

# Pitanja iz geometrije za pismeni i usmeni (I smer, druga godina)

Tijana Šukilović, Marijana Babić, Nenad Lazić

26. decembar 2015

## 1 Teorijska pitanja

1. **Vektori:** Definicija vektora, kolinearni i koplanarni vektori, definicija sabiranja vektora, definicija množenja vektora brojem, osobine vektorskog prostora, linearna zavisnost i nezavisnost vektora (primeri), dokaz da su svaka tri vektora ravni linearno zavisna, baza i dimenzija vektorskog prostora, koordinate vektora i tačke, definicija centra mase, težište trougla, formula za težište  $n$ -tačaka  $P_1, \dots, P_n$ , definicija skalarnog proizvoda, skalarni proizvod u ON bazi, računanje uglova i dužina pomoću skalarnog proizvoda, orijentacija ravni i prostora, definicija i geometrijska interpretacija vektorskog proizvoda, tablica vektorskog proizvoda u ON bazi, računanje vektorskog proizvoda, primene vektorskog proizvoda (računanje površine i određivanje orijentacije trougla, uslov da tačka  $P$  pripada trouglu  $ABC$ , uslov kolinearnosti tri tačke, tačke sa iste strane prave...), definicija mešovitog proizvoda, dokaz da je apsolutna vrednost mešovitog proizvoda jednaka zapremini paralelepipeda, računanje mešovitog proizvoda, primene mešovitog proizvoda (uslov koplanarnosti tri vektora, uslov koplanarnosti četiri tačke, određivanje zapremine paralelepipeda/tetraedra...)
2. **Transformacije koordinata:** Transformacije koordinata vektora, napisati opšte formule za transformaciju koordinata tačaka i objasniti šta je šta, dva oblika formula za transformaciju koordinata ON repera i koji oblik šta predstavlja
3. **Afine transformacije:** Definicija afinog preslikavanja, opšte formule afinog preslikavanja ravni, matricno predstavljanje afinog preslikavanja ravni  $3 \times 3$  matricom, osobine afinih preslikavanja, šta je slika trougla (kvadrata, paralelograma, trapeza, kruga...) pri afinom preslikavanju, primeri afinih preslikavanja ravni (translacija, rotacija oko proizvoljne tačke, refleksija u odnosu na proizvoljnu pravu, skaliranje, homotetija, smicanje), opšte formule afinog preslikavanja prostora i matricni zapis  $4 \times 4$  matricom, matrice rotacije za ugao  $\theta$  oko koordinatnih osa, rotacija oko proizvoljne prave u prostoru, refleksija u odnosu na ravan, dve Ojlerove teoreme (Ojlerovi uglovi i veza između sopstvenih i svetskih rotacija), izometrije i kretanja (primeri), koji uslov mora da zadovoljava matrica kretanja (izometrije)
4. **Analiitička geometrija ravni:** Jednačine prave u ravni (eksplicitna, implicitna, parametarska...), napisati parametarsku jednačinu duži  $[AB]$ , parametrizacija trougla i paralelograma, ispitati da li tačke leže u istoj poluravni, napisati dve formule za rastojanje tačke od prave u ravni, presek implicitno zadatih pravih, presek parametarski zadatih pravih, presek duži, šta

je konusni presek i šta on može biti, šta je ekscentricitet i koliki je ekscentricitet elipse (kruga, hiperbole, parabole), napisati implicitnu i parametarsku jednačinu kruga poluprečnika  $r$  sa centrom u  $C(x_0, y_0)$ , napisati kanonsku jednačinu i parametrizaciju elipse (hiperbole), parametrizacija parabole (primer jednačine kosog hica), navesti i pokazati fokusne osobine elipse (hiperbole), navesti i nacrtati optičku osobinu elipse (parabole, hiperbole), napisati opšti oblik krive drugog reda, napisati sve kanonske oblike krivih drugog reda (i imena tih krivih), svesti krivu drugog reda na kanonski oblik translacijom (primer), svesti na kanonski oblik krivu  $xy - 1 = 0$  rotacijom, napisati definiciju Beizijerove krive stepena 2 i stepena 3, skicirati Beizijerove krive stepena 2 i 3 i njihove kontrolne tačke, matična reprezentacija Beizijerove krive stepena 2, navesti osobine Beizijerovih krivih, pokazati da je svaka Beizijerova kriva stepena 2 deo parabole, nacrtati De Casteljaou algoritam za krivu stepena 4 i neko  $t \in [0, 1]$  (na primer  $t = 0.3, t = 0.5 \dots$ ), kako se Beizijerova kriva stepena 2 (ili 3) deli na dve krive istog stepena u tački  $t = 0.4$  (nacrtati i reći koji su poligoni), kako se povećava stepen Beizijerove krive bez promene oblika

5. **Analitička geometrija prostora:** Shta predstavlja jednačina  $x^2 + y^2 = 1$  u ravni, a šta u prostoru, šta predstavlja jednačina  $x^2 + y^2 = 1, z = 4$  u prostoru, napisati parametarski i implicitnu jednačinu ravni, skicirati ravni date implicitnom jednačinom, navesti i skicirati međusobne položaje dve ravni u prostoru, šta je i kako se određuje koordinatni sistem prilagođen datoj ravni  $\alpha$ , napisati parametarsku (kanonsku) jednačinu prave u prostoru, pravu u parametarskom obliku zapisati kao presek dve ravni, navesti teoremu o pramenu ravni, navesti i skicirati međusobne položaje dve prave  $p$  i  $q$  u prostoru (napisati uslove u terminima  $\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}$ ), šta su mimoilazne prave, navesti teoremu o normali mimoilaznih pravih (primer kocke i tetraedra), navesti i skicirati međusobne položaje prave i ravni u prostoru, kako se određuje presek prave i trougla, kako se određuje presek ravni i trougla i šta može biti, napisati i dokazati formulu za rastojanje tačke od prave/ravni, napisati formulu za rastojanje mimoilaznih pravih, navesti formulu za ugao između dve prave/dve ravni/prave i ravni.
6. **Poliedarske površi:** Definicija proste poliedarske površi, definicija ruba poliedarske površi, napisati tabelu povezanosti za kocku, definisati orijentabilnost poliedarske površi, dokazati da je tetraedar (piramida, kocka, telo po izboru) orijentabilan, skicirati glatku Mebijusovu traku i njen poliedarski model, napisati tabelu povezanosti Mebijusove trake, dokazati da Mebijusova traka nije orijentabilna, nacrtati torus i njegov poliedarski model, definicija Ojlerove karakteristike, skicirati glatke površi roda 0, 1 i 2, definisati Platonovo telo, nabrojati Platonova tela, dokazati da postoji tačno 5 Platonovih tela, tabela sa brojem pljosni, ivica i temena Platonovih tela, dualna Platonova tela (skicirati).
7. **Poligon i poligonska linija:** Definicija poligonske linije i poligona, definicija proste poligonske linije (primeri), formiranje prostog poligona ako je dat skup temena, uslov da tačka pripada unutrašnjosti poligona (nacrtati primere), definisati triangulaciju poligona, dokaz da svaki prost poligon sa više od 3 temena ima unutrašnju dijagonalu, formulisati i dokazati teoremu da se svaki prost poligon  $p$  sa  $n$  temena može triangulisati sa  $n - 2$  trougla, navesti primere algoritama za triangulaciju poligona, definicija konveksnog skupa (nacrtati primere konveksnog i nekonveksnog skupa), definisati konveksni omotač skupa tačaka u ravni i nacrtati primer, navesti primere algoritama za određivanje konveksnog omotača skupa od  $n$  tačaka ravni i detaljno opisati jedan (po izboru), opisati Grahamov algoritam za konveksni omotač i navesti primer.

## 2 Vektori

2.1 (\*). Dokazati da je  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  ako i samo ako se duži  $AC$  i  $BD$  polove.

2.2 (\*). U odnosu na tačku  $O$  dati su vektori položaja  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  tačaka  $A$  i  $B$  ( $A \neq B$ ). Izraziti vektor položaja tačke  $C$  takve da:

a)  $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R};$

b) tačka  $C$  deli duž  $AB$  u odnosu  $p : q, p, q \in \mathbb{N}$

2.3 (\*). Neka je  $ABC$  trougao i  $T$  tačka takva da važi  $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ .

a) Dokazati da tačka  $T$  ne zavisi od izbora tačke  $O$ .

b) Dokazati da je tačka  $T$  težište trougla, tj. presek težišnih duži i da ona težišne duži deli u odnosu  $2 : 1$ .

2.4 (\*). Neka je  $ABCD$  tetraedar i  $T$  tačka takva da važi  $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ . Težišnom duži tetraedra se naziva duž koja spaja teme tetraedra sa težištem napsramne pljosni. Dokazati da se težišne duži tetraedra seku u tački  $T$  i da ih ona deli u odnosu  $3 : 1$ . Tačka  $T$  se naziva **težište tetraedra**.

2.5. Jedan kraj poluge dugačke 5 m drži roditelj, a drugi je oslonjen na zemlju. Dete mase 15 kg sedi na 2 m od oslonca (tj. drugog kraja poluge). Koliku masu drži roditelj?

2.6. Dat je paralelogram  $ABCD$ . Ako je tačka  $F$  središte stranice  $BC$ , tačka  $G$  središte stranice  $CD$ , a tačka  $E$  presek duži  $AF$  i  $BG$  odrediti odnose  $\frac{AE}{EF}$  i  $\frac{BE}{EG}$ .

2.7. U ravni je dat trougao  $ABC$ . Neka tačka  $D$  pripada stranici  $AB$ , a tačka  $E$  stranici  $BC$ , tako da je  $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$  i  $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$ . Ako se duži  $AE$  i  $CD$  seku u tački  $F$  odrediti u kom odnosu tačka  $F$  deli duži  $AE$  i  $CD$ .

2.8. Dati su vektori  $\vec{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$  i  $\vec{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$  iz  $\mathbb{V}^3$  svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a)  $|\vec{v}|$ ; b)  $\angle(\vec{v}, \vec{u})$ .

2.9 (\*). a) Ako je  $A_1$  presek simetrale ugla  $\angle BAC$  i ivice  $BC$  trougla  $ABC$ , odrediti vektor  $\overrightarrow{AA_1}$  preko vektora  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC}$ .

b) Dokazati da simetrala ugla u trouglu  $ABC$  deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana.

c) Dokazati da se simetrale uglova trougla  $ABC$  seku u jednoj tački (centar upisanog kruga).

2.10 (\*). Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).

2.11. Odrediti površinu trougla  $ABC$ , ako je  $A(1, 2), B(2, 3), C(-3, 4)$ . Da li je trougao  $ABC$  pozitivne orijentacije?

2.12. Ispitati da li tačka  $M(2, 3)$  pripada trouglu  $ABC$ , ako je  $A(1, 7), B(-3, 3), C(3, -3)$ ?

2.13. Koje se od tačaka  $D(1, 2), E(4, -5), F(-7, 3)$  nalaze sa iste strane prave  $AB$ ,  $A(2, -4), B(1, -1)$ , kao i tačka  $C(1, 1)$ ?

**2.14.** a) Odrediti mešoviti proizvod  $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$ , ako su njihove koordinate u ortonormiranoj bazi  $\vec{v} = (1, 2, -7)$ ,  $\vec{u} = (-1, 3, 3)$ ,  $\vec{w} = (-1, 8, -1)$ .

b) Da li su ti vektori linearno nezavisni?

**2.15.** a) Da li su tačke  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(7, 6)$  kolinearne?

b) Da li su tačke  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(2, 3, 4)$ ,  $C(7, -6, 5)$ ,  $D(5, -8, 3)$  koplanarne?

**2.16.** Data je kocka  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  ivice 1.

a) Odrediti ugao između dijagonala strana kocke  $BC_1$  i  $D_1 B_1$ .

b) Odrediti zapreminu tetraedra  $BC_1 B_1 D$ .

**2.17.** Dat je pravilan šestougao  $ABCDEF$ . Ako je data baza  $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ,  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AF}$ , odrediti koordinate temena šestougla u reperu  $A\vec{e}_1\vec{e}_2$ .

**2.18.** Neka je  $OABC$  paralelogram i  $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ ,  $f = (\frac{1}{2}\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BC})$  dve baze. Odrediti formule transformacija koordinata iz repera  $Oe$  u reper  $Bf$ , kao i inverzne formule.

**2.19.** Da li formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

prestavlja transformaciju koordinata između dva ortonormirana repera? Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.

### 3 Afina preslikavanja

**3.1.** Date su tačke  $A(-1, -1)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $C(1, 1)$ ,  $D(-1, 1)$ ;  $A'(4, 5)$ ,  $B'(8, 7)$ ,  $C'(6, 9)$ ,  $D'(2, 7)$ .

a) Odrediti jednačine afinog preslikavanja koje kvadrat  $ABCD$  preslikava u paralelogram  $A'B'C'D'$ .

b) Izračunati površinu paralelograma, koristeći determinantu matrice dobijenog preslikavanja i površinu kvadrata.

**3.2.** Dato je afino preslikavanje formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Odrediti formule inverznog preslikavanja.

**3.3.** Odrediti formule afinog preslikavanja koje trougao  $OAB$  preslikava u trougao  $O'A'B'$ , ako je  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$  i  $O'(5, -4)$ ,  $A'(7, -8)$ ,  $B'(4, 1)$ .

a) Da li preslikavanje čuva orijentaciju?

b) Izračunati površinu trougla  $O'A'B'$  (znajući da je  $P(\triangle OAB) = 1/2$  i znajući determinantu preslikavanja).

**3.4.** Odrediti formule afinog preslikavanja koje trougao  $PQR$  preslikava u trougao  $P'Q'R'$ , ako je  $P(1, 1)$ ,  $Q(1, 2)$ ,  $R(4, 4)$  i  $P'(5, -4)$ ,  $Q'(7, -8)$ ,  $R'(4, 1)$ . Da li preslikavanje čuva orijentaciju?

**Uputstvo:** Zadatak uraditi tako što se nađe preslikavanje  $f : (O, A, B) \mapsto (P, Q, R)$  odnosno  $g : (O, A, B) \mapsto (P', Q', R')$  (prethodni zadatak). Traženo preslikavanje je  $g \circ f^{-1}$ .

**3.5.** a) Da li su trouglovi  $PQR$  i  $P'Q'R'$  podudarni ako je  $P(0, 0)$ ,  $Q(5, 5)$ ,  $R(10, -15)$  i  $P'(1, -7)$ ,  $Q'(0, 0)$  i  $R'(19, -8)$ .

**Uputstvo:** Proveriti dužine stranica.

b) Odrediti izometriju koja preslikava  $PQR$  u  $P'Q'R'$ . O kojoj se izometriji radi?  
(Iz matrice izometrije vidi se da je reč o kompoziciji rotacije za ugao  $\arccos(3/5)$  i translacije za vektor  $(1, -7)$ ).

**3.6.** Odrediti formule homotetije sa centrom u tački  $C(1, 2)$  i koeficijentom 3. U koju tačku se preslikava koordinatni početak pri ovoj homotetiji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku:  $x' = \dots$ ,  $y' = \dots$ )

**3.7.** Odrediti formule rotacije za ugao  $\phi = \frac{7\pi}{6}$  oko tačke  $A(-2, 3)$ . U koju tačku se preslikava tačka  $M(1, 3)$  pri ovoj rotaciji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku:  $x' = \dots$ ,  $y' = \dots$ )

**3.8.** Korisnik je obeležio pravougaonik (recimo sliku) sa naspravnim temenima  $P(360, 420)$  i  $Q(520, 520)$ . Odrediti formule afine transformacije koja taj pravougaonik preslikava na ceo ekran dimenzija  $800 \times 600$  bez distorzije, tj. homotetijom.

**3.9.** Odrediti formule refleksije u odnosu na pravu  $3x - 4y - 6 = 0$  u ravni.

**3.10.** Odrediti formule refleksije u odnosu na ravan  $\alpha_0 : 2x - y + 2z = 0$ .

**3.11.** Odrediti formule rotacije za ugao  $\phi = \frac{\pi}{2}$  oko prave  $p : P(0, 1, 0)$ ,  $\vec{p}(-1, 2, 2)$ .

## 4 Analitička geometrija u ravni

**4.1.** Data je prava  $q : x = -t + 4, y = 2t - 7, t \in \mathbb{R}$ .

a) Odrediti implicitni oblik prave  $q$ .

b) Odrediti implicitni oblik prave  $r$  koja sadrži tačku  $R(3, 7)$  i paralelna je  $q$ .

**4.2.** Odrediti jednačinu normale  $n$  iz tačke  $A(1, 7)$  na pravu  $p$  ako je:

a)  $p : x = 2t + 4, y = 3t - 5, t \in \mathbb{R}$       b)  $p : 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0$ .

**4.3.** Neka je  $A(2, 3), B(-1, 4)$ .

a) Odrediti parametarsku jednačinu prave  $AB$ .

b) Ispitati da li tačka  $C(14, -1)$  pripada polupravoj  $[AB)$ .

c) Ispitati da li tačka  $D(1, \frac{10}{3})$  duži  $[AB]$  i u kom odnosu je deli.

**4.4.** Ispitati da li tačke  $C(1, 1)$  i  $D(-7, 11)$  pripadaju istoj poluravni određenoj pravom  $AB$ ,  $A(2, -2)$ ,  $B(1, 3)$ .

**4.5.** Ako je  $A(1, 2), B(3, 7)$ , odrediti koordinate tačaka koje dele duž  $AB$  na pet jednakih delova.

**4.6.** Izračunati rastojanje tačke  $M(1, -3)$  od prave a)  $2x - 3y + 1 = 0$ , b) prave  $p$  čiji je vektor pravca  $\vec{p} = (1, -2)$ , a tačka  $P(1, 0)$ .

**4.7.** Odrediti centar i poluprečnik opisanog kruga u trougao  $ABC$ , ako je  $A(1, 2), B(4, 3), C(6, 0)$  kao i koordinate težišta trougla.

4.8. Odrediti težište  $T$ , ortocentar  $H$  i centre opisanog  $O$  i upisanog kruga  $S$  u  $\triangle ABC$ ,  $A(-1, 4)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(1, 2)$ .

4.9. Odrediti presek pravih  $p$  i  $q$  koje su zadate tačkom i vektorom pravca:

- a)  $P(3, 1)$ ,  $\vec{p} = (1, 0)$ ,  $Q(2, 3)$ ,  $\vec{q} = (1, 1)$ ;
- b)  $P(3, 1)$ ,  $\vec{p} = (1, 0)$ ,  $Q(2, 3)$ ,  $\vec{q} = (-2, 0)$ ;
- c)  $P(3, 1)$ ,  $\vec{p} = (1, -2)$ ,  $Q(2, 3)$ ,  $\vec{q} = (-2, 4)$ .

4.10. Odrediti centar i poluprečnik kruga  $k : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ .

4.11. Odrediti presek kruga  $k$  iz prethodnog zadatka i prave:

- a)  $p : \vec{p} = (1, 1)$ ,  $P(2, -2)$
- b)  $q : x - y - 4 = 0$ .

## 5 Krive u ravni

5.1. Svesti na kanonski oblik translacijom:

- a)  $x^2 - 3y^2 - 4x - 18y - 23 = 0$ ;
- b)  $3y^2 + 6y - x - 1 = 0$ ;
- c)  $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y + 8 = 0$ ;
- d)  $x^2 + 25y^2 - 6x + 50y + 9 = 0$ ;
- e)  $9x^2 + 4y^2 + 16y + 16 = 0$ ;
- f)  $4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 32 = 0$ ;
- g)  $25x^2 - 4y^2 + 150x + 40y + 25 = 0$ ;
- h)  $y^2 - 36x - 2y - 35 = 0$ .

5.2. Rotacijom pokazati da je kriva  $xy - 1 = 0$  hiperbola.

5.3. Odrediti Bezijerovu krivu čije su kontrolne tačke  $P_0(1, 1)$ ,  $P_1(2, 2)$ ,  $P_2(4, -1)$ .

5.4. Odrediti Bezijerovu krivu čije su kontrolne tačke  $P_0(1, -1)$ ,  $P_1(2, 0)$ ,  $P_2(4, -1)$ ,  $P_3(0, 0)$ .

5.5. Date su tačke  $P_0 = (2, 3)$ ,  $P_1 = (-1, 4)$ ,  $P_2 = (3, 0)$ ,  $P_3 = (1, -2)$ .

- a) Odrediti Bezijerovu krivu  $\alpha_3(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  čije su to kontrolne tačke.
- b) Odrediti tangentne vektore u tačkama  $P_0$  i  $P_3$ .
- c) Da li je tangenta te krive u tački  $\alpha(\frac{1}{2})$  paralelna pravoj  $P_0P_3$ ?
- d) Odrediti krivu dobijenu pomeranjem kontrolne tačke  $P_2$  za vektor  $\vec{v} = (-7, -11)$ . Da li je tangenta te nove krive u tački  $\alpha'_3(\frac{1}{2})$  paralelna pravoj  $P_0P_3$ ?

5.6. U ravni su date tačke  $P_0 = (2, 1)$ ,  $P_1 = (6, 13)$ ,  $P_2 = (14, -7)$  i prave  $p : y = 5$ ,  $q : x = 7$  i  $r : x = 2 + 3s$ ,  $y = 12 - 2s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

- a) Napisati Bezijerovu krivu  $\alpha_2(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  čiji je kontrolni poligon  $P_0P_1P_2$ .
- b) Odrediti presek kontrolnog poligona sa pravama  $p, q, r$ .
- c) Odrediti presek krive  $\alpha_2(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  sa pravama  $p, q, r$ . Uporediti broj presečnih tačaka sa slučajem kontrolnog poligona (svojstvo najmanje varijacije).
- d) Pokazati da je kriva  $\alpha_2(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  deo parabole  $y^2 = 4x$  (svojstvo afine invarijantnosti).

5.7. Upotrebom de Casteljaou algoritma odrediti tačku Bezijerove krive  $\alpha_4(t)$  za  $t = \frac{2}{3}$ , ako su kontrolne tačke krive  $P_0(7, -8)$ ,  $P_1(-11, 10)$ ,  $P_2(7, 46)$ ,  $P_3(34, 37)$ ,  $P_4(16, 1)$ .

5.8. Data je Bezijerova kriva kontrolnim tačkama  $P_0 = (2, -3)$ ,  $P_1 = (0, 3)$ ,  $P_2 = (2, 9)$ ,  $P_3 = (8, 7)$ .

- a) Podeliti krivu na dva dela praveći rez u tački  $\alpha_3(\frac{1}{2})$ .
- b) Povećati stepen "leve" krive za 1.

## 6 Prava i ravan u prostoru

- 6.1. Ravni  $x - y + 3z - 2 = 0$  odrediti parametarski jednačinu.
- 6.2. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(-1, 2, -1)$  i  $C(0, 0, 1)$ .
- 6.3. Pravu  $p : x = t + 4, y = -2t + 1, z = 3t - 2, t \in \mathbb{R}$  zapisati kao presek dve ravni.
- 6.4. Odrediti jednačinu ravni  $\alpha$  koja sadrži pravu  $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$  i koja je normalna na ravan  $\beta : y = 0$ .
- 6.5. Pravu  $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$  zapisati parametarski.
- 6.6. Odrediti rastojanje tačke  $M(1, 0, 12)$  od prave  $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$ .
- 6.7. Odrediti rastojanje tačke  $M(1, 0, 12)$  od ravni  $\alpha : x - y - 4z = 0$ .
- 6.8. Data je ravan  $\alpha : x - 2y + 5z - 1 = 0$ . Odrediti presek te ravni sa pravama:
- $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{7} = \frac{z}{1}$ ;
  - $q : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ ;
  - $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$ ;
  - $s : x - y = 1, x + y - z + 5 = 0$ ;
  - $t : x - z + 2 = 0, -y + 3z + 2 = 0$ .
- 6.9. Odrediti tačku prodora prave  $p : \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$  kroz ravan  $\alpha : 3x + y + 5z - 7 = 0$ .
- 6.10. Odrediti jednačinu familije svih ravni koje sadrže tačku  $P(5, -2, 1)$  i a) normalne b) paralelne su na pravu  $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{2}$ .
- 6.11. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu  $p : x + y + z = 0, 2x - 2z + 3 = 0$  i sa ravni  $\alpha : x - 4y - 8z + 12 = 0$  gradi ugao od  $\frac{\pi}{4}$ .
- 6.12. Odrediti međusobni položaj pravih (i presečnu tačku ako postoji):
- $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$      $q : 2x = y, 3x = z$
  - $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$      $q : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$
  - $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$      $q : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$
- 6.13. Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih  $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$  i  $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ .
- 6.14. Izračunati (koristeći digitron za arccos) ugao između ravni  $\alpha : x + 2y - 3z - 1 = 0$  i  $\beta : 2x - 3y + 4z + 2 = 0$ .
- 6.15. Izračunati (koristeći digitron za arccos) ugao između prave  $p : x + 2y - 3z - 1 = 0, x - z + 2 = 0$  i ravni  $\alpha : x - 4y + 2z + 2 = 0$ .
- 6.16. Odrediti jednačinu normale iz tačke  $A(2, 3, -1)$  na ravan  $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$ .
- 6.17. Odrediti normalnu projekciju prave  $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$  na ravan  $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$ .
- 6.18. Odrediti tačku  $Q$  koja je simetrična tački  $P(3, -2, -4)$  u odnosu na ravan  $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$  kao i projekciju  $P'$  tačke  $P$  na ravan  $\alpha$ .

**6.19.** Odrediti tačku  $Q$  koja je simetrična tački  $P(-1, -2, 1)$  u odnosu na pravu  $l : \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$  kao i projekciju  $P'$  tačke  $P$  na pravu  $l$ .

**6.20.** Odrediti centralnu projekciju tačke  $P(1, 2, 3)$  na ravan  $z = -1$ , ako je centar projektovanja tačka  $O(0, 0, 0)$ .

**6.21.** Odrediti  $\lambda$  tako da se prave  $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$  i  $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$  seku. Koje su koordinate presečne tačke?

**6.22.** Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku  $L(2, -1, 7)$  i seče pravu  $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$  i  $q : \frac{x-z}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$ .

**6.23.** Ispitati da li prava  $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-4}$  seče trougao  $ABC$ , ako je  $A(2, 4, 6)$ ,  $B(-4, 2, 0)$ ,  $C(6, 4, -2)$ . U slučaju da seče, odrediti koordinate presečne tačke.

**6.24.** Odrediti presek ravni  $\alpha : x - 2y + 2z + 5 = 0$  i trougla  $ABC$ , ako je  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 2, 2)$ ,  $C(2, 1, 5)$ .

**6.25.** Odrediti presek ravni  $\alpha : x - y + 2z - 3 = 0$  i trougla  $ABC$ , ako je  $A(1, -2, 0)$ ,  $B(-1, 2, 3)$ ,  $C(2, 1, 3)$ .

## 7 Poliedarske površi

**7.1.** a) Iz tabele povezanosti odrediti skup ivica. b) Nacrtati sliku. c) Proveriti da li ta tabela povezanosti zadaje apstraktnu poliedarsku površ. d) U slučaju potvrdnog odgovora pod c) proveriti da li je ta poliedarska površ povezana. e) Odrediti rub te površi i broj komponenta ruba.

za sledeće tabele povezanosti: i)  $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ ,  $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ ,  
 $p_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$ ,  $p_1 = \langle 0, 2, 4, 5 \rangle$ ,  $p_2 = \langle 3, 2, 0 \rangle$ ,  $p_3 = \langle 1, 0, 3 \rangle$ .

ii)  $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}\}$ ,  $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ ,  
 $p_0 = \langle 0, 1, 7, 4 \rangle$ ,  $p_1 = \langle 1, 2, 6, 7 \rangle$ ,  $p_2 = \langle 2, 3, 5, 6 \rangle$ ,  $p_3 = \langle 3, 0, 4, 5 \rangle$ ,  $p_4 = \langle 8, 9, 10 \rangle$ .

**7.2.** a) Nacrtati poliedarski model Mebijusove trake i napisati mu tabelu povezanosti. b) Dokazati da je Mebijusova traka neorjentabilna.

**7.3.** Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni kocke  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ , ako je izabrana orijentacija pljosni  $p_0 = \langle A, B, C, D \rangle$ .

**7.4.** Data je poliedarska površ  $p_0 = \langle 0, 1, 4, 3 \rangle$ ,  $p_1 = \langle 1, 2, 5, 4 \rangle$ ,  $p_2 = \langle 2, 0, 3, 5 \rangle$ ,  $p_3 = \langle 6, 8, 5, 3 \rangle$ ,  
 $p_4 = \langle 6, 3, 4, 7 \rangle$ ,  $p_5 = \langle 4, 5, 8, 7 \rangle$ ,  $p_6 = \langle 8, 7, 1, 2 \rangle$ ,  $p_7 = \langle 0, 1, 7, 6 \rangle$ ,  $p_8 = \langle 0, 6, 8, 2 \rangle$ .

a) Dokazati da je ona poliedar, tj. da nema rub.

b) Izračunati njenu Ojlerovu karakteristiku i broj rupa.

**7.5.** Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake.

## 8 Konveksni omotač i triangulacija poligona

**8.1.** Odrediti konveksni omotač tačaka  $P_0 = (1, 3)$ ,  $P_1 = (-2, 0)$ ,  $P_2 = (-3, 5)$ ,  $P_3 = (4, 2)$ ,  
 $P_4 = (1, 1)$ ,  $P_5 = (6, 4)$ ,  $P_6 = (2, -3)$ ,  $P_7 = (5, 5)$ ,  $P_8 = (5, -1)$ .



**8.2.** U ravni su date tačke  $P_0 = (1, -3), P_1 = (2, -2), P_2 = (-1, 2), P_3 = (4, -1), P_4 = (0, 3)$ . Ispitati da li je poligon  $P_0P_1P_2P_3P_4$  prost. Ako nije, sortirati tačke  $P_0, \dots, P_4$  tako da poligon bude prost.

**8.3.** Od datih tačaka u ravni formirati prost poligon, a zatim ga triangulisati.

a)  $P_0 = (0, 0), P_1 = (5, -1), P_2 = (3, 2), P_3 = (6, 4), P_4 = (-1, 3)$

b)  $P_0 = (-1, 3), P_1 = (2, 1), P_2 = (0, 0), P_3 = (4, -1), P_4 = (5, 3), P_5 = (3, 4)$ .

## 9 Zadaci za vežbu

**9.1.** Dat je kvadrat  $ABCD$ , čije je središte  $S$ . Ako je data baza  $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ,  $\vec{e}_1 = \vec{AS}, \vec{e}_2 = \vec{AD}$ , odrediti koordinate tačaka  $A, B, C, D, S$  u reperu  $Ae$ .

**9.2.** Odrediti zapreminu tetraedra čija su temena  $A(1, 0, 0), B(3, 4, 6), C(0, 1, 0), D(1, 1, 3)$ . (Rešenje:  $V = \frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 2$ .)

**9.3.** Odrediti formule homotetije sa centrom  $C(3, -2)$  i koeficijentom  $-5$ . U koju tačku se preslikava tačka  $X(3, -2)$  pri ovoj homotetiji. (Rešenje: Pošto je  $X = C$ , tačka  $X$  se slika u sebe, tj.  $X'(3, -2)$ . Proveriti.)

**9.4.** Odrediti podnožje normale iz tačke  $A(1, 3)$  na pravoj  $p : 2x - 2y - 4 = 0$ . (Rešenje: tačka  $(3, 1)$ .)

**9.5.** Odrediti presek pravih  $AB$  i  $CD$ , gde je  $A(12, 3), B(12, 5), C(5, 7), D(-2, 1)$ . (Rešenje: tačka  $(12, 13)$ .)

**9.6.** Dat je trougao  $ABC$ ,  $A(3, 5), B(5, 3), C(9, 3)$ . Odrediti centar i poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla, kao i jednačinu opisanog kruga. (Rešenje:  $r = 4, C(7, 7)$ .)

**9.7.** Odrediti presek prave  $p : x + y - 8 = 0$  i kruga  $k : x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$ . (Rešenje: tačke  $(3, 5)$  i  $(5, 3)$ .)

**9.8.** Date su tačke  $A_1(1, 7), A_2(-3, 3), A_3(3, -3)$ . a) Odrediti Bezijerovu krivu stepena 2 čije su to kontrolne tačke. b) Odrediti tačku  $M$  koja se dobija za  $t = \frac{1}{2}$ . (Rešenje:  $M(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ )

**9.9.** Svesti krive na kanonski oblik translacijom i odrediti o kojoj se krivoj radi: a)  $y^2 - 6y - 6x - 3 = 0$ , b)  $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$ . (Rešenje: parabola, tačka)

**9.10.** Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu  $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$  i normalna je na ravan  $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$ .

**9.11.** Data je poliedarska površ  $p_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle, p_1 = \langle 5, 0, 2 \rangle, p_2 = \langle 0, 3, 4 \rangle, p_3 = \langle 1, 2, 3 \rangle, p_4 = \langle 1, 3, 4 \rangle, p_5 = \langle 0, 4, 5 \rangle$ .

a) Odrediti rub te poliedarske površi. Koliko on ima komponentata?

b) Uraditi usklađivanje orijentacija pljosni. Da li je površ orijentabilna?