Dodatni zadaci iz Projektivne geometrije

Srđan Vukmirović, Tijana Šukilović

6. maj 2020

1. Odrediti fiksne tačke i fiksne prave preslikavanja:

(a)
$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1' &=& 4x_1 - x_2 \\ \lambda x_2' &=& 6x_1 - 3x_2 \\ \lambda x_3' &=& x_1 - x_2 - x_3 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1' &=& x_2 + x_3 \\ \lambda x_2' &=& x_1 + x_3 \\ \lambda x_3' &=& x_1 + x_2 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1' &=& 10x_1 + 6x_2 - 6x_3 \\ \lambda x_2' &=& -3x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \lambda x_3' &=& 3x_1 + 3x_2 + x_3 \end{array}$$

Rešenje. (a) Tražimo tačke za čije koordinate važi $X = (x_1 : x_2 : x_3) = (x_1' : x_2' : x_3')$, odnosno rešavamo sistem:

$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1 &=& 4x_1 - x_2 \\ \lambda x_2 &=& 6x_1 - 3x_2 \\ \lambda x_3 &=& x_1 - x_2 - x_3. \end{array}$$

Sistem kraće zapisujemo kao $\lambda X = PX$, tj. $(P - \lambda E)X = 0$. Dakle, fiksne tačke su sopstveni vektori matrice preslikavanja P (trivijalno rešenje sistema $(0:0:0)$ se odbacuje jer to nije tačka projektivne ravni).

Karakteristični polinom je:

$$\chi_P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 6 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda + 6 = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-3).$$

Dakle, imamo tri realne i različite sopstvene vrednosti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ i $\lambda_3 = 3$. Odgovarajući sopstveni vektori su vektori predstavnici koordinata traženih fiksnih tačaka $\boldsymbol{A_1(0:0:1)}$, $\boldsymbol{A_2(1:6:5)}$ i $\boldsymbol{A_3(1:1:0)}$.

Odredimo sad fiksne prave ovog preslikavanja.

I način: Primetimo da ako imamo tačno tri fiksne tačke A_1, A_2 i A_3, tada će fiksne prave biti prave $p_1 = A_2A_3$, $p_2 = A_1A_3$ i $p_3 = A_1A_2$. Osim ove tri prave, druge fiksne prave ne postoje. U suprotnom, ako bi postojala još neka fiksna prava q, tada bi i njene presečne tačke sa pravama p_1, p_2 i p_3 bile fiksne, a to je nemoguće.

$$\begin{array}{ll} \vec{A_2} \times \vec{A_3} = [-5:5:-5] \sim [1:-1:1], & \boldsymbol{p_1:\ x_1 - x_2 + x_3 = 0}, \\ \vec{A_1} \times \vec{A_3} = [-1:1:0] \sim [1:-1:0], & \boldsymbol{p_2:\ x_1 - x_2 = 0}, \\ \vec{A_1} \times \vec{A_2} = [-6:1:0] \sim [6:-1:0], & \boldsymbol{p_3:\ 6x_1 - x_2 = 0}. \end{array}$$

II način: Podsetimo se da ako se koordinate tačaka projektivne ravni transformišu pomoću pravila $\lambda X' = PX$, tada se koordinate pravih transformišu po pravilu $\lambda u = P^T u'$. Dakle, fiksne prave zadovoljavaju jednačinu $\lambda u = P^T u$, tj. one odgovaraju sopstvenim vrednostima matrice P^T. Matrice P i P^T imaju iste sopstvene vrednosti! Sopstveni vektori za matricu P^T su $\vec{p_1} = (1,-1,1)$, $\vec{p_2} = (1,-1,0)$ i $\vec{p_3} = (6,-1,0)$.

(b) Slično delu (a), fiksne tačke preslikavanja se određuju kao sopstveni vektori matrice P. Karakteristični polinom je: $\chi_P(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda+1)^2$. Za jednostruku sopstvenu vrednost $\lambda_1 = 2$ odgovarajući sopstveni vektor je $\vec{A} = (1,1,1)$, tj. imamo fiksnu tačku $\boldsymbol{A(1:1:1)}$. Za dvostruku sopstvenu vrednost $\lambda_2 = -1$ dobijamo da koordinate fiksne tačka $X(x_1 : x_2 : x_3)$ treba da zadovolje uslov: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ovo znači da su sve tačke prave $\boldsymbol{p : x_1 + x_2 + x_3 = 0}$ fiksne.

Fiksne prave se mogu odrediti pomoću sopstvenih vektora matrice P^T, ali postoji i kraći način. Primetimo da svaka prava kroz tačku A mora biti fiksna jer sadrži dve fiksne tačke: tačku A i presečnu tačku te prave sa pravom p. Dakle, tačka A je tačka kroz koju je svaka prava fiksna, a prava p je prava čija je svaka tačka fiksna, pa je zadato preslikavanje homologija sa osom p i centrom u A koji ne pripada osi. **Fiskne tačke ove homologije su $\boldsymbol{A}$ i sve tačke prave $\boldsymbol{p}$, a fiksne prave su $\boldsymbol{p}$ i sve prave kroz tačku $\boldsymbol{A}$**.

(c) Čitaocu se ostavlja za domaći da pokaže da je dato preslikavanje homologija kojoj centar pripada osi. **Fiksne tačke su sve tačke ose, a fiksne prave su sve prave kroz centar**.

2. Krivu drugog reda Γ svesti na projektivni kanonski oblik i napisati o kojoj krivoj se radi u proširenoj afinoj ravni:

(a) $\Gamma : x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$

(b) $\Gamma : 6x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3 = 0$

(c) $\Gamma : x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$

Rešenje. (a)

I način: Prevesti problem u afinu ravan i tamo ga rešiti poznatim metodama. Prelaskom na afine koordinate $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ jednačina krive Γ postaje: $xy + x + y = 0$. Uvodimo smenu:

$$x = \cos\phi\, x' - \sin\phi\, y', \quad y = \sin\phi\, x' + \cos\phi\, y',$$

gde je
$$\cot 2\phi = \frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = 0 \Longrightarrow 2\phi = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Smena koju smo uveli odgovara rotaciji koordinatnog sistema za ugao $\phi = \frac{\pi}{4}$. Dakle,

$$\begin{aligned}
0 &= xy + x + y \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y')(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y') + (\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y') + (\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y') \\
&= \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + \sqrt{2}x' = \frac{1}{2}(x'^2 + 2\sqrt{2}x' + 2) - \frac{1}{2}y'^2 - 1 \\
&= \frac{1}{2}(\underbrace{x' + \sqrt{2}}_{x''})^2 - \frac{1}{2}y'^2 - 1
\end{aligned}$$

Smenom $x'' = x' + \sqrt{2}$, $y'' = y'$ (translacijom koordinatnog početka za vektor $\vec{v} = (\sqrt{2}, 0)$) dobijamo kanonsku jednačinu krive $\Gamma : x''^2 - y''^2 = 2$. Ovo je jednačina **hiperbole** u afinoj ravni. Potrebno je sada krivu "vratiti u projektivnu ravan", tj. zapisati je u homogenim koordinatama: $\Gamma : {x_1}''^2 - {x_2''}^2 - 2{x_3''}^2 = 0$.

Pažnja: U odnosu na izometrijske transformacije kojima nam je bilo dozvoljeno da menjamo koordinatni sistem u afinoj ravni, u projektivnoj ravni nam je dozvoljeno i da primenimo skaliranje. Dodatna smena $x_1''' = x_1''$, $x_2''' = x_2''$, $x_3''' = \sqrt{2}x_3''$ nam daje konačan kanonski oblik krive Γ u projektivnoj ravni: $\boldsymbol{{x_1'''}^2 - {x_2'''}^2 - {x_3'''}^2 = 0}$.

II način: U projektivnoj ravni krive 2. reda klasifikujemo u dve grupe: nedegenerisane krive (prazan skup, tj. "nula kriva", i ovalne krive) i degenerisane (tačka, "dvostruka" prava i dve prave). Kriva je nedegenerisana ako je njena pridružena matrica regularna. Tip ovalne krive (slično važi i za degenerisane) određujemo tako što odredimo presek krive Γ sa beskonačno dalekom pravom $u_\infty : x_3 = 0$.

Dakle, prvo treba da odredimo pridruženu matricu krive G, a zatim i proverimo njenu regularnost:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = G^T, \qquad \det G = \frac{1}{4} \neq 0 \Longrightarrow G - \text{regularna.}$$

Ostaje da se ispita da li je u pitanju nula ili ovalna kriva i koji tip ovalne krive (tj. da li je kriva elipsa, hiperbola ili parabola - njih projektivno ne razlikujemo, ali možemo da ih razlikujemo u odgovarajućim afinim koordinatama). Rešavamo sistem:

$$\Gamma : x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \qquad u_\infty : x_3 = 0. \tag{1}$$

Postoje dva rešenja: $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 \neq 0$ i $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 \neq 0$. Dakle, ova nedegenerisana kriva ima dve presečne tačke $A_\infty(0:1:0)$ i $B_\infty(1:0:0)$ sa beskonačno dalekom pravom, pa je u pitanju **hiperbola**.

Nedostatak ovog načina rešavanja je što ne dobijamo formula transformacija kojima sa početna kriva svodi na kanonski oblik (iako taj oblik znamo iz same klasifikacije krivih 2. reda). Zato nam je potreban i treći način.

III način: Matrica transformacija koordinata C je ortogonalna matrica ($C^T = C^{-1}$) čije su kolone *normirani sopstveni vektori* pridružene matrice G. U novim koordinatama, matrica krive je $G' = C^T G C = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, gde su $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sopstvene vrednosti matrice G. Da bi se dobio kanonski oblik, potrebno je još izvršiti i skaliranje $\lambda x''_k = \sqrt{|\lambda_k|}\, x_k$, $k = 1, 2, 3$ (ako je neko $\lambda_k = 0$, tada je transformacija jednostavno $\lambda x''_k = x'_k$).

Primenimo ovaj postupak na našu krivu. Primetimo za početak da ćemo značajno olakšati račun ako jednačinu krive Γ zapišemo kao $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$. Čitaocu ostavljamo za domaći da proveri da su tada odgovarajuće matrice date sa:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad G' = C^T G C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pa je kriva u novim koordinaama data sa $2x_1'^2 - x_2'^2 - x_3^2 = 0$. Transformacije koordinata su date formulom $\lambda X = CX'$. Sada još samo treba dodati skaliranje: $x''_1 = \sqrt{2}x'_1$, $x''_2 = x'_2$, $x''_3 = x'_3$ i konačne formule su (proveriti):

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= x''_1 - \sqrt{3}x''_2 + x''_3 \\ \lambda x_2 &= x''_1 \qquad\quad\; - 2x''_3 \\ \lambda x_3 &= x''_1 + \sqrt{3}x''_2 + x''_3. \end{aligned}$$

Dakle, projekivni kanonski oblik krive je $x_1"^2 - x_2"^2 - x_3"^2 = 0$ i radi se ovalnoj krivoj.

Da bi se preciziralo da li je ta ovalna kriva u odgovarajućoj proširenoj afinoj ravni elipsa, hiperbola ili parabola, potrebno je još rešiti sistem (1).

(b) Da bismo ilustrovali još jedno ograničenje *II* načina rešavanja iz dela (a), primenimo ga na ovaj primer.

Pridružena matrica krive Γ je data sa:

$$G = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = G^T, \qquad \det G = 144 \neq 0.$$

Dakle, matrica G je regularna, pa je kriva Γ nedegenerisana. Sistem:

$$\Gamma : 6x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3 = 0 \qquad u_\infty : x_3 = 0.$$

nema realnih rešenja, tj. prava u_∞ ne seče krivu Γ i možemo pogrešno zaključiti da se radi o elipsi u proširenoj afinoj ravni. Kada bi ova kriva bila elipsa, tada bi postojala neka realna tačka koja joj pripada. Kako su sve tačke elipse konačne, bez smanjenja opštosti možemo uzeti da je $x_3 = 1$, odnosno rešiti sistem:

$$\begin{cases} 6x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_2 + 5 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1^2 = -5x_2^2 - 2x_2 - 5 < 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Dakle, $x_1 \in \mathbb{C}$, tako da je naša kriva "**nula kriva**" (nedegenerisana kriva koja nema realnih tačaka) čiji je kanonski projektivni oblik $\boldsymbol{x_1"^2 + x_2"^2 + x_3"^2 = 0}$.

Čitaocu se ostavlja za domaći da zadatak uradi primenjujući *III* način.

(c) Pridružena matrica krive Γ je data sa:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = G^T$$

i njene sopstvene vrednosti su $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ortogonalna matrica C transformacija koordinata kao kolone ima normirane sopstvene vektore matrice G i data je sa:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Primetimo sledeće: simetrična matrica G uvek ima realne sopstvene vrednosti i za različite sopstvene vrednosti, odgovarajući sopstveni vektori su ortogonalni. Šta se dešava kada sopstvena vrednost ima višestrukost? Za dvostruku sopstvenu vrednost imamo proizvoljnost biranja druga dva sopstvena vektora: njihove koordinate treba samo da zadovolje uslov $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Da bi matrica C bila ortogonalna, tj. da bi ispunjavala uslov $C^T = C^{-1}$, potrebno je da izaberemo ova dva vektora tako da budu međusobno ortogonalni i normirani. Čitaocu se ostavlja za vežbu da proveri šta se dešava ako matrica G ima trostruku sopstvenu vrednost.

U novim koordinatama, matrica krive je $G' = C^T G C = C^{-1} G C = diag(6, 0, 0)$, odnosno kanonski projektivni oblik krive je $\boldsymbol{x_1'^2 = 0}$ i kriva Γ je **prava**. Formile transformacija su date matricom C i u raspisanom obliku glase:

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2' - \frac{1}{\sqrt{2}} x_3', \\
\lambda x_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2' + \frac{1}{\sqrt{2}} x_3' \\
\lambda x_3 &= \frac{2}{\sqrt{6}} x_1' - \frac{1}{\sqrt{3}} x_2'
\end{aligned}$$

Primetimo da smo ovaj zadatak mogli da rešimo i na jednostavniji način:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2.$$

Transformacije oblika:

$$\begin{aligned}
\lambda x_1' &= x_1 + x_2 + 2x_3, \\
\lambda x_2' &= \phantom{x_1 + {}} x_2 \\
\lambda x_3' &= \phantom{x_1 + x_2 + 2{}} x_3
\end{aligned}$$

svode krivu na $\boldsymbol{x_1'^2 = 0}$.