УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија 4

2. део: Пројективна пресликавања и хомологије

Тијана Шукиловић

22. фебруар 2020

Пројективна пресликавања равни

Дефиниција 1.1

Пројективно пресликавање пројективне равни је пресликавање које тачку $M(x_1 : x_2 : x_3)$ слика у тачку $M'(x_1' : x_2' : x_3')$, и дато је формулама:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \det(p_{ij}) \neq 0, \lambda \neq 0,$$

или краће $\lambda X' = PX, \;\; P = (p_{ij})$.

Пројективно пресликавање је индуковано линеарним пресликавањем векторског простора $\mathbb{R}^3$.

Особине пројективних пресликавања

- Матрице P и λP представљају исто пресликавање.

Особине пројективних пресликавања

- Матрице P и λP представљају исто пресликавање.
- Композицији пресликавања одговара множење матрица, а инверзном пресликавању одговара инверзна матрица.

Особине пројективних пресликавања

- Матрице P и λP представљају исто пресликавање.
- Композицији пресликавања одговара множење матрица, а инверзном пресликавању одговара инверзна матрица.
- Пројективно пресликавање слика чува колинеарност тачака и конкурентност правих.

Особине пројективних пресликавања

- Матрице P и λP представљају исто пресликавање.
- Композицији пресликавања одговара множење матрица, а инверзном пресликавању одговара инверзна матрица.
- Пројективно пресликавање слика чува колинеарност тачака и конкурентност правих.

$A, B, C-$ колинеарне: $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$

$$\vec{C}' = PC = \alpha P\vec{A} + \beta P\vec{B} = \alpha\vec{A}' + \beta\vec{B}'$$

$$\Longrightarrow A', B', C'- \text{ колинеарне}$$

Конкурентност следи из дуалности.

Особине пројективних пресликавања

- Матрице P и λP представљају исто пресликавање.
- Композицији пресликавања одговара множење матрица, а инверзном пресликавању одговара инверзна матрица.
- Пројективно пресликавање слика чува колинеарност тачака и конкурентност правих.
- Пројективна пресликавања чине пројективну групу $PGl_3(\mathbb{R})$ димензије 8.

Основна теорема Пројективне геометрије

Теорема 1.1

Постоји јединствено пројективно пресликавање пројективне равни $\mathbb{R}P^2$ које четири тачке A,B,C,D у општем положају слика редом у тачке A', B', C', D', у општем положају.

Доказ

- $A_0(1{:}0{:}0), B_0(0{:}1{:}0), C_0(0{:}0{:}1), D_0(1{:}1{:}1)$ – базне тачке
- A, B, C – неколинеарне: $\overrightarrow{D} = \alpha A + \beta B + \gamma C,\ \alpha, \beta, \gamma, \neq 0$
- $P = [f] = [\alpha A, \beta B, \gamma C] \implies f:\ A_0, B_0, C_0, D_0 \mapsto A, B, C, D$
- $P\overrightarrow{A_0} = \alpha\overrightarrow{A} \implies f(A_0) = A$ (слично за B и C)
- $P\overrightarrow{D_0} = \alpha A + \beta B + \gamma C = D \implies f(D_0) = D$
- $g:\ A_0, B_0, C_0, D_0 \mapsto A', B', C', D'$
- $g \circ f^{-1}$ – тражено пресликавање

Основна теорема Пројективне геометрије

Теорема 1.1

Постоји јединствено пројективно пресликавање пројективне равни $\mathbb{R}P^2$ које четири тачке A,B,C,D у општем положају слика редом у тачке A', B', C', D', у општем положају.

Пример 1

Одредити пројективно пресликавање равни које тачке $A_0(1:0:0)$,$B_0(0:1:0)$,$C_0(0:0:1)$,$D_0(1:1:1)$ слика у $A(1:2:3)$, $B(3:2:1)$, $C(0:1:1)$, $D(7:11:10)$.

Последица

Пројективно пресликавање равни са четири фиксне тачке је идентитет.

Основна теорема Пројективне геометрије

Теорема 1.1

Постоји јединствено пројективно пресликавање пројективне равни $\mathbb{R}P^2$ које четири тачке A,B,C,D у општем положају слика редом у тачке A', B', C', D', у општем положају.

Пример 2 (Провоугаоник и трапез су пројективно еквивалентни у $\bar{\mathbb{R}}^2$)

Одредити пројективно пресликавање које трапез $ABCD$, $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(1,2)$, $D(-1,2)$ пресликава у правоугаоник $A'B'C'D'$, $A'(-1,0)$, $B'(1,0)$, $C'(1,1)$, $D'(-1,1)$.

Пример 3

Дијагоналне тачке четворотеменика су међусобно пројективно еквивалентне.

Особине пројективних пресликавања

Пројективна пресликавање не чувају ни размеру ни паралелност!

Теорема 1.2

Пројективна пресликавања чувају дворазмеру.

Особине пројективних пресликавања

Пројективна пресликавање не чувају ни размеру ни паралелност!

Теорема 1.2

Пројективна пресликавања чувају дворазмеру.

Доказ

A, B, C, D – колинеарне:

$$\begin{aligned}\vec{C} =& \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}, \quad \vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B} \\ \vec{C}' =& P\vec{C} = \alpha P\vec{A} + \beta P\vec{B} = \alpha\vec{A}' + \beta\vec{B}' \\ \vec{D}' =& P\vec{D} = \gamma P\vec{A} + \delta P\vec{B} = \gamma\vec{A}' + \delta\vec{B}' \\ \Longrightarrow& (A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = (A', B', C', D')\end{aligned}$$

Особине пројективних пресликавања

Пројективна пресликавање не чувају ни размеру ни паралелност!

Теорема 1.2

Пројективна пресликавања чувају дворазмеру.

Последица

- Ако су три тачке неке праве p фиксне при пројективном пресликавању, тада је свака тачка праве p фиксна.
- Ако су три праве које садрже тачку P фиксне при пројективном пресликавању, тада је свака права кроз P фиксна.

Хармонијска конјугованост

Теорема 1.3

Парови тачака P, Q и R, S су хармонијски конјуговани акко постоји четворотеменик $ABCD$ такав да су P и Q његове дијагоналне тачке, а R и S пресеци праве PQ са ивицама четворотеменика кроз трећу дијагоналну тачку.

Доказ

$(\Longleftarrow)$ $\exists ABCD \implies \mathcal{H}(P, Q, R, S)$.

$$A(1:0:0),\ B(0:1:0),\ C(0:0:1),\ D(1:1:1)$$

$$P = AD \times BC = (0:1:1),\ Q = AB \times CD = (1:1:0)$$

$$PQ = [1:-1:1]$$

$$R = BD \times PQ = (1:2:1) = 1 \cdot P + 1 \cdot Q$$

$$S = AC \times PQ = (1:0:-1) = -1 \cdot P + 1 \cdot Q$$

$$\implies (P, Q, R, S) = -1 \iff \mathcal{H}(P, Q, R, S)$$

Хармонијска конјугованост

Теорема 1.3

Парови тачака P, Q и R, S су хармонијски конјуговани акко постоји четворотеменик $ABCD$ такав да су P и Q његове дијагоналне тачке, а R и S пресеци праве PQ са ивицама четворотеменика кроз трећу дијагоналну тачку.

Доказ

$(\Longrightarrow)$ $\mathcal{H}(P, Q, R, S) \Longrightarrow$ конструисати $ABCD$

- $p_1, p_2 \in P$, $q_1 \in Q$ – произвољне праве
- $A = p_1 \times q_1$, $B = p_2 \times q_1$, $C = AS \times p_2$, $D = QC \times p_1$
- Према конструкцији: P, Q су дијагоналне тачке
- Према конструкцији: $S = PQ \times AC$
- $R' = PQ \times DB \overset{(\Leftarrow)}{\Longrightarrow} \mathcal{H}(P, Q, R', S)$
- Према претпоставци: $\mathcal{H}(P, Q, R, S) \Longrightarrow R \equiv R'$ (јединственост 4. хармонијски конјуговане тачке)

Хармонијска конјугованост

Теорема 1.3

Парови тачака P, Q и R, S су хармонијски конјуговани акко постоји четворотеменик $ABCD$ такав да су P и Q његове дијагоналне тачке, а R и S пресеци праве PQ са ивицама четворотеменика кроз трећу дијагоналну тачку.

Пример 4

Дат је произвољни трапез $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Нека је $P = AD \times BC$, $Q = BD \times AC$, $E = AB \times PQ$, $F = CD \times PQ$.
Доказати:
а) $\mathcal{H}(P, Q, E, F)$; б) $F = S(DC)$, $E = S(AB)$.

Веза између афиних и пројективних пресликавања

Афино пресликавање слика тачку $M(x, y)$ у тачку $M'(x', y')$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Веза између афиних и пројективних пресликавања

Афино пресликавање слика тачку $M(x,y)$ у тачку $M'(x',y')$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

У хомогеним координатама:

$$\begin{aligned} \frac{x_1'}{x_3'} &= a_{11}\frac{x_1}{x_3} + a_{12}\frac{x_2}{x_3} + b_1 \\ \frac{x_2'}{x_3'} &= a_{21}\frac{x_1}{x_3} + a_{22}\frac{x_2}{x_3} + b_2. \end{aligned}$$

Ставимо $x_3' = x_3$:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1x_3 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2x_3 \\ x_3' &= \phantom{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1} x_3. \end{aligned}$$

Веза између афиних и пројективних пресликавања

Афино пресликавање слика тачку $M(x, y)$ у тачку $M'(x', y')$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

У матричном облику:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{A_b} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Афина пресликавања су специјалан случај пројективних пресликавања $\bar{\mathbb{R}}^2$.

Особине афиних пресликавања

Теорема 1.4

Група афиних пресликавања је изоморфна подгрупи пројективних пресликавања равни $\bar{\mathbb{R}}^2$ која чувају бесконачно далеку праву u_∞.

Доказ

Пројективно пресликавање f чува u_∞ акко $f(B_\infty) \in u_\infty$, за сваку тачку $B_\infty(x_1 : x_2 : 0)$.

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}x_1 + p_{12}x_2 \\ p_{21}x_1 + p_{22}x_2 \\ p_{31}x_1 + p_{32}x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow p_{31} = p_{32} = 0, \; p_{33} \neq 0$$

$$P \sim \lambda P \Longrightarrow p_{33} = 1.$$

Инваријанте и еквивалентни објекти

Што је група већа, то она разликује мањи број објеката и има више инваријанти!

Пример 5 (Елипса $\overset{proj}{\Longleftrightarrow}$ хипербола)

- Показати да пројективно пресликавање $f:\ x_1' = x_3,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_1$ проширене афине равни $\bar{\mathbb{R}}^2$ пресликава елипсу $x^2 + y^2 = 1$ у хиперболу $x'^2 - y'^2 = 1$.
- Записати то пресликавање у афиним координатама.
- Одредити праву која се пресликава у $u_\infty : x_3 = 0$.
- Одредити фиксне тачке пресликавања f. Скицирати!

Пример 6 (Елипса $\overset{proj}{\Longleftrightarrow}$ парабола)

Одредити пројективно пресликавање проширене афине равни $\bar{\mathbb{R}}^2$ које слика елипсу (круг) $x^2 + y^2 = 1$ у параболу $y^2 = 2x$. (домаћи)

Инваријанте и еквивалентни објекти

група	матрица	еквивалентни објекти	инваријанте
пројективна $PGl_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$	сви четвороуглови, овалне криве 2. реда	конкурентност, колинеарност, дворазмера, тангентност, унутрашњост овалне криве
афина $\mathrm{Aff}_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	сви троуглови, сви паралелограми, све елипсе, све хиперболе	паралелност, размера, однос површина, беконачно далека права, коњуговани дијаметри
сличности $\mathrm{Con}_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} s\cos\phi & \mp s\sin\phi & v_1 \\ s\sin\phi & \pm s\cos\phi & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	слични троуглови, сви кругови, све параболе	углови, однос дужина
изометрије $\mathrm{Isom}_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} \cos\phi & \mp\sin\phi & v_1 \\ \sin\phi & \pm\cos\phi & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	подударни троуглови	дужине, површина

Хомологије

Дефиниција 2.1

Тачка S је центар пројективног пресликавања f ако је свака права кроз S фиксна: $f(p) = p,\ p \ni S$.

Хомологије

Дефиниција 2.1

Тачка S је центар пројективног пресликавања f ако је свака права кроз S фиксна: $f(p) = p, \ p \ni S$.

Дефиниција 2.2

Права s је оса пројективног пресликавања f ако је свака тачка праве s фиксна: $f(P) = P, \ P \in s$.

Хомологије

Дефиниција 2.1

Тачка S је центар пројективног пресликавања f ако је свака права кроз S фиксна: $f(p) = p, \; p \ni S$.

Дефиниција 2.2

Права s је оса пројективног пресликавања f ако је свака тачка праве s фиксна: $f(P) = P, \; P \in s$.

Дефиниција 2.3

Неидентичко пројективно пресликавање које има осу и центар зове се хомологија.

Особине хомологија

- Пресек фиксних правих је фиксна тачка.

Особине хомологија

- Пресек фиксних правих је фиксна тачка. Специјално, центар је фиксан.

Особине хомологија

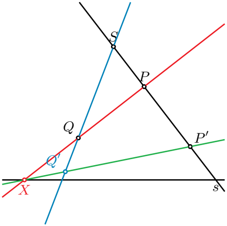
- Пресек фиксних правих је фиксна тачка. Специјално, центар је фиксан.
- Ако је f хомологија, тада су $P' = f(P), P, S$ колинеарне тачке јер $SP = f(SP) = f(S)f(P) = SP'$.

Особине хомологија

- Пресек фиксних правих је фиксна тачка. Специјално, центар је фиксан.
- Ако је f хомологија, тада су $P' = f(P), P, S$ колинеарне тачке јер $SP = f(SP) = f(S)f(P) = SP'$.

Лема 2.1

Хомологија је одређена центром S, осом s и паром одговарајућих тачака P, P'.



Слика 1: Доказ

Q – произвољна $\Longrightarrow\ Q' = f(Q) \in SQ$

$X = PQ \times s$

$Q' \in f(PQ) = f(PX) = f(P)f(X) = P'X$

$\Longrightarrow\ Q' = P'X \times SQ$

Центар и оса

Теорема 2.1

Пројективно пресликавање има осу акко има центар.

Центар и оса

Теорема 2.1

Пројективно пресликавање има осу акко има центар.

Доказ

($\Longrightarrow$) Нека f има осу s.

$$P \notin s: \; P' = f(P) \neq P, \quad PP' \times s = X$$

$$f(PP') = f(PX) = f(P)f(X) = P'X = P'P$$

$$\Longrightarrow PP' \text{ – фиксна (слично, } QQ' \text{ – фиксна)}$$

$$S = PP' \times QQ' \implies S \text{ – фиксна тачка}$$

- $S \notin s$: свака права a кроз S је фиксна јер $a \ni S, a \times s$;
- $S \in s$: PP', QQ', s – фиксне праве кроз S
  $\Longrightarrow$ све праве кроз S су фиксне.

$\Longrightarrow$ S – центар

Центар и оса

Теорема 2.1

Пројективно пресликавање има осу акко има центар.

Доказ

($\Longrightarrow$) Нека f има осу s.

$$P \notin s: \ P' = f(P) \neq P, \quad PP' \times s = X$$

$$f(PP') = f(PX) = f(P)f(X) = P'X = P'P$$

$$\Longrightarrow PP' - \text{фиксна (слично, } QQ' - \text{фиксна)}$$

$$S = PP' \times QQ' \implies S - \text{фиксна тачка}$$

- $S \notin s$: свака права a кроз S је фиксна јер $a \ni S, a \times s$;
- $S \in s$: PP', QQ', s – фиксне праве кроз S $\Longrightarrow$ све праве кроз S су фиксне.

$\Longrightarrow S$ – центар

($\Longleftarrow$) Следи из дуалности центра и осе.

Фиксне тачке и фиксне праве хомологије

Лема 2.2

а) Једине фиксне тачке хомологије су центар S и тачке на оси s.
б) Једине фиксне праве хомологије су оса s и праве кроз центар S.

Фиксне тачке и фиксне праве хомологије

Лема 2.2

а) Једине фиксне тачке хомологије су центар S и тачке на оси s.
б) Једине фиксне праве хомологије су оса s и праве кроз центар S.

Доказ

а) $S \notin s$: $P \neq S$, $P \notin s$ – фиксна тачка
$\Longrightarrow X, Y \in s, S, P$ – фиксне тачке $\Longrightarrow f = Id$. Контрадикција!

Фиксне тачке и фиксне праве хомологије

Лема 2.2

а) Једине фиксне тачке хомологије су центар S и тачке на оси s.
б) Једине фиксне праве хомологије су оса s и праве кроз центар S.

Доказ

а) $S \notin s$: $P \neq S$, $P \notin s$ – фиксна тачка
$\Longrightarrow X, Y \in s, S, P$ – фиксне тачке $\Longrightarrow f = Id$. Контрадикција!
$S \in s$: $P \neq S$, $P \notin s$ – фиксна тачка
$p \ni P$, $q \ni S$ – фиксне праве $\Longrightarrow$ $p \times q = X$ – фиксна тачка
$\Longrightarrow$ $f = Id$. Контрадикција!

Фиксне тачке и фиксне праве хомологије

Лема 2.2

а) Једине фиксне тачке хомологије су центар S и тачке на оси s.
б) Једине фиксне праве хомологије су оса s и праве кроз центар S.

Доказ

а) $S \notin s$: $P \neq S$, $P \notin s$ – фиксна тачка
$\Longrightarrow X, Y \in s, S, P$ – фиксне тачке $\Longrightarrow f = Id$. Контрадикција!
$S \in s$: $P \neq S$, $P \notin s$ – фиксна тачка
$p \ni P$, $q \ni S$ – фиксне праве $\Longrightarrow$ $p \times q = X$ – фиксна тачка
$\Longrightarrow$ $f = Id$. Контрадикција!

б) Следи из а) као дуално.

Хомологија у $\bar{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty$

- f – хомологија са центром S и осом s;

Хомологија у $\bar{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty$

- f – хомологија са центром S и осом s;
- f^{-1} – хомологија са истим центром и осом као f;

Хомологија у $\bar{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty$

- f – хомологија са центром S и осом s;
- f^{-1} – хомологија са истим центром и осом као f;
- Противоса u: $f(u) = u_\infty$;

Хомологија у $\bar{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty$

- f – хомологија са центром S и осом s;
- f^{-1} – хомологија са истим центром и осом као f;
- Противоса u: $f(u) = u_\infty$;
- Хоризонт v': $f(u_\infty) = v'$

Хомологија у $\bar{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty$

- f – хомологија са центром S и осом s;
- f^{-1} – хомологија са истим центром и осом као f;
- Противоса u: $f(u) = u_\infty$;
- Хоризонт v': $f(u_\infty) = v'$ (v' је противоса за f^{-1})

Хомологија у $\bar{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty$

- f – хомологија са центром S и осом s;
- f^{-1} – хомологија са истим центром и осом као f;
- Противоса u: $f(u) = u_\infty$;
- Хоризонт v': $f(u_\infty) = v'$ (v' је противоса за f^{-1})

Лема 2.3

За хомологију у проширеној афиној равни важи $s \parallel u \parallel v'$.

Хомологија у $\bar{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty$

- f – хомологија са центром S и осом s;
- f^{-1} – хомологија са истим центром и осом као f;
- Противоса u: $f(u) = u_\infty$;
- Хоризонт v': $f(u_\infty) = v'$ (v' је противоса за f^{-1})

Лема 2.3

За хомологију у проширеној афиној равни важи $s \parallel u \parallel v'$.

Доказ

$$A = s \times u \implies \begin{cases} A \in s & \Rightarrow f(A) = A \\ A \in u & \Rightarrow f(A) \in u_\infty \end{cases} \implies A \in u_\infty \implies s \parallel u$$

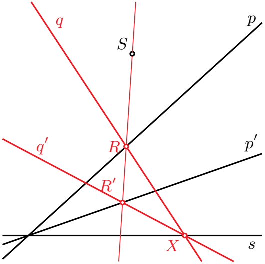
v' – противоса пресликавања f^{-1} са осом $s \implies s \parallel v'$

Примери

Пример 7

Показати да је хомологија f у $\bar{\mathbb{R}}^2$ одређена са:

а) $S, s, p \mapsto p'$; б) S, s, u; в) S, s, v'; г) S, u, v'.

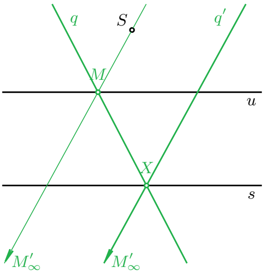


Слика 2: а) $S, s, p \mapsto p'$

Примери

Пример 7

Показати да је хомологија f у $\bar{\mathbb{R}}^2$ одређена са:
а) $S, s, p \mapsto p'$; б) S, s, u; в) S, s, v'; г) S, u, v'.

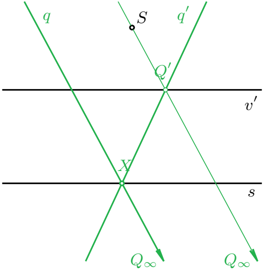


Слика 2: б) S, s, u

Примери

Пример 7

Показати да је хомологија f у $\bar{\mathbb{R}}^2$ одређена са:
а) $S, s, p \mapsto p'$; б) S, s, u; в) S, s, v'; г) S, u, v'.

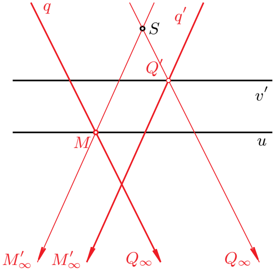


Слика 2: в) S, s, v'

Примери

Пример 7

Показати да је хомологија f у $\bar{\mathbb{R}}^2$ одређена са:
а) $S, s, p \mapsto p'$; б) S, s, u; в) S, s, v'; г) S, u, v'.

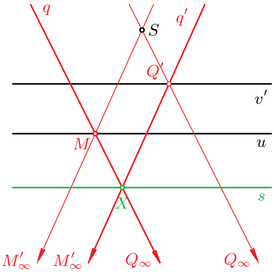


Слика 2: д) S, u, v'

Примери

Пример 7

Показати да је хомологија f у $\bar{\mathbb{R}}^2$ одређена са:
а) $S, s, p \mapsto p'$; б) S, s, u; в) S, s, v'; г) S, u, v'.



Слика 2: д) $S, u, v' \rightarrow s$

Примери

Пример 8

Показати да важи $d(S,u) = d(s,v')$.
Да ли важи $d(s,u) = d(S,v')$? Зашто?

Пример 9

Доказати да је пресликавање из Примера 5 хомологија и одредити му центар, осу, противосу и хоризонт.

Афине хомологије

Теорема 2.2

Хомологија f је афино пресликавање акко $s = u_\infty$ или $S \in u_\infty$.

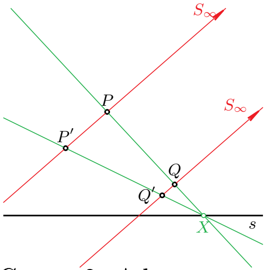
Доказ

Теорема 1.4 $\Rightarrow f$ – афино акко $f(u_\infty) = u_\infty \Rightarrow u_\infty$ – фиксна

Лема 2.2 $\Rightarrow u_\infty$ је или оса s или права кроз центар S.

Како изгледају афине хомологије?

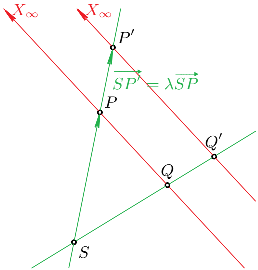
- $S \in u_\infty$, $s \neq u_\infty$
  Зраци афиности PP', QQ', ... садрже S_∞ (паралелни су), а одговарајуће праве PQ и $P'Q'$ се секу на оси. Ово пресликавање зовемо афиност.



Слика 3: Афиност

Како изгледају афине хомологије?

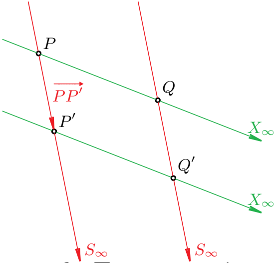
- $s = u_\infty, \;\; S \notin u_\infty$
  Одговарајуће праве PQ, $P'Q'$ се секу на оси $s = u_\infty$, па је $PQ \parallel P'Q'$. Зато је $\triangle SPQ \sim \triangle SP'Q'$ за произвољно P и Q. Пресликавање је хомотетија са центром S и коефицијентом $\lambda = \overrightarrow{SP'}/\overrightarrow{SP}$.



Слика 3: Хомотетија

Како изгледају афине хомологије?

- $s = u_\infty, \; S \in u_\infty$
  $PQ \times P'Q' \in s = u_\infty \implies PQ \parallel P'Q'$;
  $PP' \times QQ' = S \in u_\infty \implies PP' \parallel QQ'$.
  Дакле, $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$, тј. пресликавање је транслација за вектор $\overrightarrow{PP'}$.



Слика 3: Транслација