају једначину:

$$\Gamma: \; a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

- Матрица криве другог реда G:

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = G^T$$

- Недегенерисана крива ($\det G \neq 0$)
- Дегенерисана крива ($\det G = 0$)
- Векторски запис: $X^T G X = 0, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

Примери

Пример 1

Показати да је крива $x_1x_2 - x_3^2 = 0$ недегенерисана. Одредити јој једначину у афиним координатама и бесконачно далеке тачке у $\bar{\mathbb{R}}^2$. Скицирати криву у афиној равни $\mathbb{R}^2$.

Пример 2

Одредити једначину криве $\Gamma : y = ax^2 + bx + c \subset \bar{\mathbb{R}}^2$ у хомогеним координатама, а затим одредити и њене бесконачно далеке тачке. Да ли је та крива недегенерисана?

Промена координата

Теорема 1.1

Пресликавање $\lambda X' = PX$ пресликава криву другог реда Γ задату матрицом G у криву другог реда задату матрицом $G' = C^T G C$, где је $C = P^{-1}$.

Доказ

$$\lambda X' = PX \implies \lambda X = P^{-1} X' = CX'$$

$$0 = X^T G X = (CX')^T G (CX') = X'^T \underbrace{C^T G C}_{G'} X'$$

$$G' = C^T G C = (G')^T$$

Промена координата

Теорема 1.1

Пресликавање $\lambda X' = PX$ пресликава криву другог реда Γ задату матрицом G у криву другог реда задату матрицом $G' = C^T G C$, где је $C = P^{-1}$.

Доказ

$$\lambda X' = PX \implies \lambda X = P^{-1} X' = C X'$$

$$0 = X^T G X = (CX')^T G (CX') = X'^T \underbrace{C^T G C}_{G'} X'$$

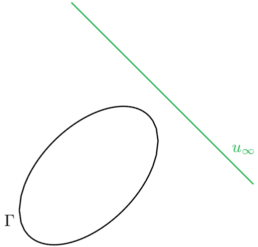
$$G' = C^T G C = (G')^T$$

Појам (недегенерисане) криве другог реда је пројективна инваријанта!

Класификација кривих у пројективној равни

Теорема 1.2

- Овалне криве $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$

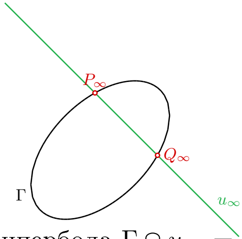


Слика 1: Елипса $\Gamma \cap u_\infty = \{\emptyset\}$

Класификација кривих у пројективној равни

Теорема 1.2

- Овалне криве $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.



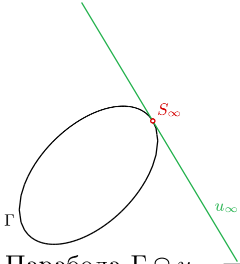
Слика 1: Хипербола $\Gamma \cap u_\infty = \{P_\infty, Q_\infty\}$

- P_∞, Q_∞ – правци асимптота хиперболе

Класификација кривих у пројективној равни

Теорема 1.2

- Овалне криве $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.



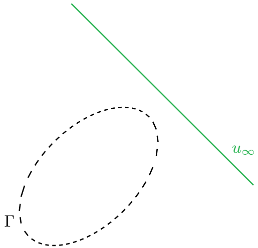
Слика 1: Парабола $\Gamma \cap u_\infty = \{S_\infty\}$

- S_∞ – правац осе параболе

Класификација кривих у пројективној равни

Теорема 1.2

- Овалне криве $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$
- Празан скуп (нула крива) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$

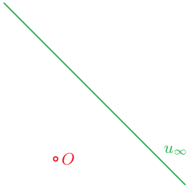


Слика 2: Нула крива $\Gamma \cap u_\infty = \{\emptyset\}$

Класификација кривих у пројективној равни

Теорема 1.2

- Овалне криве $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$
- Празан скуп (нула крива) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$
- Тачка $x_1^2 + x_2^2 = 0.$

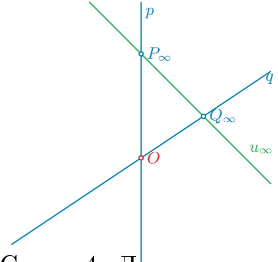


Слика 3: Тачка

Класификација кривих у пројективној равни

Теорема 1.2

- Овалне криве $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.
- Празан скуп (нула крива) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.
- Тачка $x_1^2 + x_2^2 = 0$.
- Две праве $x_1^2 - x_2^2 = 0$.

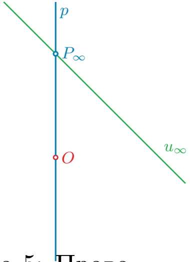


Слика 4: Две праве

Класификација кривих у пројективној равни

Теорема 1.2

- Овалне криве $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.
- Празан скуп (нула крива) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.
- Тачка $x_1^2 + x_2^2 = 0$.
- Две праве $x_1^2 - x_2^2 = 0$.
- „Двострука” права $x_1^2 = 0$.



Слика 5: Права

Доказ теореме о класификацији

- $G = G^T \implies \exists C \in O(3) = \{C \in GL_3(\mathbb{R}) | C^{-1} = C^T\}$:

  $C^T G C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = D$, λ_k– сопствене вредности од G.

Доказ теореме о класификацији

- $G = G^T \implies \exists C \in O(3) = \{C \in GL_3(\mathbb{R}) | C^{-1} = C^T\}$:

  $C^T G C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = D,\ \lambda_k-$ сопствене вредности од G.

- $f : \lambda X' = PX,\ P = C^{-1} : \quad \Gamma = \Gamma(G) \xrightarrow{f} \Gamma' = \Gamma'(D)$

$$\begin{aligned} 0 =& \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_1'^3 \\ =& \epsilon_1(\sqrt{|\lambda_1|}\, x_1')^2 + \epsilon_2(\sqrt{|\lambda_2|}\, x_2')^2 + \epsilon_3(\sqrt{|\lambda_3|}\, x_3')^2 \end{aligned}$$

Доказ теореме о класификацији

- $G = G^T \implies \exists C \in O(3) = \{C \in GL_3(\mathbb{R}) | C^{-1} = C^T\}$:

  $C^T G C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = D$, λ_k– сопствене вредности од G.

- $f : \lambda X' = PX$, $P = C^{-1}$: $\quad \Gamma = \Gamma(G) \xrightarrow{f} \Gamma' = \Gamma'(D)$

$$
\begin{aligned}
0 =& \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_1'^3 \\
=& \epsilon_1 (\sqrt{|\lambda_1|}\, x_1')^2 + \epsilon_2 (\sqrt{|\lambda_2|}\, x_2')^2 + \epsilon_3 (\sqrt{|\lambda_3|}\, x_3')^2
\end{aligned}
$$

- $g : x_i'' = \begin{cases} \sqrt{|\lambda_i|}\, x_i' & \text{ако је } \lambda_i \neq 0 \\ x_i' & \text{ако је } \lambda_i = 0 \end{cases}.$

Доказ теореме о класификацији

- $G = G^T \implies \exists C \in O(3) = \{C \in GL_3(\mathbb{R}) | C^{-1} = C^T\}$:

  $C^T G C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = D$, λ_k– сопствене вредности од G.

- $f : \lambda X' = PX, \; P = C^{-1} : \quad \Gamma = \Gamma(G) \xrightarrow{f} \Gamma' = \Gamma'(D)$

$$\begin{aligned} 0 =& \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_1'^3 \\ =& \epsilon_1(\sqrt{|\lambda_1|}\, x_1')^2 + \epsilon_2(\sqrt{|\lambda_2|}\, x_2')^2 + \epsilon_3(\sqrt{|\lambda_3|}\, x_3')^2 \end{aligned}$$

- $g : x_i'' = \begin{cases} \sqrt{|\lambda_i|}\, x_i' & \text{ако је } \lambda_i \neq 0 \\ x_i' & \text{ако је } \lambda_i = 0 \end{cases}.$

- $g \circ f$ – тражено пресликавање којим се крива слика у једну од понуђених.

Последице

Пример 3

Одредити пројективно пресликавање којим се круг слика у хиперболу/параболу.
(Погледати Примере 5 и 6 из дела „Пројективна пресликавања”.)

Последице

Пример 3

Одредити пројективно пресликавање којим се круг слика у хиперболу/параболу.
(Погледати Примере 5 и 6 из дела „Пројективна пресликавања”.)

Последица

- Овална крива другог реда и права имају највише две заједничке тачке.
- Ако крива другог реда и права имају три заједничке тачке, тада та права припада кривој, а крива је дегенерисана.

Корелације

Дефиниција 2.1

Корелација је пројективно пресликавање које слика пројективну раван тачака $\mathbb{R}P^2$ на пројективну раван правих $\bar{\mathbb{R}}P^2$ и обрнуто. У координатама $\lambda u = AX$, где је A регуларна матрица, X координате тачке, а u координате праве.

Корелације

Дефиниција 2.1

Корелација је пројективно пресликавање које слика пројективну раван тачака $\mathbb{R}P^2$ на пројективну раван правих $\bar{\mathbb{R}}P^2$ и обрнуто. У координатама $\lambda u = AX$, где је A регуларна матрица, X координате тачке, а u координате праве.

Особине корелације

- Бијекције су.
- Чувају колинеарност/конкурентност.
- Чувају дворазмеру.

Пол и полара

Дефиниција 2.2

Овална крива $\Gamma(G)$ задата матрицом G дефинише специјалну корелацију коју називамо поларитет: $\lambda m = GM$.

Пол и полара

Дефиниција 2.2

Овална крива $\Gamma(G)$ задата матрицом G дефинише специјалну корелацију коју називамо поларитет: $\lambda m = GM$. Права m назива се полара, а тачка M је њен пол.

Пол и полара

Дефиниција 2.2

Овална крива $\Gamma(G)$ задата матрицом G дефинише специјалну корелацију коју називамо поларитет: $\lambda m = GM$. Права m назива се полара, а тачка M је њен пол.

Пример 4

Одредити полару тачке $D(1:1:1)$ у односу на криву $\Gamma : x_1x_2 - x_3^2 = 0$.
Шта су поларе тачака $A(1:0:0)$, $B(0:1:0)$ и $C(0:0:1)$?
Скицирати у афиној равни.

Однос пола и поларе

Лема 2.1

Тачка M припада правој n ако и само ако $n^T M{=}0$ ($M^T n{=}0$).

Однос пола и поларе

Лема 2.1

Тачка M припада правој n ако и само ако $n^T M=0$ ($M^T n=0$).

Доказ

Нека је $M(m_1 : m_2 : m_3)$ и $n : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = 0$.

$$M \in n \Longleftrightarrow 0 = n_1m_1 + n_2m_2 + n_3m_3 = (n_1 \;\; n_2 \;\; n_3) \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = n^T M.$$

Други услов се добија транспоновањем првог.

Однос пола и поларе

Лема 2.1

Тачка M припада правој n ако и само ако $n^T M=0$ $(M^T n=0)$.

Лема 2.2

Нека су m и M, односно n и N одговарајућа полара и пол у односу на овалну криву другог реда $\Gamma(G)$. Тада важи $M \in n \iff m \ni N$.

Однос пола и поларе

Лема 2.1

Тачка M припада правој n ако и само ако $n^T M{=}0$ $(M^T n{=}0)$.

Лема 2.2

Нека су m и M, односно n и N одговарајућа полара и пол у односу на овалну криву другог реда $\Gamma(G)$. Тада важи $M \in n \Longleftrightarrow m \ni N$.

Доказ

$$\begin{aligned} M \in n \Longleftrightarrow 0 = n^T M &= (GN)^T (G^{-1}m) = N^T G^T G^{-1} m \\ &= N^T G G^{-1} m = N^T m \quad \Longleftrightarrow \quad m \ni N. \end{aligned}$$

Однос поларе и тангенте

Теорема 2.1

Ако тачка M припада овалној кривој другог реда Γ, тада је њена полара m у односу на Γ тангента те криве у тачки M.

Доказ

$$M \in \Gamma(G) \Longleftrightarrow 0 = M^T GM = M^T(GM) = M^T m \Longleftrightarrow M \in m.$$

Тачка припада кривој акко припада својој полари у односу на ту криву.

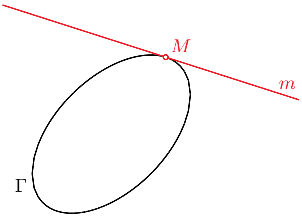
Да ли је m тангента?

$$\Gamma \cap m = \{M, N\},\ \ M \neq N$$

$$N \in m \stackrel{\text{Лема 2.2}}{\Longleftrightarrow} M \in n,\ \ n \text{ – полара за } N$$

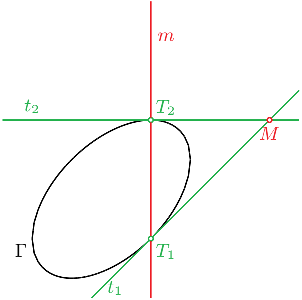
$$\Longrightarrow n = MN = m \stackrel{\text{бијекција}}{\Longrightarrow} M = N.$$ Контрадикција!

Како се црта полара?



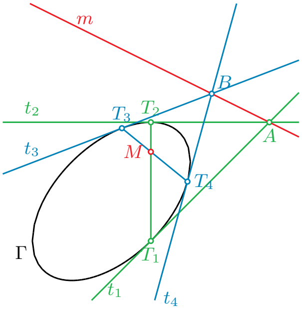
Слика 6: $M \in \Gamma$

Како се црта полара?



Слика 7: $M \in \operatorname{ext} \Gamma$

Како се црта полара?



Слика 8: $M \in \operatorname{int}\Gamma$

Пример 5

Одредити тангенте на овалну криву $x_1x_2 - x_3^2 = 0$ из тачке $M_\infty(-4:1:0)$. Скицирати у афиној равни.

Хармонијска конјугованост

Примедба

Права и крива другог реда у $\mathbb{R}P^2$ имају највише две пресечне тачке. У комплексном случају, тј. у $\mathbb{C}P^2$, увек постоје две пресечне тачке (или једна двострука).

Дефиниција 2.3

Дате су овална крива Γ и тачка $M \notin \Gamma$. Нека $p \ni M$ и $p \cap \Gamma = \{P_1, P_2\} \in \mathbb{C}P^2$. Тачку N такву да важи $\mathcal{H}(M, N, P_1, P_2)$ зовемо тачка конјугована тачки M у односу на криву Γ.

Хармонијска конјугованост

Теорема 2.2

Геометријско место тачако конјугованих тачки M у односу на овалну криву Γ је полара m тачке M.

Хармонијска конјугованост

Теорема 2.2

Геометријско место тачако конјугованих тачки M у односу на овалну криву Γ је полара m тачке M.

Доказ

- $\Gamma = \Gamma(G)$ – овална крива, $M \notin \Gamma$ – фиксирана тачка

Хармонијска конјугованост

Теорема 2.2

Геометријско место тачако конјугованих тачки M у односу на овалну криву Γ је полара m тачке M.

Доказ

- $\Gamma = \Gamma(G)$ – овална крива, $M \notin \Gamma$ – фиксирана тачка
- N – произвољна тачка, $p = MN : \ X = \lambda M + N, \ \lambda \in \mathbb{R}$

Хармонијска конјугованост

Теорема 2.2

Геометријско место тачако конјугованих тачки M у односу на овалну криву Γ је полара m тачке M.

Доказ

- $\Gamma = \Gamma(G)$ – овална крива, $M \notin \Gamma$ – фиксирана тачка
- N – произвољна тачка, $p = MN: \ X = \lambda M + N, \ \lambda \in \mathbb{R}$
- $\Gamma \cap p$ – квадратна једначина по λ:

$$
\begin{aligned}
0 = X^T G X &= (\lambda M + N)^T G (\lambda M + N) \\
&= \lambda^2 \underbrace{M^T G M}_{a} + \lambda \underbrace{(M^T G N + N^T G M)}_{2b} + \underbrace{N^T G N}_{c}
\end{aligned}
$$

$$M^T G N \overset{\text{Лема 2.1}}{=} (M^T G N)^T = N^T G M \implies 2b = 2N^T G M.$$

Хармонијска конјугованост

Теорема 2.2

Геометријско место тачако конјугованих тачки M у односу на овалну криву Γ је полара m тачке M.

Доказ

- $\Gamma \cap p$ – квадратна једначина по λ:

$$\begin{aligned} 0 &= X^T G X = (\lambda M + N)^T G (\lambda M + N) \\ &= \lambda^2 \underbrace{M^T G M}_{a} + \lambda \underbrace{(M^T G N + N^T G M)}_{2b} + \underbrace{N^T G N}_{c} \end{aligned}$$

$$M^T G N \overset{\text{Лема 2.1}}{=} (M^T G N)^T = N^T G M \implies 2b = 2N^T G M.$$

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ – решења редначине $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$

Хармонијска конјугованост

Теорема 2.2

Геометријско место тачако конјугованих тачки M у односу на овалну криву Γ је полара m тачке M.

Доказ

- $\Gamma \cap p$ – квадратна једначина по λ:

$$\begin{aligned} 0 &= X^T G X = (\lambda M + N)^T G (\lambda M + N) \\ &= \lambda^2 \underbrace{M^T G M}_{a} + \lambda \underbrace{(M^T G N + N^T G M)}_{2b} + \underbrace{N^T G N}_{c} \end{aligned}$$

$$M^T G N \overset{\text{Лема 2.1}}{=} (M^T G N)^T = N^T G M \implies 2b = 2N^T G M.$$

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ – решења редначине $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$
- $\Gamma \cap p = \{P_1, P_2\}$: $P_1 = \lambda_1 M + N, P_2 = \lambda_2 M + N$

Хармонијска конјугованост

Теорема 2.2

Геометријско место тачако конјугованих тачки M у односу на овалну криву Γ је полара m тачке M.

Доказ

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ – решења редначине $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$
- $\Gamma \cap p = \{P_1, P_2\}$: $P_1 = \lambda_1 M + N, P_2 = \lambda_2 M + N$

$$\mathcal{H}(M, N, P_1, P_2) \Longleftrightarrow -1 = \frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \overset{\text{Виетове формуле}}{\Longleftrightarrow} 2b = 0$$

$$\Longleftrightarrow N^T G M = 0 \Longleftrightarrow N^T m = 0 \Longleftrightarrow N \in m.$$

Центар криве

Последица

Центар криве другог реда у $\bar{\mathbb{R}}^2$ је пол бесконачно далеке праве.

Центар криве

Последица

Центар криве другог реда у $\bar{\mathbb{R}}^2$ је пол бесконачно далеке праве.

Доказ

Нека је C центар криве Γ (ако крива има центар).
На основу дефиниције центра, тачка C је средиште дужи P_1P_2, где су $P_1, P_2 \in \Gamma, P_1 \neq P_2$. На основу последице афиног смисла дворазмере, њој коњугована тачка бесконачно далека тачка праве P_1P_2.
На основу претходне теореме, полара од C је бесконачно далека права равни $\bar{\mathbb{R}}^2$.

Центар криве

Последица

Центар криве другог реда у $\bar{\mathbb{R}}^2$ је пол бесконачно далеке праве.

Пример 6

Одредити центар криве $xy - 4x + y + 3 = 0$. Скицирати криву.

Пресликавање правих

Лема 2.3

Ако је пресликавање тачака задато матрицом P, тј. са $\lambda X' = PX$ тада је пресликавање правих задато матрицом $P^{-T} = C^T$.

Доказ

$$\lambda X' = PX$$

$$n : n^T X = 0 \;\mapsto\; n' : n'^T X' = 0$$

$$n^T X = 0 \iff 0 = n^T P^{-1} X' = \underbrace{((P^{-1})^T n)}_{n'}{}^T X'$$

$$\Longrightarrow n' = C^T n.$$

Пројективна инваријантност пола и поларе

Теорема 2.3

Пол и полара су пројективне инваријанте.

Пројективна инваријантност пола и поларе

Теорема 2.3

Пол и полара су пројективне инваријанте (тј. ако су M и m пол и полара у односу на овалну криву Γ, тада су и њихове слике M' и m' при пројективном пресликавању f пол и полара у односу на слику криве Γ').

Пројективна инваријантност пола и поларе

Теорема 2.3

Пол и полара су пројективне инваријанте.

Доказ

$\Gamma = \Gamma(G)$ – овална крива, M – пол, m – полара: $\lambda m = GM$

Пројективна инваријантност пола и поларе

Теорема 2.3

Пол и полара су пројективне инваријанте.

Доказ

$\Gamma = \Gamma(G)$ – овална крива, M – пол, m – полара: $\lambda m = GM$

- $f : \lambda X' = PX, \; C = P^{-1}$

Пројективна инваријантност пола и поларе

Теорема 2.3

Пол и полара су пројективне инваријанте.

Доказ

$\Gamma = \Gamma(G)$ – овална крива, M – пол, m – полара: $\lambda m = GM$

- $f : \lambda X' = PX, \ C = P^{-1}$
- $f : \begin{cases} \lambda M' = PM \\ \lambda m' = P^{-T} m \\ \lambda G' = C^T G C \end{cases} \qquad f^{-1} : \begin{cases} \lambda M = P^{-1} M' \\ \lambda m = P^T m' \\ \lambda G = P^T G' P \end{cases}$

Пројективна инваријантност пола и поларе

Теорема 2.3

Пол и полара су пројективне инваријанте.

Доказ

$\Gamma = \Gamma(G)$ – овална крива, M – пол, m – полара: $\lambda m = GM$

- $f : \lambda X' = PX, \; C = P^{-1}$
- $f : \begin{cases} \lambda M' = PM \\ \lambda m' = P^{-T} m \\ \lambda G' = C^T G C \end{cases} \qquad f^{-1} : \begin{cases} \lambda M = P^{-1} M' \\ \lambda m = P^T m' \\ \lambda G = P^T G' P \end{cases}$
- $m = GM \iff P^T m' = (P^T G' P)(P^{-1} M') = P^T G' M'$

  $\iff m' = G' M'$

Пројективна инваријантност пола и поларе

Теорема 2.3

Пол и полара су пројективне инваријанте.

Доказ

$\Gamma = \Gamma(G)$ – овална крива, M – пол, m – полара: $\lambda m = GM$

- $f : \lambda X' = PX, \ C = P^{-1}$
- $f : \begin{cases} \lambda M' = PM \\ \lambda m' = P^{-T} m \\ \lambda G' = C^T G C \end{cases} \qquad f^{-1} : \begin{cases} \lambda M = P^{-1} M' \\ \lambda m = P^T m' \\ \lambda G = P^T G' P \end{cases}$
- $m = GM \iff P^T m' = (P^T G' P)(P^{-1} M') = P^T G' M'$

  $\iff m' = G' M'$

$\implies M'$ – пол, m' – полара у односу на $\Gamma' = \Gamma(G')$!