

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

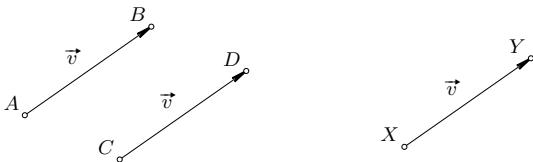
Геометрија И–смер

део 1: Вектори

Тијана Шукиловић

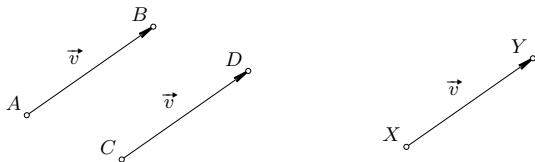
26. септембар 2020

Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

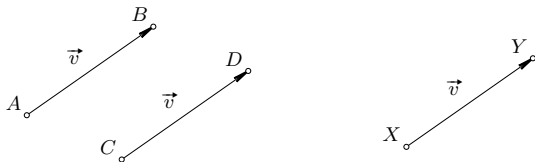
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина

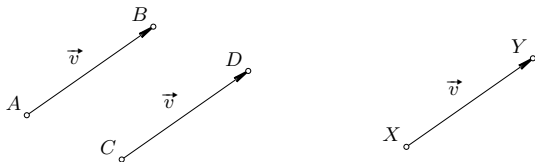
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник

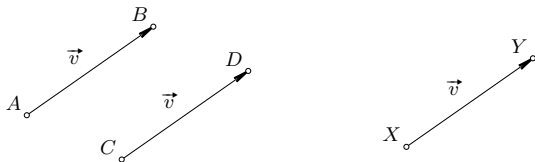
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$

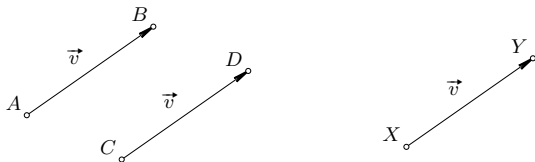
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор

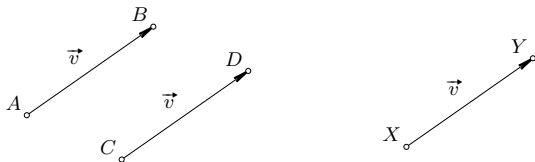
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори

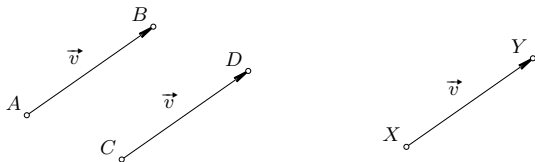
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори
- копланарни вектори

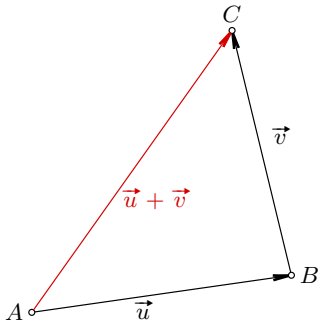
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

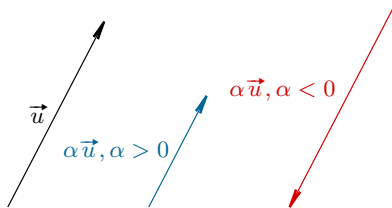
- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори
- копланарни вектори
- скуп свих вектора \mathbb{V} , односно \mathbb{V}^n

Операције са векторима – обнављање



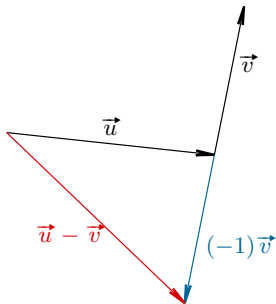
Слика 2: Сабирање вектора

Операције са векторима – обнављање



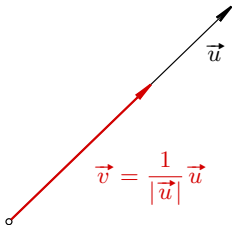
Слика 3: Множење вектора скаларом

Операције са векторима – обнављање



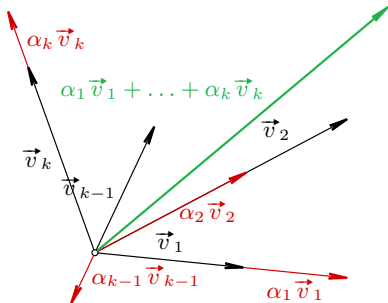
Слика 4: Разлика вектора

Операције са векторима – обнављање



Слика 5: Јединични вектор

Операције са векторима – обнављање



Слика 6: Линеарна комбинација вектора

Линеарна (не)зависност вектора – обнављање

- линеарно независни вектори

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Линеарна (не)зависност вектора – обнављање

- линеарно независни вектори

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

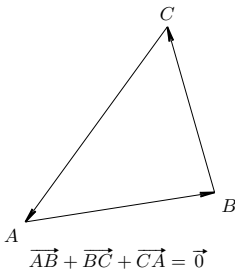
- линеарно зависни вектори

Линеарна (не)зависност вектора – обнављање

- линеарно независни вектори

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

- линеарно зависни вектори



Слика 7: Вектори одређени страницама троугла су линеарно зависни

Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.1

Ненула вектори \vec{u} и \vec{v} су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.2

У равни постоје два линеарно независна вектора, а свака три вектора равни су линеарно зависна.

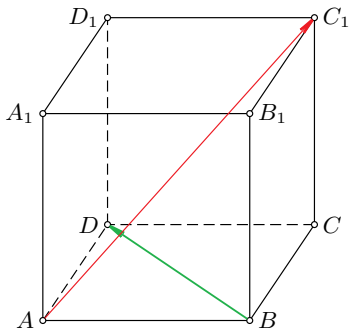
Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.3

У простору постоје три линеарно независна вектора, а свака четири вектора су линеарно зависна.

Примери

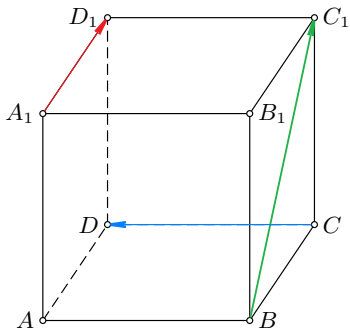
Пример 1



Слика 8: Да ли су вектори $\overrightarrow{AC_1}$ и \overrightarrow{BD} колинеарни?

Примери

Пример 1



Слика 9: Да ли су вектори $\vec{BC_1}$, $\vec{A_1D_1}$ и \vec{CD} копланарни?

База и димензија векторског простора

- Векторски простор

База и димензија векторског простора

- Векторски простор
- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.

База и димензија векторског простора

- Векторски простор
- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

База и димензија векторског простора

- Векторски простор
- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни \mathbb{V}^2 је два.

База и димензија векторског простора

- Векторски простор
- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни \mathbb{V}^2 је два.
Сваки вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ може да се напише у облику:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2,$$

где је $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ база векторског простора \mathbb{V}^2 .

База и димензија векторског простора

- Векторски простор
- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни \mathbb{V}^2 је два.
Сваки вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ може да се напише у облику:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2,$$

где је $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ база векторског простора \mathbb{V}^2 .

\vec{e}_1, \vec{e}_2 – линеарно независни $\implies x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ – јединствени.

Координате вектора

- База $e = (e_1, e_2)$ векторског простора \mathbb{V}^2 .
- Координате вектора $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ у бази e :

$$[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Координате вектора

- База $e = (e_1, e_2)$ векторског простора \mathbb{V}^2 .
- Координате вектора $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ у бази e :

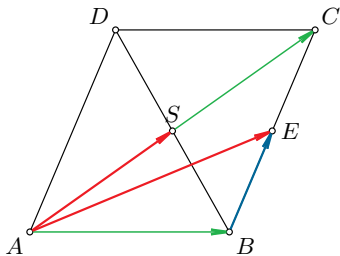
$$[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Лако се уопштава на произвољну димензију.

Пример

Пример 2

Дат је паралелограм $ABCD$. Нека је E средиште странице BC и S пресек дијагонала AC и BD . Одредити координате вектора \overrightarrow{BE} у бази $e = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AS})$.



Слика 10: $[\overrightarrow{BE}]_e = ?$

Координате тачке

- База $e = (e_1, \dots, e_n)$ векторског простора \mathbb{V} .
- Фиксирана тачка $O \in \mathbb{E}$ назива се **координатни почетак**.
- O_e се назива **координатним системом** или **репером** простора \mathbb{E} .

Координате тачке

- База $e = (e_1, \dots, e_n)$ векторског простора \mathbb{V} .
- Фиксирана тачка $O \in \mathbb{E}$ назива се **координатни почетак**.
- O_e се назива **координатним системом** или **репером** простора \mathbb{E} .

Дефиниција 2.1

Координате тачке $X \in \mathbb{E}$ у реперу O_e дефинишемо као координате вектора \overrightarrow{OX} у бази e :

$$[X]_{O_e} := [\overrightarrow{OX}]_e. \quad (1)$$

Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора \overrightarrow{MN} добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N .”

Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора \overrightarrow{MN} добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N .”

Коректност:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{MN}]_e &= [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e \\ &= [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e \\ &= [N]_{Oe} - [M]_{Oe}. \end{aligned}$$

Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора \overrightarrow{MN} добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N .“

Коректност:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{MN}]_e &= [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e \\ &= [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e \\ &= [N]_{Oe} - [M]_{Oe}. \end{aligned}$$

Пример 3

Одредити координате темена паралелограма из Примера 2 у реперу Ae .

Скаларни производ – обнављање

Дефиниција 3.1 (Скаларни производ)

$$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}: \quad \vec{v} \cdot \vec{u} := |\vec{v}| |\vec{u}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}),$$

Скаларни производ – обнављање

Дефиниција 3.1 (Скаларни производ)

$$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}: \quad \vec{v} \cdot \vec{u} := |\vec{v}| |\vec{u}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}),$$

Примене скаларног производа:

- Дужине:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}};$$

- Углови:

$$\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| |\vec{u}|}$$

Скаларни производ у ортонормираној бази

- Особине скаларног производа

Скаларни производ у ортонормираној бази

- Особине скаларног производа
- Ортонормирана база = база $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) : \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$.

Скаларни производ у ортонормираној бази

- Особине скаларног производа
- Ортонормирана база = база $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) : \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$.
- $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n, \vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$:

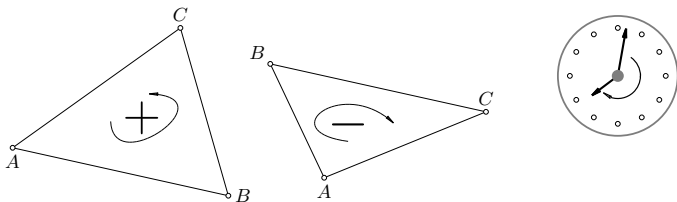
$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{u} &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \\ &= (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = [\vec{v}]_e^T \cdot [\vec{u}]_e\end{aligned}$$

Оријентација равни

- Појам оријентације уводимо интуитивно.
Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.

Оријентација равни

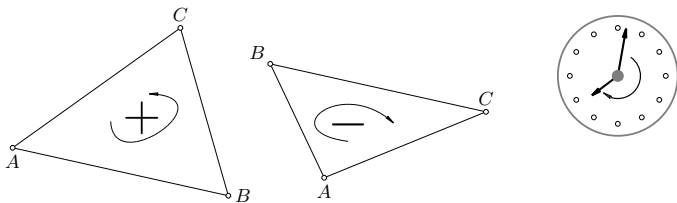
- Појам оријентације уводимо интуитивно.
Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.



Слика 11: Троугао позитивне и негативне оријентације

Оријентација равни

- Појам оријентације уводимо интуитивно.
Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.



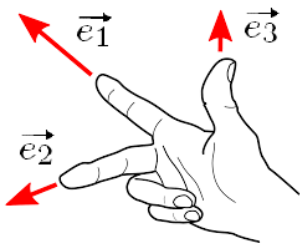
Слика 11: Троугао позитивне и негативне оријентације

- База $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ је позитивне оријентације, ако је троугао OAB позитивне оријентације.

Оријентација простора

Базе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ је позитивне оријентације ако важи правило руке:

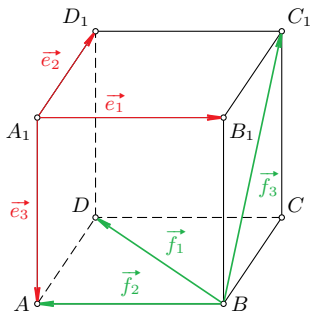
„ако испружени кажипрст руке представља вектор \vec{e}_1 , средњи прст вектор \vec{e}_2 , а палац вектор \vec{e}_3 , онда је база $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ позитивне оријентације”.



Пример

Пример 4

Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Одредити оријентацију ортонормиране базе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{A_1 B_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{A_1 D_1}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{A_1 A}$ ако је база $f = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC_1})$ позитивне оријентације.



Слика 12: Оријентација простора

Векторски производ – обнављање

Дефиниција 3.2 (Векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3$: $\vec{v} \times \vec{u} := \vec{w}$, где је \vec{w} вектор који има:

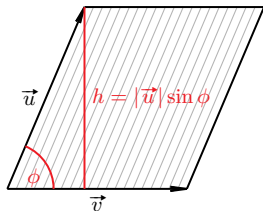
- Интензитет: $|\vec{w}| = |\vec{v}| |\vec{u}| \sin \angle(\vec{v}, \vec{u})$;
- Правац: $\vec{w} \perp \vec{v}, \vec{u}$;
- Смер: База $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ је позитивне оријентације.

Векторски производ – обнављање

Дефиниција 3.2 (Векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3$: $\vec{v} \times \vec{u} := \vec{w}$, где је \vec{w} вектор који има:

- Интензитет: $|\vec{w}| = |\vec{v}| |\vec{u}| \sin \angle(\vec{v}, \vec{u})$;
- Правац: $\vec{w} \perp \vec{v}, \vec{u}$;
- Смер: База $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ је позитивне оријентације.



Слика 13: $|\vec{v} \times \vec{u}| = P(\vec{v}, \vec{u})$

Векторски производ у ортонормираној бази

- Особине векторског производа

Векторски производ у ортонормираној бази

- Особине векторског производа
- $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – ортонормирана база позитивне оријентације

\times	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}_1	$\vec{0}$	\vec{e}_3	$-\vec{e}_2$
\vec{e}_2	$-\vec{e}_3$	$\vec{0}$	\vec{e}_1
\vec{e}_3	\vec{e}_2	$-\vec{e}_1$	$\vec{0}$

Матрична репрезентација векторског множења

- $\vec{v} = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, $\vec{u} = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Матрична репрезентација векторског множења

- $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$, $\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

- Множење вектором \vec{v} , $[\vec{v}]_e = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{u} &:= v_{\times} \cdot [\vec{u}]_e \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Матрична репрезентација векторског множења

- $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$, $\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

- Множење вектором \vec{v} , $[\vec{v}]_e = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{u} &:= v_{\times} \cdot [\vec{u}]_e \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Проверити!

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0), \quad B(b_1, b_2, 0), \quad C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =: D_{ABC} \vec{e}_3.$$

Важи:

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0), \quad B(b_1, b_2, 0), \quad C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =: D_{ABC} \vec{e}_3.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|;$

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0), \quad B(b_1, b_2, 0), \quad C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =: D_{ABC} \vec{e}_3.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|;$
- A, B, C – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0;$

Примене векторског производа

$A, B, C \in \mathbb{E}^2$: $A(a_1, a_2, 0)$, $B(b_1, b_2, 0)$, $C(c_1, c_2, 0)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =: D_{ABC} \vec{e}_3.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|$;
- A, B, C – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0$;
- $\triangle ABC$ – позитивно оријентисан ако $D_{ABC} > 0$.

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0), \quad B(b_1, b_2, 0), \quad C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =: D_{ABC} \vec{e}_3.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|$;
- A, B, C – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0$;
- $\triangle ABC$ – позитивно оријентисан ако $D_{ABC} > 0$.

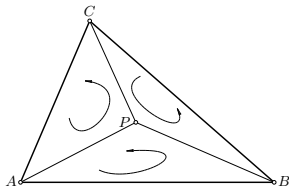
Пример 5

Одредити површину $\triangle ABC$, $A(1, 3)$, $B(4, 0)$, $C(2, 3)$. Да ли је троугао позитивне оријентације?

Примене векторског производа

Теорема 3.1

Тачка P припада троуглу ABC ако и само ако:
 $\text{sign}(D_{ABP}) = \text{sign}(D_{BCP}) = \text{sign}(D_{CAP})$.

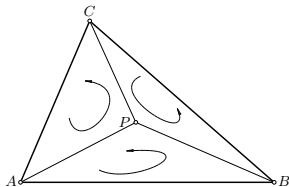


Слика 14: Тачка унутар троугла

Примене векторског производа

Теорема 3.1

Тачка P припада троуглу ABC ако и само ако:
 $\text{sign}(D_{ABP}) = \text{sign}(D_{BCP}) = \text{sign}(D_{CAP})$.



Слика 14: Тачка унутар троугла

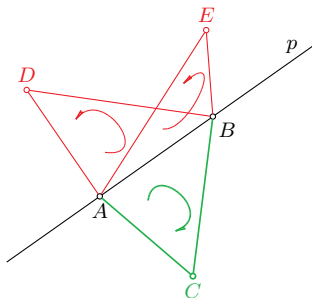
Пример 6

Да ли тачка $P(3, 2)$ припада $\triangle ABC$ из Примера 5?

Примене векторског производа

Тачке C и D са исте стране праве p ако и само ако су троуглови ABC и ABD , $A, B \in p$, истих оријентација:

$$\text{sign}(D_{ABC}) = \text{sign}(D_{ABD}).$$

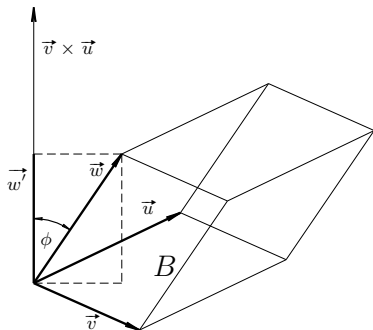


Слика 15: Тачке са исте/разних стране праве

Мешовити производ – обнављање

Дефиниција 3.3 (Мешовити производ)

$$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3 : \quad [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] := (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}.$$



Слика 16: $||[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]|| = V_{(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})}$

Рачунање и примене мешовитог производа

Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Рачунање и примене мешовитог производа

Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

- Особине мешовитог производа

Рачунање и примене мешовитог производа

Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

- Особине мешовитог производа

Последица 3.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ су линеарно независни ако и само ако:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0.$$

Рачунање и примене мешовитог производа

Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

- Особине мешовитог производа

Последица 3.1

Вектори \vec{v} , \vec{u} , \vec{w} су линеарно независни ако и само ако:

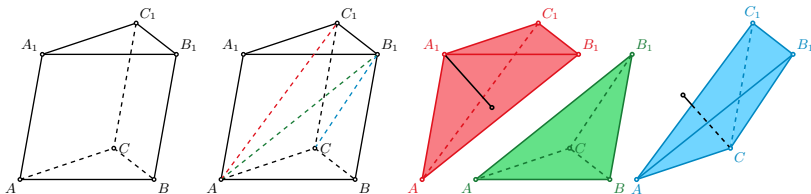
$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0.$$

Последица 3.2

Вектори $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ простора, чине базу позитивне оријентације ако је $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] > 0$, а негативне оријентације ако је $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] < 0$.

Примене мешовитог производа

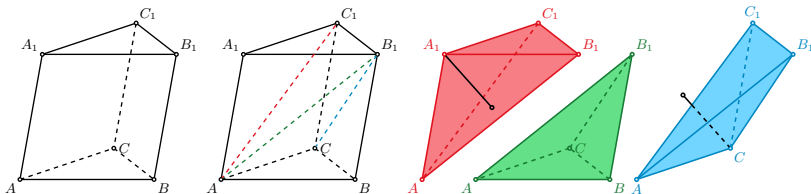
Запремина тетраедра $ABCA_1$ једнака је шестини запремине паралелепипеда одређеног векторима \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и $\overrightarrow{AA_1}$.



Слика 17: Подела тростране призме на три пирамиде истих запремина

Примене мешовитог производа

Запремина тетраедра $ABCA_1$ једнака је шестини запремине паралелепипеда одређеног векторима \vec{AB} , \vec{AC} и $\vec{AA_1}$.



Слика 17: Подела тростране призме на три пирамиде истих запремина

Пример 7

Одредити запремину тетраедра чија су темена $A(1, 0, 0)$, $B(3, 4, 6)$, $C(0, 1, 0)$, $D(1, 1, 3)$.