УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија 4

1. део: Афина и пројективна раван

Тијана Шукиловић

10. фебруар 2020

Афина раван (понављање)

- Координатни репер Oxy.
- Координате тачке $A(x, y)$.
- Једначина праве $p : ax + by + c = 0$.
- Крива 2. реда:
  $\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$

Афина раван (понављање)

- Координатни репер Oxy.
- Координате тачке $A(x, y)$.
- Једначина праве $p : ax + by + c = 0$.
- Крива 2. реда:
  $\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$

- Две разне праве у равни се секу или су паралелне!

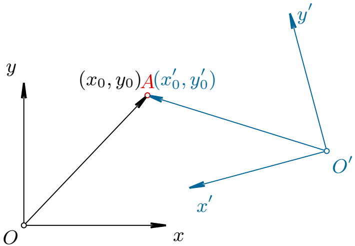
Дефиниција афиног пресликавања

Дефиниција 1.1

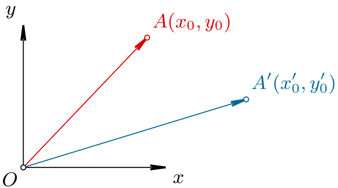
Нека је $\bar{f} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ линеарно пресликавање векторског простора који је придружен простору тачака $\mathbb{E}$.
Афино пресликавање $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ је пресликавање тачака које је индуковано пресликавањем $\bar{f}$ вектора у смислу да је:

$$f(M) = M', \ \ f(N) = N' \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}.$$

Пасивно и активно гледиште



Слика 1: Пасивно гледиште



Слика 2: Активно гледиште

Афина пресликавања равни

Дефиниција 1.2

Афино пресликавање равни $\mathbb{E}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}}_{\text{слике базних вектора}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}}_{\text{слика координатног почетка}}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Афина пресликавања равни

Дефиниција 1.2

Афино пресликавање равни $\mathbb{E}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}}_{\text{слике базних вектора}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}}_{\text{слика координатног почетка}}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

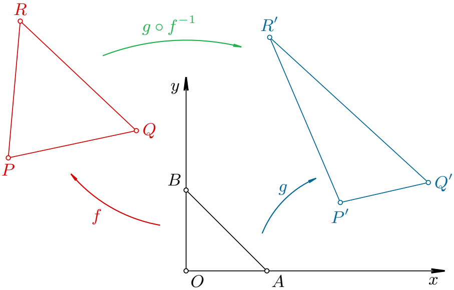
Пример 1

Одредити формуле афиног пресликавања f равни које тачке $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ пресликава редом у тачке $O'(2,2), A'(4,5), B'(3,1)$.

Особине афиних пресликавања

Теорема 1.1

Постоји јединствено афино пресликавање равни које пресликава три неколинеарне тачке P, Q, R у три неколинеарне тачке P', Q', R', редом.



Слика 3: Доказ теореме

Особине афиних пресликавања

Теорема 1.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;

Особине афиних пресликавања

Теорема 1.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;

Особине афиних пресликавања

Теорема 1.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;

Особине афиних пресликавања

Теорема 1.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је
$$\frac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|;$$

Особине афиних пресликавања

Теорема 1.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је $\dfrac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|$;
- Пресликавања за која је $\det(a_{ij}) > 0$ чувају оријентацију, а за која је $\det(a_{ij}) < 0$ мењају оријентацију равни.

Представљање афиних пресликавања матрицама

A – линеарни део

b – транслаторни део

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}$$

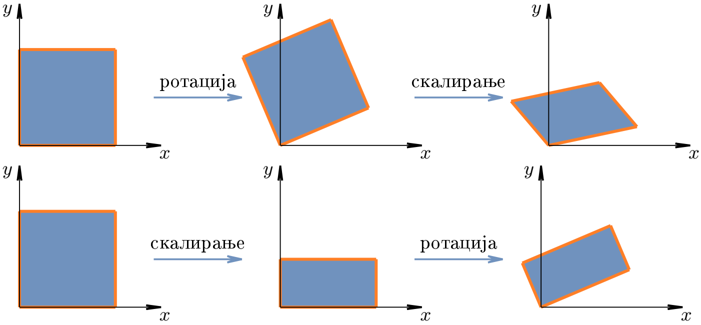
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A_b

Представљање афиних пресликавања матрицама

Теорема 1.3

Производ матрица A_b одговара композицији афиних пресликавања.



Слика 4: Афина пресликавања не комутирају!

Хомогене координате равни

Дефиниција 2.1

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

Хомогене координате равни

Дефиниција 2.1

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

Пример 2

Одредити хомогене координате тачке чије су афине координате $(1, -2)$.

Хомогене координате равни

Дефиниција 2.1

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

Пример 2

Одредити хомогене координате тачке чије су афине координате $(1, -2)$.

Пример 3

Одредити афине координате тачака $A(1 : 2 : 2)$ и $B(3 : 2 : 0)$.

Хомогене координате равни

Дефиниција 2.2

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

Хомогене координате равни

Дефиниција 2.2

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \;\; y = \frac{x_2}{x_3}, \;\; x_3 \neq 0.$$

- Вектор представник $\overrightarrow{M} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Хомогене координате равни

Дефиниција 2.2

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

- Вектор представник $\overrightarrow{M} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- Бесконачно далека тачка $P_\infty(x_1 : x_2 : 0), \; x_1^2 + x_2^2 \neq 0$.

Хомогене координате равни

Дефиниција 2.2

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

- Вектор представник $\overrightarrow{M} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- Бесконачно далека тачка $P_\infty(x_1 : x_2 : 0), \; x_1^2 + x_2^2 \neq 0$.
- Једначина праве $p : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$.

Хомогене координате равни

Дефиниција 2.2

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

- Вектор представник $\overrightarrow{M} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- Бесконачно далека тачка $P_\infty(x_1 : x_2 : 0)$, $\ x_1^2 + x_2^2 \neq 0$.
- Једначина праве $p : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$.
- Хомогене координате праве $p[a : b : c]$.

Хомогене координате равни

Дефиниција 2.2

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

- Вектор представник $\overrightarrow{M} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- Бесконачно далека тачка $P_\infty(x_1 : x_2 : 0), \; x_1^2 + x_2^2 \neq 0$.
- Једначина праве $p : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$.
- Хомогене координате праве $p[a : b : c]$.
- Бесконачно далека права $u_\infty : \; x_3 = 0$.

Хомогене координате равни

Дефиниција 2.2

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

- Вектор представник $\overrightarrow{M} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- Бесконачно далека тачка $P_\infty(x_1 : x_2 : 0), \; x_1^2 + x_2^2 \neq 0$.
- Једначина праве $p : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$.
- Хомогене координате праве $p[a : b : c]$.
- Бесконачно далека права $u_\infty : \; x_3 = 0$.
- Допуњена (проширена) афина раван $\bar{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty$.

Пресек правих

Пример 4

Одредити пресек правих $q : 2x - y + 6 = 0$, $r : 2x - y + 5 = 0$ у:

(а) Афиној равни; (б) Допуњеној афиној равни.

Пресек правих

Пример 4

Одредити пресек правих $q : 2x - y + 6 = 0$, $r : 2x - y + 5 = 0$ у:
(а) Афиној равни; (б) Допуњеној афиној равни.

Теорема 2.1

Паралелене праве допуњене афине равни се секу у бесконачно далекој тачки.
Дакле, сваке две праве у допуњеној афиној равни се секу!

Пресек правих

Пример 4

Одредити пресек правих $q: 2x - y + 6 = 0$, $r: 2x - y + 5 = 0$ у:
(а) Афиној равни; (б) Допуњеној афиној равни.

Пример 5

Одредити бесконачно далеку тачку праве $p: 3x - 5y + 1 = 0$.

Реална пројективна раван

Дефиниција 2.3

Реална пројективна раван је скуп хомогених координата:

$$\mathbb{R}P^2 := \{\,(x_1 : x_2 : x_3) \,|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

при чему не могу све три координате истовремено бити једнаке нули.

Реална пројективна раван

Дефиниција 2.3

Реална пројективна раван је скуп хомогених координата:

$$\mathbb{R}P^2 := \{\, (x_1 : x_2 : x_3) \,|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

при чему не могу све три координате истовремено бити једнаке нули.

Идентификација $\mathbb{R}P^2$ са допуњеном афином равни

$$\begin{aligned}\mathbb{R}P^2 &= \{(x_1 : x_2 : x_3)\} = \{\, (x_1 : x_2 : x_3) \,|\, x_3 \neq 0\} \cup \{(x_1 : x_2 : 0)\} \\ &= \{(\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1)\} \cup \{(x_1 : x_2 : 0)\} = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty = \bar{\mathbb{R}}^2\end{aligned}$$

Дуална пројективна раван правих

Дефиниција 2.4

Све праве реалне пројективне равни $\mathbb{R}P^2$ чине пројективну раван $\tilde{\mathbb{R}}P^2 := \{[x_1 : x_2 : x_3]\}$, која се зове дуална пројективна раван правих.

Дуална пројективна раван правих

Дефиниција 2.4

Све праве реалне пројективне равни $\mathbb{R}P^2$ чине пројективну раван $\tilde{\mathbb{R}}P^2 := \{[x_1 : x_2 : x_3]\}$, која се зове дуална пројективна раван правих.

Геометријска интерпретација

- $\mathbb{R}P^2$ – сноп правих у $\mathbb{R}^3$ кроз координатни почетак

Дуална пројективна раван правих

Дефиниција 2.4

Све праве реалне пројективне равни $\mathbb{R}P^2$ чине пројективну раван $\tilde{\mathbb{R}}P^2 := \{[x_1 : x_2 : x_3]\}$, која се зове дуална пројективна раван правих.

Геометријска интерпретација

- $\mathbb{R}P^2$ – сноп правих у $\mathbb{R}^3$ кроз координатни почетак
- $\tilde{\mathbb{R}}P^2$ – прамен равни у $\mathbb{R}^3$ који садржи координатни почетак

Координате тачака и правих

Хомогене координате праве $p = AB$ се добијају као $\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B}$.

Пример 6

Одредити једначину праве $\bar{q}$ кроз тачке $A(1:2:3)$, $B(-2:1:0)$.

У пројективној равни сваке две праве се секу!

Хомогене координате пресечне тачке $\{P\} = a \cap b$ се добијају као $\vec{P} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Пример 7

Одредити пресек правих $a : x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$ и $b : 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$.

Принцип дуалности у пројективној равни

Исказ $\mathcal{I}'$ добијен заменом речи тачка и права, односно припада и садржи у исказу $\mathcal{I}$ назива се дуалан исказ.

Пример 8

$\mathcal{I}$: Постоји јединствена тачка P која припада правама a и b.

$\mathcal{I}'$: Постоји јединствена права p која садржи тачке A и B.

- припада/садржи $\longleftrightarrow$ је инцидентно

Теорема 2.1 (Принцип дуалности у равни)

Ако је исказ $\mathcal{I}$ теорема пројективне равни, тада је и њему дуалан исказ $\mathcal{I}'$ теорема пројективне равни.

Реална пројективна права $\mathbb{R}P^1$

$$C \in p = AB \Longrightarrow \vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

$$\lambda\vec{C} = \lambda\alpha\vec{A} + \lambda\beta\vec{B},\ \lambda \neq 0$$

Реална пројективна права $\mathbb{R}P^1$

$$C \in p = AB \implies \vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$
$$\lambda\vec{C} = \lambda\alpha\vec{A} + \lambda\beta\vec{B},\ \lambda \neq 0$$

- $(\alpha : \beta)$ су хомогене координате на правој p

Реална пројективна права $\mathbb{R}P^1$

$$C \in p = AB \implies \vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B},\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$
$$\lambda\vec{C} = \lambda\alpha\vec{A} + \lambda\beta\vec{B},\ \ \lambda \neq 0$$

- $(\alpha : \beta)$ су хомогене координате на правој p
- Свака права реалне пројективне равни је реална пројективна права $\mathbb{R}P^1$ која се добија додавањем бесконачно далеке тачке P_∞ афиној правој $\mathbb{R}$:

$$p = \mathbb{R}P^1 = \{(\alpha : \beta)\} = \{(\frac{\alpha}{\beta} : 1)\} \cup \{(1 : 0)\} = \mathbb{R} \cup P_\infty$$

Модел пројективне праве

$$\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B},\ \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \alpha^2+\beta^2 \neq 0$$

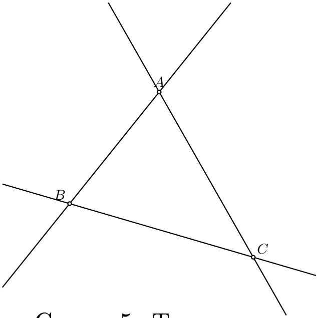
$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\vec{C} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\vec{A} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\vec{B} = \cos\phi\vec{A} + \sin\phi\vec{B}$$

- Распоред тачака на пројективној правој је исти као на кругу.
- ~~Релација између~~ $\longrightarrow$ релација раздвојености парова тачака.
- Пар тачака A, B раздваја пар тачака C, D: $A, B \div C, D$.
- Пројективна дуж.

Тротеменик

Дефиниција 2.5

Тротеменик ABC је фигура пројективне равни која се састоји од три неколинеарне тачке A, B, C и три њима одређене праве AB, AC, BC.

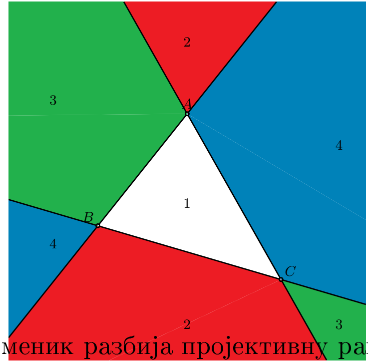


Слика 5: Тротеменик

Тротеменик

Дефиниција 2.5

Тротеменик ABC је фигура пројективне равни која се састоји од три неколинеарне тачке A, B, C и три њима одређене праве AB, AC, BC.

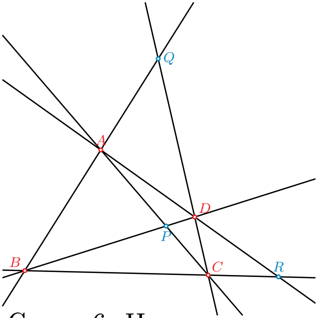


Слика 5: Тротеменик разбија пројективну раван на 4 области!

Четворотеменик

Дефиниција 2.6

Четворотеменик $ABCD$ је фигура пројективне равни која се састоји од четири тачке A, B, C, D од којих никоје три нису колинеарне и шест правих одређених тим тачкама (ивицама четворотеменика).

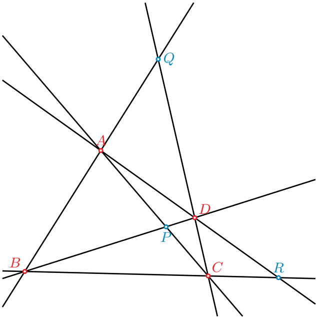


Слика 6: Четворотеменик

Четворотеменик

Дефиниција 2.6

Дијагоналне тачке четворотеменика су пресеци „несуседних” ивица $P = AC \times BD$, $Q = AB \times CD$, $R = AD \times BC$.

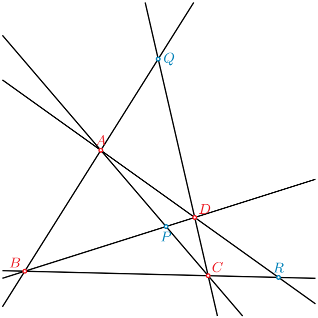


Слика 6: Четворотеменик

Четворотеменик

Дефиниција 2.6

A, B, C, D су тачке у општем положају.



Слика 6: Четворотеменик

Дворазмера тачака

Дефиниција 2.7

Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи:

$$\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}, \quad \vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}. \tag{1}$$

Дворазмера тачака A, B, C, D је број

$$(A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}. \tag{2}$$

Дворазмера тачака не зависи од избора вектора представника.

Пример 9

Израчунати (A, B, C, D), $A(1 : 2 : 1)$, $B(0 : 3 : -1)$, $C(4 : -1 : 7)$, $D(2 : 1 : 3)$.

Особине дворазмере

- $(A,B,C,D)=(B,A,C,D)^{-1}$

Доказ:

$$\vec{C}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}=\beta\vec{B}+\alpha\vec{A},$$
$$\vec{D}=\gamma\vec{A}+\delta\vec{B}=\delta\vec{B}+\gamma\vec{A},$$
$$\Longrightarrow (A,B,C,D)=\frac{\beta}{\alpha}:\frac{\delta}{\gamma}=\left(\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}\right)^{-1}=(B,A,C,D)^{-1}$$

Особине дворазмере

- $(A,B,C,D) = (B,A,C,D)^{-1}$
- $(A,B,C,D) = (C,D,A,B)$

Доказ:

$$\begin{aligned}
\vec{C} =& \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}, \quad \vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}, \\
\iff & \begin{pmatrix} \vec{C} \\ \vec{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{C} \\ \vec{D} \end{pmatrix} \\
\iff & (\alpha\delta - \beta\gamma)\vec{A} = \delta\vec{C} - \beta\vec{D}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma)\vec{B} = -\gamma\vec{C} + \alpha\vec{D} \\
\iff & (C,D,A,B) = \frac{-\beta}{\delta} : \frac{\alpha}{-\gamma} = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = (A,B,C,D)
\end{aligned}$$

Особине дворазмере

- $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)^{-1}$
- $(A, B, C, D) = (C, D, A, B)$
- За различите тачке важи $(A, B, C, D) \neq 0, 1$. (домаћи)
- Ако су дате тачке A, B, C и број $\mu \neq 0, 1$, тада постоји јединствена тачка D таква да је $(A, B, C, D) = \mu$. (домаћи)

Особине дворазмере

- $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)^{-1}$
- $(A, B, C, D) = (C, D, A, B)$
- За различите тачке важи $(A, B, C, D) \neq 0, 1$. (домаћи)
- Ако су дате тачке A, B, C и број $\mu \neq 0, 1$, тада постоји јединствена тачка D таква да је $(A, B, C, D) = \mu$. (домаћи)

Дефиниција 2.8

Парови тачака A, B и C, D су хармонијски конјуговани (у ознаци $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ ако је $(A, B, C, D) = -1$.

Дворазмера правих

Дворазмера правих дефинише се аналогно дворазмери тачака.

Дворазмера правих

Теорема 2.2

Ако су a, b, c, d конкурентне праве и $A \in a,\ B \in b,\ C \in c,$ $D \in d$ колинеарне тачке, тада је $(a, b, c, d) = (A, B, C, D)$.

Доказ

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\ \ \vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b} \implies (a, b, c, d) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}.$$

Нека је $A, B, C, D \in p$. Тада важи:

$$\vec{C} = \vec{c} \times \vec{p} = \alpha(\vec{a} \times \vec{p}) + \beta(\vec{b} \times \vec{p}) = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$$
$$\vec{D} = \vec{d} \times \vec{p} = \gamma(\vec{a} \times \vec{p}) + \delta(\vec{b} \times \vec{p}) = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$$
$$\implies (A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = (a, b, c, d).$$

Дворазмера правих

Теорема 2.2

Ако су a, b, c, d конкурентне праве и $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$ колинеарне тачке, тада је $(a, b, c, d) = (A, B, C, D)$.

Последица

Дворазмера је инваријанта централног пројектовања.

Афини смисао дворазмере

Теорема 2.3

$$(A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$$

Доказ

- A, B, C, D – коначне тачке $\implies$ $x_3 \neq 0$, нпр. $x_3 = 1$
- $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} \implies \alpha + \beta = 1$
- $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \dfrac{C - A}{B - C} = \dfrac{(\alpha - 1)A + \beta B}{-\alpha A + (1 - \beta)B} = \dfrac{\beta(B - A)}{\alpha(B - A)} = \dfrac{\beta}{\alpha}$
- Слично, $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \dfrac{\delta}{\gamma}$.

Афини смисао дворазмере

Теорема 2.3

$$(A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$$

Последица

Средиште дужи је конјуговано са бесконачно далеком тачком.

Афини смисао дворазмере

Теорема 2.3

$$(A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$$

Последица

Средиште дужи је конјуговано са бесконачно далеком тачком.

Раздвојеност парова тачака и дворазмера

$$A, B \div C, D \iff (A, B, C, D) < 0.$$